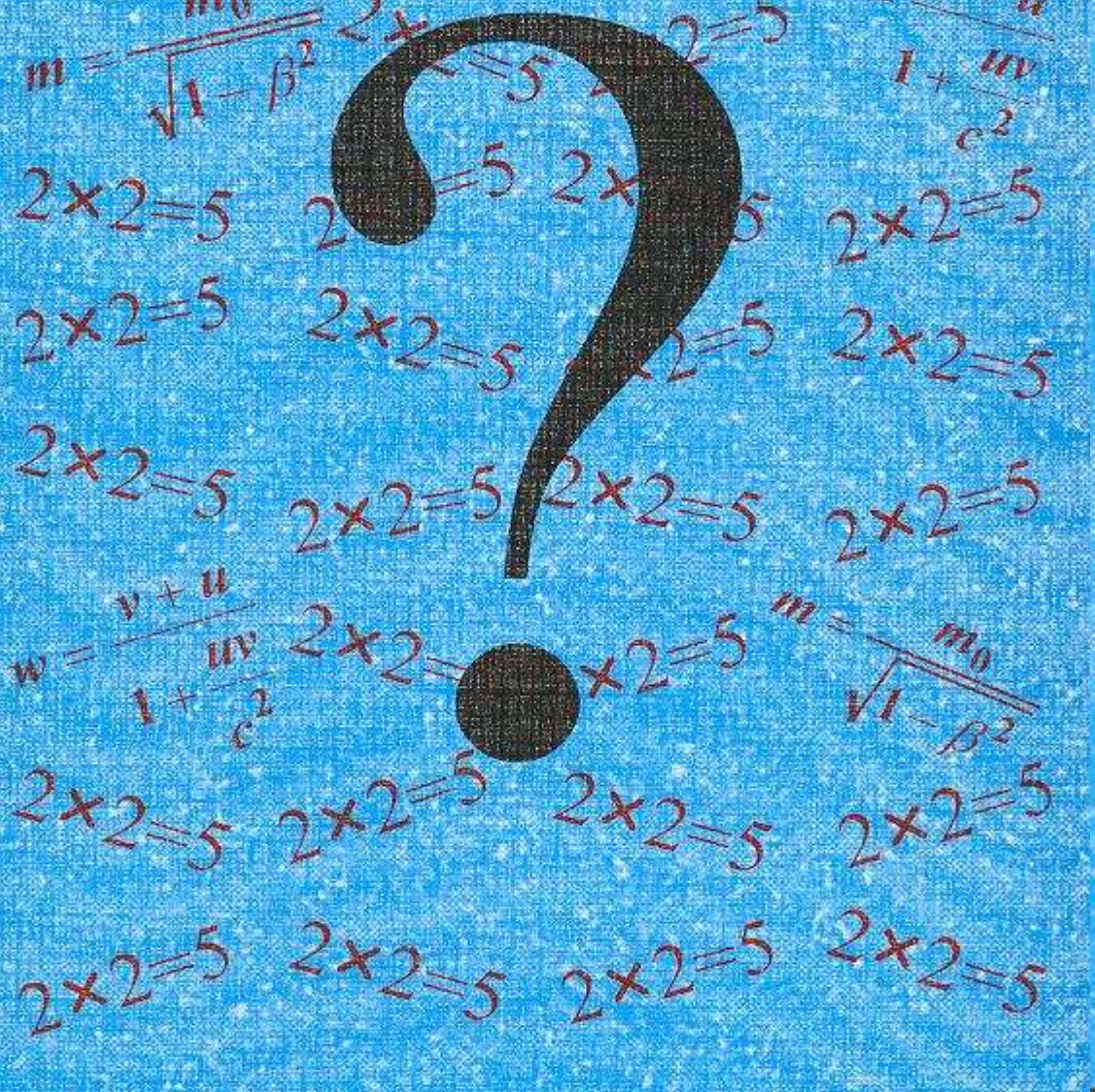
И. И. СМУЛЬСКИЙ

ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ



Из этой книги
Вы узнаете:

