

ОСЕССИМЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ГРАВИТАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ N ТЕЛ© *И.И.Смольский*

625000, Тюмень, а/я 1230, ИКЗ СО РАН

Тел. (8-345-2)-27-35-18 Fax:(8-345-2)-25-11-53

E-mail: Smulski@IKZ.RU; JSmulsky@MAIL.RU

Рассмотрено гравитационное взаимодействие n тел, осесимметрично расположенных на плоскости. Рассчитана сила воздействия на каждое тело. Показано, что она направлена к центру масс и обратно пропорциональна расстоянию до него. Приведены зависимости для скорости, траектории и времени движения по траектории для всех возможных случаев движения. В частном случае движения четырех тел полученные точные решения подтверждены численными решениями этой задачи. Точное решение дает ответы на ряд вопросов, которые не могут быть получены в результате приближенных решений. Кроме того, оно позволяет тестировать приближенные методы решения проблемы многих тел.

THE AXISYMMETRIC PROBLEM OF GRAVITATIONAL INTERACTION OF N BODIES*Joseph J. Smulsky*

It is considered the gravitational interaction of n bodies, which axially symmetric located on a plane. The force of action on each body is calculated. It is shown, that force is directed to a center of masses and is inverse to a distance to it. The expressions for a velocity, trajectory and time of moving on trajectory are received for all possible cases of interaction. The obtained exact solutions are confirmed by numerical solutions of this task in the specific case of four bodies. The exact solution gives the answers to a many of problems, which cannot be obtained by approximate solutions. Besides it allows to test approximate methods of a solution of a many bodies problem.

1. Введение. До недавнего времени существовало только одно точное решение задачи ньютоновского гравитационного взаимодействия тел. Для случая двух тел она была решена 300 лет назад И.Ньютоном. Десять лет назад Б.Эльмабсут [1] нашел решение задачи для одного случая осесимметрично расположенных на плоскости n тел, которые равномерно обращаются по окружности вокруг оси симметрии, т.е. при наличии у тел только одной определенной трансверсальной скорости. Совсем недавно Е.А.Гребеников [2] получил решения этой задачи при наличии у тел произвольной радиальной и трансверсальной скоростей. Это же решение получено в нашей работе [3], но другим методом. Если в первой работе используется анализ дифференциальных уравнений движения n тел, то во второй рассчитывается сила воздействия всех тел на одно, а затем решается дифференциальное уравнение движения одного тела под воздействием суммарной силы. Ниже в более совершенном виде приводится это решение, а также временные характеристики движения n тел.

В общем случае гравитационного взаимодействия точечных n -тел, тело с массой m_j воздействует на тело с массой m_i (см. рис.1) силой

$$\mathbf{F}_{ji} = -G \frac{m_i m_j \mathbf{R}_{ji}}{R_{ji}^3}, \quad (1)$$

где G – гравитационная постоянная;

$\mathbf{R}_{ji} = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j$ – вектор-расстояние от j -го тела до i -го.

Сила воздействия всех тел на i -е тело будет равна

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i}^n \mathbf{F}_{ji} = -G \sum_{j \neq i}^n \frac{m_j \mathbf{R}_{ji}}{R_{ji}^3}. \quad (2)$$

Тогда ускорение i -го тела согласно 2-му закону механики запишется

$$d^2 \mathbf{R}_i / dt^2 = \mathbf{F}_i / m_i = -G \sum_{j \neq i}^n \frac{m_j \mathbf{R}_{ji}}{R_{ji}^3}. \quad (3)$$

где $\mathbf{R}_i$ – радиус-вектор i -го тела в инерциальной системе координат.

Уравнения (3) представляют систему $3n$ обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, которые при задании $3n$ начальных значений координат n -тел и $3n$ начальных значений компонент их скоростей представляют задачу n -тел. В общем случае аналитически решена задача только для двух тел, и результаты ее приведены во многих источниках, в том числе [3] и [4]. Ниже представлено решение этой задачи для n -тел, осесимметрично расположенных на плоскости.

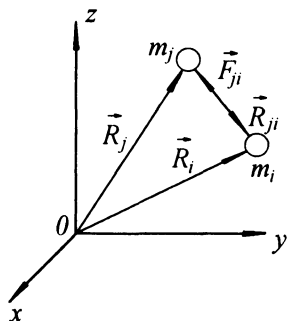


Рис.1. Сила гравитационного воздействия тела m_j на тело m_i .

2. Сила воздействия на каждое из n -тел. Рассмотрим взаимодействие точечных n -тел, равномерно расположенных по окружности радиуса r (рис.2) с угловым интервалом $\varphi_1 = 2\pi/n$ и массы которых одинаковы: $m_j = m_1$. Тело с массой m_j , отстоящее от тела с массой m_1 на угол $\varphi_j = 2\pi(j-1)/n$, в соответствии с (1) будет воздействовать на него силой, проекция которой на ось x равна

$$F_{j1x} = -\frac{Gm_1 m_j}{AB^2} \cos \alpha. \quad (4)$$

Треугольник OBA – равнобедренный, поэтому $2\alpha + \varphi_j = \pi$, откуда получаем

$$\alpha = (\pi - \varphi_j) / 2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi(j-1)}{n}. \quad (5)$$

Из этого треугольника определяется расстояние $AB = 2r \cos \alpha$. Тогда сила (4) запишется так

$$F_{j1x} = -\frac{Gm_1m_j}{4r^2 \cos \alpha} = -\frac{Gm_1m_j}{4r^2 \sin(\pi(j-1)/n)} , \quad (6)$$

где j в зависимости от номера тела может изменяться от 2 до n .

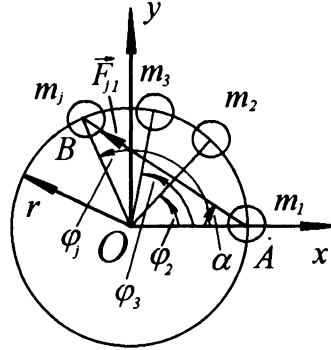


Рис.2. Взаимодействие осесимметрично расположенных n тел.

С учетом того, что $m_j=m_1$, просуммируем по индексу j силы воздействия (6) тел от m_2 до m_n на первое тело:

$$F_{1x} = -\frac{Gm_1^2}{r^2} f(n), \quad (7)$$

где

$$f(n) = 0,25 \sum_{j=2}^n \frac{1}{\sin[(j-1)\pi/n]} . \quad (8)$$

Аналогично (4), сумма проекций на ось y сил воздействия всех тел на первое тело будет

$$F_{1y} = \sum_{j=2}^n \frac{Gm_1m_j}{AB^2} \cos \alpha_j = \frac{Gm_1^2}{4r^2} \left(\frac{\cos \pi/n}{\sin^2 \pi/n} + \frac{\cos 2\pi/n}{\sin^2 2\pi/n} + \dots + \frac{\cos(\pi-2\pi/n)}{\sin^2(\pi-2\pi/n)} + \frac{\cos(\pi-\pi/n)}{\sin^2(\pi-\pi/n)} \right) = 0 .$$

Поэтому силой F_{1x} полностью определяется воздействие всех тел на тело m_1 . Так как эта сила направлена к общему центру масс и обратно-пропорциональна квадрату расстояния r тела до него, то в векторном виде она запишется так:

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{Gm_1^2 \mathbf{r}}{r^3} f(n) . \quad (9)$$

Воздействие всех $(n-1)$ тел на любое тело m_i будет аналогично воздействию на тело m_1 . Поэтому выражением (9) определяется сила воздействия всех тел на тело m_i , где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор тела m_i относительно центра масс O , а функция $f(n)$ – для всех тел одинакова.

Так как тела расположены осесимметрично, то центр их масс находится в начале координат (см. рис.2) и, как видно из (8), сила воздействия всех тел на любое из них определяется только расстоянием r до общего центра масс O . Сомножитель $f(n)$ определяется осевой симметрией n тел. В процессе движения число тел не изменяется, и отсутствуют причины для нарушения осевой симметрии, т.е. $f(n)=\text{const}$ и не зависит от времени.

При сопоставлении силы (8) с силой всемирного тяготения (1) видно, что (8) отличается только этим постоянным коэффициентом $f(n)=\text{const}$. Следовательно, движение каждого из n тел будет происходить под действием центральной силы (8) аналогично движению одного те-

ла, находящегося под воздействием другого. Траектории каждого из тел будут коническими сечениями, в фокусе которых находится центр масс O .