- Из чего состоит все
- Что есть истина
- Что такое время
- Как взаимодействуют тела
- Как движутся элементарные частицы
- Прав ли А.Эйнштейн
- Как рассчитывать ускорители частиц
- Есть ли эфир
- Какой мы видим движущуюся звезду
- Как войти в "черную дыру" и выйти из нее
- Можно ли двигаться со сверхсветовой скоростью
- Как за 5 лет достигнуть звезд и вернуться на Землю
- Какова скорость тяготения
- По каким законам движется Меркурий
- Как точно рассчитать движение многих тел

Искателям истины XX века
посвящается

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ КРИОСФЕРЫ ЗЕМЛИ

И.И. СМУЛЬСКИЙ

ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук
С. П. Габуда

В текст внесены правки 08.04.25 г.

Новосибирск
ИЗДАТЕЛЬСТВО НОВОСИБИРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
НИЦ ОИГГМ СО РАН
1999

УДК 530.12: 531.18; 537.8
ББК 22.313
С52

Теория взаимодействия / И.И. Смульский. – Новосибирск: Из-во Новосиб. Ун-та, НИЦ ОИГГМ СО РАН, 1999 г. – 294 с.
ISBN 5–76150264–2

В монографии обоснован способ расчета электромагнитных и гравитационных взаимодействий движущихся тел, в котором пространство время и масса от движения не зависят. Проанализированы и определены основные понятия механики. Из экспериментальных законов выведены основные уравнения электродинамики, в результате решения которых установлена сила взаимодействия двух тел и получены траектории их движения. Рассчитаны силы воздействия тел разной формы и приведены методы расчета ускорителей элементарных частиц. Рассмотрены границы применимости теории относительности и представлены световые явления при движении приемника и источника. Исследованы взаимодействия двух тел при околосветовых скоростях. Проанализированы результаты современных наблюдений сверхсветовых движений, представлены методы получения сверхсветовых частиц и показаны перспективы их использования в противоастероидной защите Земли и для межзвездных перелетов. Рассмотрены вопросы скорости распространения тяготения, прецессии перигелия Меркурия, аккреции вещества и энергетики Солнца. Представлена проблема многих тел и для частных случаев получено точное ее решение.

Книга будет полезна любознательным старшеклассникам, студентам, преподавателям физики и специалистам.

Ил. 59. Библиогр.: 128 назв.

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор *В.Ф. Новиков*
доктор физико-математических наук *А.В. Шавлов*

Утверждено к печати ученым советом
Института криосферы Земли СО РАН

Научное издание
Смульский Иосиф Иосифович
ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Книга издается в авторской редакции
Оформление обложки: Смульский Л. И.

© И.И. Смульский, 1999

ISBN 5–76150264–2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ……..……8

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ…..……..14

ГЛАВА 1
ОКРУЖАЮЩИЙ МИР И ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЕГО ОПИСАНИЯ……...…..18

1.1. Физическая теория и описание природы.…….……–
1.2. Окружающий мир и его описание.…….……..19
1.3. Изменение объектов окружающего мира и время как его мера...……...…….19
1.4. Величина объектов и ее мера.……...21
1.5. Безгипотезное описание окружающего мира.……...…...22

ГЛАВА 2
ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕХАНИКИ…….…..24

2.1. Движение объектов и его меры.……..…..–
2.2. Воздействие и его описание.……..…..25
2.3. Определение силы воздействия на тело и его движение……...……..28
2.4. О зависимости силы от ускорения.……...30
2.5. Сила и энергия.……...…...35

ГЛАВА 3
ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОПИСАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ЗАРЯЖЕННЫХ И НАМАГНИЧЕННЫХ ТЕЛ…...…..38