Если дополнительно поместить $(n+1)$ -е тело с массой m_0 в центр масс O (рис.2), то оно на каждое из n тел будет воздействовать силой

$$\mathbf{F}_0 = -\frac{Gm_1m_0\mathbf{r}}{r^3}. \quad (10)$$

Тогда суммарная сила воздействия на каждое из n тел с массой $m_i=m_1$ будет равна сумме сил (8) и (10):

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1\mathbf{r}}{r^3}[m_0 + m_1f(n)]. \quad (11)$$

Сила воздействия всех n тел на центральное тело m_0 в силу осевой симметрии равна нулю и оно остается неподвижным.

Из сопоставления (11) с (1) видно, что воздействие совокупности тел на каждое тело с массой m_i эквивалентно воздействию на это тело некоторого тела с массой $M = m_0 + m_1f(n)$, находящегося в центре масс O всей совокупности тел.

Как уже отмечалось, сила (11) зависит от расстояния r тела m_i от центра масс O (см. рис.2). Так как центр масс системы $(n+1)$ тел движется неускоренно, то ускорение тела в инерциальной системе, связанной с ним, будет

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}}{m_i} = \frac{\mu_1\mathbf{r}}{r^3}, \quad (12)$$

где

$$\mu_1 = -G[m_0 + m_1f(n)]. \quad (13)$$

Дифференциальное уравнение (12) движения тела m_i относительно центра масс идентично дифференциальному уравнению движения тела m_i относительно тела с массой $M = m_0 + m_1f(n)$, т.е. движение каждого из m_i тел полностью определяется классической проблемой двух тел [4]. В наших работах [3, 5, 6] рассмотрен общий случай задачи двух тел, когда силы зависят не только от относительного расстояния между телами, но и от скорости. Представление временных параметров движения является не тривиальным, поэтому целесообразно их описать более подробно.

3. Уравнения движения. Выразим ускорение $\mathbf{w} = d^2\mathbf{r}/dt^2$ в левой части (12) через ускорения в полярной системе координат: на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ и на направление $\boldsymbol{\tau}$, перпендикулярное к нему. Составляющую ускорения на перпендикулярное направление $\mathbf{w}_\tau = (\boldsymbol{\tau}/r)[d(\omega r^2)/dt]$ называют трансверсальной. Здесь $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор, а $\omega = d\phi/dt$ – угловая скорость поворота радиус-вектора $\mathbf{r}$. Радиальная компонента ускорения будет равна

$$\mathbf{w}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 \right). \quad (14)$$

После подстановки этих величин в (12) получаем

$$\frac{\boldsymbol{\tau}}{r} \frac{d(\omega r^2)}{dt} + \frac{\mathbf{r}}{r} \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 \right) = \mu_1 \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (15)$$

Приравнявая выражения в правой и левой частях этого равенства при соответствующих векторах τ и $\mathbf{r}$, получаем два уравнения, из которых первое дает:

$$\frac{1}{r} \frac{d(\omega r^2)}{dt} = 0, \quad \frac{d(\omega r^2)}{dt} = 0, \quad \omega r^2 = h = \text{const}.$$

В процессе движения момент количества движения единицы массы, т.е. кинематический момент количества движения h

$$h = \omega r^2 = v_t r = \text{const} \quad (16)$$

остается неизменным. Здесь $v_t = \omega r$ – трансверсальная скорость.

Приравнявая коэффициенты при векторе $\mathbf{r}$ в (15) с учетом (16), получаем второе уравнение движения

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - h = \frac{\mu_1}{r^2}. \quad (17)$$

Так как радиальная скорость $v_r = dr/dt$, то уравнение (17) запишется в виде

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv_r^2}{dr} = h + \frac{\mu_1}{r^2}. \quad (18)$$

Интегрируя (18) с учетом начальных условий

$$\text{при } t=t_0, \quad r=r_0, \quad \varphi=\varphi_0, \quad v_r=v_{r0}, \quad v_t=v_{t0} = h/r_0,$$

получаем выражение для радиальной скорости

$$v_r = \sqrt{v_{r0}^2 + \left(\frac{\mu_1}{h} + \frac{h}{r_0} \right)^2 - \left(\frac{\mu_1}{h} + \frac{h}{r} \right)^2}. \quad (20)$$

Так как

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr/dt}{d\varphi/dt} = \frac{v_r}{\omega} = \frac{v_r}{h} r^2, \quad (21)$$

отсюда можно получить интегралы для траектории и для времени движения по траектории

$$\varphi = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 v_r} \int; \quad t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{v_r}, \quad (22)$$

где радиальная скорость определяется формулой (20).