3.1. Взаимодействие неподвижных наэлектризованных тел.……..……..……–
3.2. Проблемы описания взаимодействий движущихся заряженных тел.……..40
3.3. Изменение силы воздействия при движении заряженного тела и магнита...……42
3.4. Вывод уравнений Максвелла из экспериментальных оснований……...…..45
3.5. Дифференциальные уравнения для сил.……...…..50

ГЛАВА 4
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ТОЧЕЧНЫХ ТЕЛ……52

4.1. Уравнение Даламбера для точечного заряда.……..……–
4.2. Решение уравнения Даламбера.……..54

4.3. Сила взаимодействия двух тел.……..…...64
4.4. Закон относительного движения двух объектов.…….……66
4.5. Интегрирование закона движения.……..……68
4.6. Переход к классической и релятивистской механике.…….……..…...73

ГЛАВА 5
ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ДВУХ ТЕЛ…….……..…….……78

5.1. Классические траектории..…….……..–
5.2. Время движения по траектории..…….……...…...80
5.3. Траектории при конечной скорости распространения воздействия.…..……84
5.4. Гиперболовидные траектории.……...…...85
5.5. Параболовидные и эллипсовидные траектории..…….……...…..90
5.6. Траектории при отталкивании и полный период траекторий..……..…..93
5.7. Асимптотические решения.…….……..…...96

ГЛАВА 6
СИЛЫ ВОЗДЕЙСТВИЯ РАЗЛИЧНЫХ ТЕЛ НА ДВИЖУЩУЮСЯ ЗАРЯЖЕННУЮ ЧАСТИЦУ…….……..99

6.1. Воздействие заряженной прямоугольной пластины на частицу.…….……–
6.2. Скорость движения частицы в конденсаторе..…….……104
6.3. Сила воздействия заряженной нити и скорость частицы..……...…107
6.4. Сила воздействия движущейся заряженной частицы на магнит.……...110
6.5. Сила воздействия точечного магнита на заряженную частицу.……111
6.6. Сила воздействия проводника с током на заряженную частицу..……..112
6.7. Упрощенные силы без учета формы воздействующих тел..……..…116

ГЛАВА 7
ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СИЛ ДЛЯ РАСЧЕТА РАЗНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ…….……..….119

7.1. Энергия зависящего от скорости взаимодействия.……..……..…..–
7.2. Новые интегралы движения..……...…122
7.3. Метод суммирования скоростей……...…124
7.4. Расчет движения частиц в ускорителях.……...…131
7.5. Расчет результатов опыта Бухерера.……..….136

ГЛАВА 8
МЕТОД СИЛ И РЕЛЯТИВИСТСКИЙ МЕТОД…….…..140

8.1. Эфир, теория относительности и преобразования Лоренца……..…..–
8.2. Сущность преобразований……...…143
8.3. Описание воздействия движущейся нестационарной системы тел с помощью преобразований……..……..…..148
8.4. О преобразовании волнового уравнения……..……...…..153
8.5. Аберрация и эффект Доплера……158
8.6. Скорость света между движущимися телами……...…161

8.7. Принцип относительности и его значение……..…165

ГЛАВА 9
ОКОЛОСВЕТОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ВНУТРИ "ЧЕРНЫХ ДЫР"….167

9.1. Понятие "черной дыры" как соотношение параметров…….…..–
9.2. Объекты микро- и макромира как "черные дыры"..…….…...…169
9.3. Траектории при вариации радиальной скорости……...…171
9.4. Траектории при разных трансверсальных скоростях...…….……..…...…173
9.5. Траектории при изменении параметра воздействия……...…174
9.6. Многоугольные орбиты..……...……176

ГЛАВА 10
СВЕРХСВЕТОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ……..….178

10.1. Примеры сверхсветовых движений……...……–
10.2. Наблюдение и взаимодействие при сверхсветовой скорости……...183
10.3. Ускорение сгустков частиц до сверхсветовой скорости…….……...…188
10.4. Многоступенчатые ускорители сверхсветовых частиц…….……..……...…191
10.5. Ускорение одиночных частиц до сверхсветовой скорости……..…192
10.6. Перспективы применения сверхсветовых движений……..…..195

ГЛАВА 11
ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ……...……...…199

11.1. Скорость распространения тяготения…….…...…..–
11.2. Прецессия перигелия Меркурия……...…204
11.3. Взаимодействие многих тел…….……...….210
11.4. Точное решение осесимметричной плоской задачи n-тел…….…….220
11.5. Траектории движения при взаимодействии нескольких тел……...223
11.6. Центрально-симметрическая аккреция……...…229

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ……...…240

ПОСЛЕСЛОВИЕ…….……..…244

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ……..…….247

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Программа в среде MATHCAD интегрирования уравнений движения для эллипсовидных орбит.……..……...…..253

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Исходные параметры траекторий и значения в конечных расчетных точках……..……...…255

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Программа в среде MATHCAD интегрирования уравнений околосветового движения частицы……...…261

ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Траектории движения внутри «черных дыр»……..263

ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Приведенные периоды орбит и их радиусы перицентриев…..……293

Все состоит из двух:
окружающий мир и его понимание.

Автор *1998 г.*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современные представления о микро- и макромире основаны на теории относительности (ТО). С момента ее возникновения и до нынешнего времени не исчезло критическое отношение к ней. Не принимали ТО полностью или частично такие известные ученые, как академики: А.Н. Крылов [25], С.И. Вавилов [9], В.Ф. Миткевич [37], венгерский академик Л. Яноши [78, 79], профессоры О.Д. Хвольсон, Н.П. Кастерин, К.Н. Шапошников [74], А.К. Тимирязев, Т.А. Лебедев, С.А. Базилевский, А.А. Тяпкин [67] и многие другие.

Работы с критикой ТО практически не публиковались и тем более не переиздавались. По имеющимся редким сведениям можно составить следующее представление об их развитии. В конце 50-х годов австралиец Ж. Билдер [87] рассмотрел связь теорий эфира с ТО. В 60-е годы были опубликованы критические работы минского философа А.К. Манеева [34] и челябинского физика Г.Д. Ломакина [29, 30]. Эти ученые, а также С.А. Базилевский, А.К. Шурупов, А.Г. Замятин и другие организовали научно-физический кружок им. М.В. Ломоносова, который издавал рукописный журнал одноименного названия. Это следует отметить как первый этап.

В конце 60-х годов американец Брайон Ж. Уоллес [122] показал возможность суммирования скорости радиоволн со скоростью Земли относительно Венеры. Работу Б.Ж. Уоллеса, основанную на данных наблюдений, можно отметить как второй важный этап в развитии нерелятивистского направления в физике. Она оказала последующим противникам ТО моральную поддержку.

Третьим этапом является публикация в 1984 г. книги проф. В.В. Чешева [69], в которой с большой очевидностью показана несовместимость теории относительности с реальной действительностью.

Конец 80-х – начало 90-х годов нынешнего столетия ознаменовался бурным развитием работ с критикой ТО как специальной (СТО), так и общей (ОТО). Зревшее десятилетиями неприятие ее многими представителями науки и техники, чья деятельность не разрывалась с практикой, постепенно накапливалось в неопубликованных статьях, трактатах и книгах. Перестройка в СССР стала спусковым механизмом обнародования этих работ в популярной

печати, в новых научных журналах и на многих национальных и международных конференциях, проводимых в разных странах. Начались они с публикации брошюры В.И. Секерина [47] и продолжались в научно-популярных журналах [4, 11], кооперативно-издаваемых брошюрах [14] и даже газетах [17, 41, 42, 48, 57, 61, 70].

Брошюру В.И. Секерина следует рассматривать как четвертый этап развития антирелятивисткого движения. В ней с большой убежденностью и выразительностью были показаны недостатки и противоречия ТО. Большое воздействие на общественное мнение оказала также брошюра профессора и народного депутата СССР А.А. Денисова [14]. Благодаря ей широкой общественности стало известно, что имеются ученые, которые не признают ТО как вершину человеческой мудрости.