В точке траектории, называемой перигентром, взаимодействующие объекты сближаются на минимальное расстояние r_p , при котором их радиальная скорость равна нулю, а трансверсальная $v_t = v_p = h/r_p$ принимает наибольшее значение. Преобразуем уравнения для радиальной скорости (20) и траектории (22) к безразмерному виду, приведенному к параметрам в перигентре:

$$\bar{v}_r = \sqrt{(\alpha_1 + 1)^2 - \left[\alpha_1 + \frac{1}{\bar{r}} \right]^2}, \quad (23)$$

$$\varphi = \int \frac{d\bar{r}}{\bar{r}^2 \bar{v}_r}, \quad (24)$$

где

$$\alpha_1 = \mu_1 / (r_p v_p^2); \quad (25)$$

$\bar{r} = r/r_p$ – относительный радиус; $\bar{v}_r = v_r/v_p$ – относительная радиальная скорость; α_1 – параметр траектории.

Выражение (24) при радиальной скорости (23) заменой $y = 1/\bar{r}$ легко интегрируется, и при граничном условии $\bar{r} = 1$ при $\varphi=0$, получаем уравнение траектории

$$\bar{r} = \frac{1}{(\alpha_1 + 1) \cos \varphi - \alpha_1}. \quad (26)$$

Выражение (26) в полярной системе координат при $\alpha_1 = -1$ представляет окружность, при $-0.5 > \alpha_1 > -1$ – эллипсы, при $\alpha_1 = -0.5$ – параболу, $0 > \alpha_1 > -0.5$ – гиперболы, при $\alpha_1 = 0$ – прямую. Итак, траектории (26) описывают сечения конуса плоскостью и обычно [4] приводятся в зависимости от двух параметров:

$$\bar{r} = \frac{\bar{P}}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (27)$$

где $\bar{P} = \bar{P} r_p$ – фокальный параметр; ε – эксцентриситет.

Традиционные параметры в соответствии с (26) – (27) выражаются через параметр траектории α_1 так:

$$\bar{P} = -1/\alpha_1, \quad \varepsilon = -(1 + 1/\alpha_1). \quad (28)$$

Следует отметить, что при взаимодействии заряженных частиц по закону Кулона траектории также описываются выражением (27). Однако при больших скоростях движения необходимо учитывать магнитную составляющую силы, поэтому траектории будут уже другими. Они зависят не только от параметра α_1 , но и от скорости частицы в периферии [3, 5, 6].

4. Время движения по траектории. Интеграл для времени (22) зависит от вида траектории. В соответствии с [3] приведем (22) не к точке периферии r_p , а к произвольной точке траектории r_0 :

$$\bar{t} = \int_1^{\bar{r}} \frac{d\bar{r}}{\sqrt{(\bar{v}_{r0}^0)^2 + (\alpha_1^0 + 1)^2 - \left(\alpha_1^0 + \frac{1}{\bar{r}}\right)^2}},$$

где

$$\bar{v}_{r0}^0 = v_{r0}/v_{i0}, \quad \alpha_1^0 = \mu_1/(r_0 v_{i0}^2), \quad \bar{r} = r/r_0, \quad \bar{t} = t v_{i0}/r_0. \quad (29)$$

В соответствии с определением, связь между параметрами траектории следующая:

$$\alpha_1 = \alpha_1^0 r_p/r_0. \quad (30)$$

Результат интегрирования $\bar{t}$ зависит от параметра

$$A = (\bar{v}_{r0}^0)^2 + 2\alpha_1^0 + 1. \quad (31)$$

При $A > 0$ траектория будет гиперболой и время движения по ней запишется

$$\bar{t} = \frac{\bar{r}\bar{v}_r^0 - \bar{v}_{r0}^0}{A} + \frac{\alpha_1^0}{A^{3/2}} \ln \frac{\bar{r}\bar{v}_r^0 \sqrt{A} + A\bar{r} - \alpha_1^0}{\bar{v}_{r0}^0 \sqrt{A} + A - \alpha_1^0}, \quad (32)$$

где

$$\bar{v}_r^0 = \sqrt{(\bar{v}_{r0}^0)^2 + (\alpha_1^0 + 1)^2 - (\alpha_1^0 + 1/\bar{r})^2}, \quad (33)$$

$\bar{v}_{r0}^0$ – радиальная скорость при $\bar{r}_0 = 1$.

При $A < 0$ траектория будет эллипсом и время движения по ней в результате интегрирования получаем в виде

$$\bar{t} = \frac{\bar{r}\bar{v}_r^0 - \bar{v}_{r0}^0}{A} + \frac{\alpha_1^0}{(-A)^{3/2}} \left\{ \arcsin \frac{A\bar{r} - \alpha_1^0}{\sqrt{(\bar{v}_{r0}^0)^2 + (\alpha_1^0 + 1)^2}} - \arcsin \frac{A - \alpha_1^0}{\sqrt{(\bar{v}_{r0}^0)^2 + (\alpha_1^0 + 1)^2}} \right\}. \quad (34)$$

При $A = 0$ траектория является параболой и время движения по ней будет

$$\bar{t} = \frac{(-2\alpha_1^0\bar{r} - 1)^{3/2} - (-2\alpha_1^0 - 1)^{3/2}}{6(\alpha_1^0)^2} + \frac{\sqrt{-2\alpha_1^0\bar{r} - 1} - \sqrt{-2\alpha_1^0 - 1}}{\sqrt{2}(-\alpha_1^0)^{3/2}}. \quad (35)$$

В случае чисто радиального движения, при $h = 0$, введем другие приведенные параметры

$$\bar{t}^m = t \sqrt{\frac{-2\mu_1}{r_0^3}}; \quad \bar{v}_r^m = v_r \sqrt{\frac{r_0}{-2\mu_1}}; \quad \bar{v}_{r0}^m = v_{r0} \sqrt{\frac{r_0}{-2\mu_1}}, \quad (36)$$

с учетом которых время движения в результате интегрирования получаем в виде

$$\bar{t}^m = \frac{\bar{r}\bar{v}_r^m - \bar{v}_{r0}^m}{1 - (\bar{v}_{r0}^m)^2} - \frac{1}{(1 - (\bar{v}_{r0}^m)^2)^{3/2}} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\bar{v}_r^m}{\sqrt{1 - (\bar{v}_{r0}^m)^2}} - \operatorname{arctg} \frac{\bar{v}_{r0}^m}{\sqrt{1 - (\bar{v}_{r0}^m)^2}} \right\}, \quad (37)$$

где в соответствии с (20) радиальная скорость

$$v_r = \sqrt{v_{r0}^2 + 2\mu_1/r_0 - 2\mu_1/r}. \quad (38)$$

Итак, время движения по траектории при осесимметричном взаимодействии многих тел, как и при взаимодействии двух тел, подразделяется на четыре случая движения, три из которых имеют место при наличии трансверсальной составляющей скорости: 1) гиперболический (32); 2) эллиптический (34); 3) параболический (35). Траектории при этом определяются (26) при $-0.5 < \alpha_1 < 0$, $-1 < \alpha_1 < -0.5$ и $\alpha_1 = -0.5$, соответственно. В четвертом случае радиального движения время и закон движения задаются соотношением (37), а траекторией является проходящая через центр прямая линия.

5. Конкретный пример осесимметричного взаимодействия. Если задано число n периферийных тел с массой m_i и масса центрального тела m_0 , в соответствии с (13) определяется ключевой параметр взаимодействия μ_1 . Затем согласно (25) рассчитывается параметр траектории α_1 или в соответствии с (29) α_1^0 .