Каждый день мы узнаем имена ученых из разных стран, стоящих в оппозиции к теории относительности, которые раньше были неизвестны научному сообществу. Рассматриваются разные стороны проблемы. Анализу пространственно-временных преобразований посвящены работы [41, 43, 79, 87, 92, 103], в других [6, 51, 66] рассмотрены парадоксы ТО. Серьезный критический анализ теории относительности представлен в работах Ли Кое (США) [100], Шю Саоци и Шю Кзианг-Кун (КНР) [127, 128], С.Х.К. Кзовусу (Нигерия) [126] и многих других [8, 11, 13, 14, 44, 89, 93, 95, 104, 105, 109]. Основываясь на классических законах механики и физики, Томас .Е. Фиппс, мл. [107] и Дж.П. Уэсли [125] рассматривают взаимодействия тел и явления распространения света в движущихся телах; Д.Л. Бергман [85] разрабатывает модели элементарных частиц; Ф.М. Канарев [20] выводит постулаты квантовой механики и аксиомы пространственно-временных отношений; Ч.У. Лукес, мл. [102] определяет периодические свойства элементов; В.И. Сухоруков с коллегами аналитически выводит спектры первых десяти элементов [63] и т.д. В этих работах используются классические представления о пространстве, времени и массе, которые не зависят от движения.

В 1994 г. опубликована наша монография [59], в которой проанализированы основы теории относительности, выявлены главные ее недостатки и предложен новый метод описания взаимодействий, основанный на классических представлениях о пространстве, времени и массе. Эта работа была встречена диссидентами-физиками с единодушным одобрением. Многие сторонники ТО обратили на нее внимание. Ее нельзя было отбросить, сославшись на непрофессиональность автора. Поэтому выход книги в академическом издании можно расценивать как пятый этап становления новой физики.

В 1997 г. вышла из печати монография профессора университета штата Западная Вирджиния О.Д.Ефименко [98], в которой все релятивистские соотношения он в рамках классической механики и электродинамики выводит исходя из запаздывания полей при относительном движении взаимодействующих объектов. Этот метод восходит к работам Оливера Хэвисайда [94].

В конце XIX в. стало ясно, что взаимодействие заряженных тел зависит от их движения. Г.А. Лоренц выдвинул гипотезу, согласно которой тела при

движении изменяют свои размеры, что приводит к изменению силы взаимодействия. Это обосновывалось представлениями об эфире. Частицы вещества, якобы состоящие из эфира, при движении в нем могут изменять свои размеры. Однако взаимодействие двух тел зависело не от какой-то абсолютной скорости, а от скорости их движения по отношению друг к другу. А. Эйнштейну пришлось видоизменить гипотезу Г.А. Лоренца, и в итоге было построено описание взаимодействий движущихся тел в виде взаимодействий неподвижных тел, параметры которых (пространство, время и масса) изменяются по Лоренцовым преобразованиям. Это первая линия развития электродинамики, на которой построена современная физика.

Вторая линия основывалась на конечной скорости распространения воздействия. Вследствие этого взаимодействие двух тел, движущихся относительно друг друга, не равно взаимодействию неподвижных тел при тех же расстояниях между ними. Полагается, что поля, выражающие это воздействие, запаздывают. Если поля, описывающие взаимодействие неподвижных тел, сдвинуть на промежуток времени, необходимый для распространения воздействия между телами, то они будут выражать взаимодействие относительно движущихся тел. Оливер Хэвисайд получил выражения для напряженностей полей при электромагнитном взаимодействии тел и распространил их на гравитационные взаимодействия. Эту линию продолжил О.Д.Ефименко [97, 98]. Метод запаздывающих полей полностью может заменить СТО и ОТО. Выход книги [98] можно считать шестым этапом в развитии нерелятивистской физики.