Радиальная скорость вычисляется согласно (23), а трансверсальная $\bar{v} = 1/\bar{r}$. Все величины здесь нормированы к параметрам в периферии v_p и r_p . Время движения тел по траекториям определяется в соответствии с (32), (34), (35) и (38), где параметры нормированы к величинам в произвольной точке r_0 , в которой тело имеет скорость v_0 и v_0 относительно центра O (рис.2).

Движение каждого из n тел происходит при сохранении кинематического момента $h = \text{const}$. Если считать, что на рис.2 тела изображены в периферии, то линия апсид тела m_1 проходит по оси x . Апоцентр его будет расположен на отрицательных значениях оси x . Линия апсид тела m_i наклонена к оси x под углом $\varphi_{0i} = 2(i-1)\pi/n$. Уравнение траектории тела с номером i определяется выражением (26) при замене φ на φ_i . Центральное тело с массой m_0 будет неподвижно находиться в т. O .

В качестве примера рассмотрим движение четырех тел ($n=4$), которые на радиусе r_0 имеют радиальную скорость $v_{r0} = 0$, при последовательном увеличении v_{r0} от 0 до некоторого наибольшего значения. Вариации траекторий, полученные в [3] в результате численного интегрирования уравнений (3), представлены на рис.3. Покажем, что они описываются точными решениями.

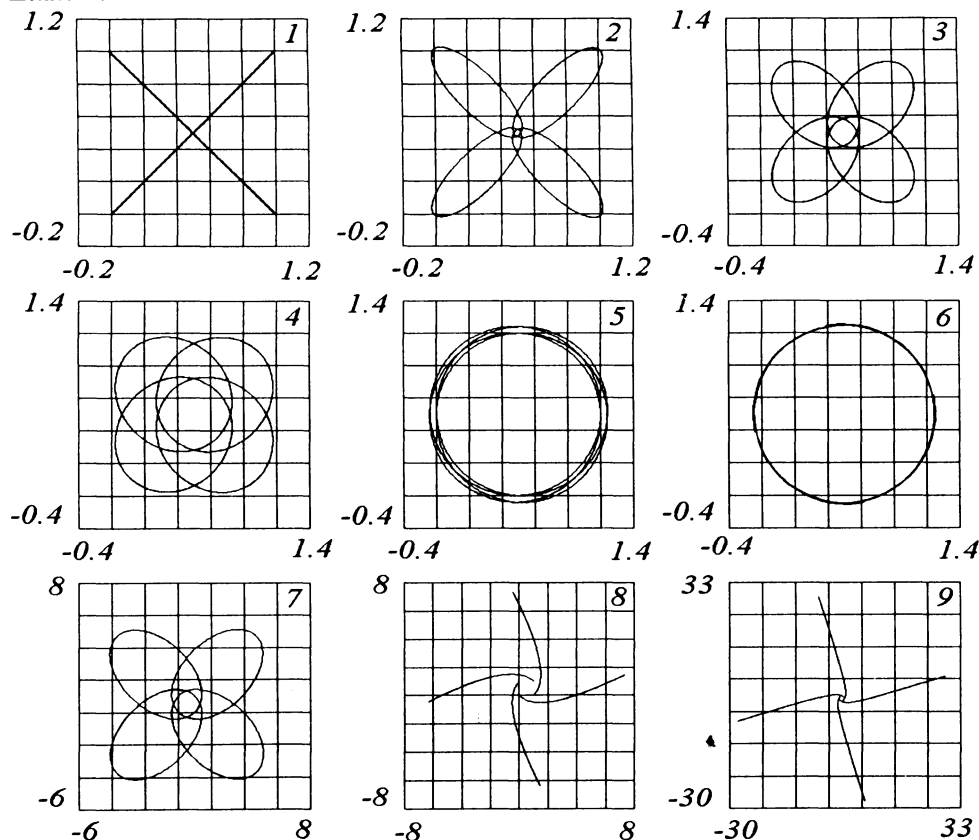


Рис.3. Траектории движения осесимметрично расположенных четырех тел при вариации начальной трансверсальной скорости v_{r0} , определяемой для случаев 2÷9 параметром α_1^0 (в скобках указан параметр траектории α_1):
 1 – $v_{r0} = 0$; 2 – -17.17 (-0.515); 3 – -3.37 (-0.587); 4 – -1.88 (-0.681); 5 – -1.058 (-0.948); 6 – -1 (-1); 7 – -0.559 (-0.559); 8 – -0.5 (-0.5); 9 – -0.47 (-0.47).

В соответствии с (8) величина $f(n) = 0.25 + \sqrt{2}/2$. Согласно (13) параметр взаимодействия $\mu_1 = -Gm_1(0.25 + \sqrt{2}/2)$, а параметр траектории $\alpha_1^0 = Gm_1(0.25 + \sqrt{2}/2)/(r_0 v_{r0})$. На рис.3 представлены траектории в декартовых координатах (ось x – горизонтальна), которые смещены относи-

тельно оси симметрии и нормированы к первоначальному расстоянию $a = \sqrt{2} r_0$ между ближайшими телами. Связь координат x, y с полярными координатами (r, φ) следующая:

$$x/a = 0.5 + (r/a) \cos \varphi; \quad y/a = 0.5 + (r/a) \sin \varphi. \quad (39)$$

Заменяя α_i на α_i^0 в соответствии с (30), выразим уравнение траектории (26) через r/a

$$r_i/a = \frac{\sqrt{2}/2}{(\alpha_i^0 + r_0/r_p) \cos(\varphi - \varphi_{0i}) - \alpha_i^0}, \quad (40)$$

где $i=1, 2, 3, 4$ – номера тел, а φ_{0i} – угол расположения линии аписид. Так как на рис.3, в отличие от рис.2, горизонтальная ось x расположена между телами, то

$$\varphi_{0i} = \pi/4 + (i-1)\pi/2. \quad (41)$$

Согласно (40) при $(\varphi - \varphi_{0i}) = 0$ частицы находятся в перигентре. При $(\varphi - \varphi_{0i}) = \pi$ частицы будут в апоцентре

$$r_a/r_0 = -\frac{1}{2\alpha_i^0 + r_0/r_p}. \quad (42)$$

При выборе в качестве начального радиуса радиус апоцентра $r_0 = r_a$ из (42) получаем выражение для радиуса перигентра

$$r_p/r_0 = -\frac{1}{2\alpha_i^0 + 1}. \quad (43)$$

Так как в точке r_0 в соответствии с (29) трансверсальная скорость $v_{t0} = \sqrt{\mu_1/(r_0\alpha_i^0)}$ определяется величиной α_i^0 при постоянных μ_1 и r_0 , то разные значения v_{t0} будем задавать вариацией α_i^0 . В случае чисто радиального движения $v_{t0}=0$ и $h=0$. Тогда радиальная скорость изменится по закону (38), а трансверсальная $v_t = h/r = 0$, т.е. все четыре тела движутся по радиальным линиям (40) начиная с $r/a = \sqrt{2}/2$ до соприкосновения в начале координат (см.рис.3,1). Закон движения, т.е. зависимость $r(t)$ определяется соотношением (37).

При небольшой трансверсальной скорости, определяемой $\alpha_i^0 = -1.17$, радиус перигентра, согласно (43) $r_p/r_0 = 0.03$, а параметр траектории $\alpha_i = -0.515$. То есть орбита будет вытянутым эллипсом. Согласно (40) при $(\varphi - \varphi_{0i}) = \pi$ частицы будут находиться в апоцентре $r_a/a = \sqrt{2}/2$, с увеличением угла $(\varphi - \varphi_{0i})$ до 2π будут двигаться к центру и достигают перигентров, как показано на рис.3,2.

При увеличении трансверсальной скорости ($\alpha_i^0 = -3.37$) тела движутся по более наполненным эллипсам и в соответствии с (43) проходят на большем расстоянии от центра $r_p = 0.174r_0$ (см.рис.3,3). Последовательное увеличение трансверсальной скорости : $\alpha_i^0 = -1.88; -1.058$ приводит к дальнейшему увеличению $r_p = 0.362r_0$ и $r_p = 0.896r_0$, т.е. уменьшается эксцентриситет орбит (см. рис.3,4 и 3,5), соответственно. И при $\alpha_i^0 = -1$ радиус перигентра, согласно (44) $r_p = r_0$, т.е. все тела движутся по окружности (см.рис.3,6) вокруг общего центра масс. Параметр траектории $\alpha_i = -1$, т.е. в этом случае совпадает с α_i^0 .

При дальнейшем увеличении скорости v_{t0} , которая соответствует $\alpha_i^0 = -0.559$, согласно (43) $r_p = 8.47r_0$. Так как $r_p > r_0$, то эта точка уже является апоцентром. Тела уже не сближаются (см. рис.3,7), а удаляются друг от друга и при $\varphi - \varphi_{0i} = \pi$ достигают апоцентра $r_a = 8.47r_0$. Как и в предыдущем случае, параметр траектории α_i^0 отнесен к начальному радиусу r_0 , который в данном случае является радиусом перигентра, поэтому α_i^0 совпадает с α_i . С увеличением v_{t0} , которая соответствует $\alpha_i^0 = \alpha_i = -0.5$, радиус апоцентра согласно (43) возрастает и стремится к бесконечности, т.е. тела движутся по параболе (см. рис.3,8). При еще большей трансверсальной скорости (см. $\alpha_i^0 = -0.47$, на рис.3,9) тела движутся по гиперболам.

Представленные на рис.3 траектории отражают всевозможные типы движения при осесимметричном взаимодействии не только четырех тел, но и любого числа n тел. При приближенном аналитическом или численном решении системы уравнений (3) эллиптические орбиты получаются незамкнутые, т.е. они поворачиваются и перицентр прецессирует. С увеличением точности счета величина прецессии уменьшается, но полностью избавиться от нее невозможно. Поэтому при приближенном решении задачи гравитационного взаимодействия тел всегда будет получаться прецессия орбит, даже в случаях, когда ее нет.

Следует отметить, что при взаимодействии наэлектризованных тел (некулоновское взаимодействие) орбиты не являются коническими сечениями и их перицентры прецессируют [3, 5] несмотря на то, что движения проходят при сохранении кинематического момента h .

Итак, осесимметричная задача n -тел сводится к задаче взаимодействия двух тел. Движение каждого из n -тел происходит по неизменной в пространстве траектории, которая принадлежит к семейству кривых конического сечения и определяется параметром α_1 . Практическое значение данной задачи заключается в возможности определения реальной погрешности вычислительных алгоритмов проблемы многих тел.

Список принятых обозначений

- F – сила воздействия на тело;
- G – гравитационная постоянная;
- $h = v_t r$ – кинематический момент количества движения;
- m – масса частицы или тела;
- n – число взаимодействующих тел;
- $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ – радиус-вектор тела относительно центра масс;
- r_p – радиус перицентра;
- $r = r/r_p$ – приведенное расстояние между телами;
- v_r, v_t – радиальная и тангенциальная скорости тел;
- v_{r0}, v_{t0} – радиальная и тангенциальная скорости тела в начальной точке r_0 ;
- $\alpha_1 = \mu_1 / (r_p v_p^2)$, – параметр траектории;
- $\alpha_1^0 = \mu_1 / (r_0 v_{t0}^2)$ – параметр траектории при отнесении к точке с радиусом r_0 ;
- ε – эксцентриситет траектории;
- $\mu_1 = -G [m_0 + m_1 f(n)]$ – константа гравитационного взаимодействия;

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Elmabsout B.* Sur l'existence de certaines configurations d'equilibre relatif dans le probleme des n corps. // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1988, v.4, №1, p.131-151.
2. *Гребеников Е.А.* Существование точных симметричных решений в плоской ньютоновской проблеме многих тел // *Математическое моделирование*, 1998, т.10, №8, с.74-80.
3. *Смульский И.И.* Теория взаимодействия. – Новосибирск: Из-во Новосибирского ун-та, ННЦ ОИГТМ СО РАН, 1999, 294 с.
4. *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике.* – Под рук. Г.Н. Дубошина. Изд. 2-е, доп. и перераб. – М.: Наука, 1976, 862 с.
5. *Смульский И.И.* Траектории при взаимодействии двух тел, зависящем от относительных расстояния и скорости // *Мат. моделирование*, 1995, т.7, №7, с. 111-125.
6. *Смульский И.И.* Электромагнитное и гравитационное воздействие (нерелятивистские трактаты). – Новосибирск: ВО "Наука". Сиб. издат. фирма, 1994, 224 с.