В отличие от первых двух методов мы разрабатывали метод, который полностью находится в рамках механики. В результате анализа развития электромагнетизма мы пришли к выводу, что сила взаимодействия движущихся друг относительно друга наэлектризованных или намагниченных тел зависит не только от расстояния между ними, но и от их относительной скорости. Выражение для силы мы получили, основываясь на экспериментальных законах электромагнетизма. Данный метод мы распространили на разные случаи. Решено им ряд новых задач, получены новые результаты, которые показывают, что наш мир устроен не совсем так, как следовало из физики, основанной на ТО. Этот метод готов к применению и его изложению посвящена настоящая книга.

Теория относительности оказала глубокое воздействие на наше мироопонимание, мировоззрение и основы знаний. В неоднократных дискуссиях со сторонниками ТО приходилось не раз слышать, что релятивистский закон сложения скоростей является совершенным, а простое суммирование скоростей в классической механике является приближенным и справедливым для малых скоростей. Когда же мы показывали, что классическое сложение скоростей идентично арифметическому действию 2 + 2 = 4, а релятивистское эквивалентно 2 + 2 = 5, нам отвечали примерно таким образом. Как первый закон сложения, так и второй являются гипотетическими, но релятивистский закон сложения скоростей подтвержден экспериментально, поэтому он верен.

Пространство искривляется и замыкается само на себя. Масса превращается в энергию. Путешествие по времени: в будущее и прошлое. Время превращается в недрах звезд в материю. Все это не из научно-фантастических романов. Это темы фундаментальных исследований. Перед нами встала сложная задача осмысления основ наших знаний. Нужно было выяснить, можно ли с пространством, временем, скоростью, массой, силой, энергией и др. совершать вышеприведенные манипуляции? Что в нашем знании является произвольной гипотезой? И есть ли то, что является незыблемым и вечным?

Наше понимание этих проблем мы предлагаем здесь пытливому читателю. Оно далеко до совершенства и требует осторожного к себе отношения. Опрометчивому советуем не отвергать его сходу, вдумчивому – пытаться найти недостатки и устранить их. Только в таком случае наше знание от поколения к поколению будет совершенствоваться и упрощаться.

Итак, в первой главе рассмотрены основы наших знаний. Все, что нас окружает мы разделили на две части: окружающий мир и его восприятие, понимание, т.е. описание. Мы пришли к выводу, что в рамках известного разделения на материю и сознание решить проблемы, которые перед нами возникли, невозможно. В этой главе мы пытаемся понять, что такое пространство и время. Оказывается, это результат сопоставления свойств предметов – их величины и изменчивости со свойствами эталонных тел. Мы приходим к выводу, что единственные надежные знания – это те, которые мы получили в результате выражения разных свойств предметов через соответствующие свойства эталонных тел. В этом – основная суть безгипотезного описания окружающего мира.

Во второй главе рассмотрены понятия механики: скорость, ускорение, воздействие, сила. Показано, что законы механики есть не что иное как наш способ описания взаимодействий. В природе объективно существует взаимодействие между телами. Оно проявляется в ускорении тел. Взаимодействие мы описываем с помощью силы. Поэтому ускорение и сила – это одно и то же с точностью до коэффициента. Мы приводим доказательства того, что другой зависимости силы от ускорения не может быть.

В третьей главе показано, что взаимодействие между движущимися заряженными телами зависит от скорости. Из экспериментальных оснований выведены дифференциальные уравнения для силы.

В четвертой главе эти уравнения решены для взаимодействия двух точечных тел и получены выражения для силы взаимодействия двух тел, движущихся друг относительно друга. Закон силы проверен в разных предельных случаях.

В пятой главе рассмотрено движение двух взаимодействующих тел. Рассчитаны скорости, время движения и траектории тел. Задачи решаются аналитическими и численными методами.

В шестой главе исследуется воздействие заряженных и намагниченных тел разной формы на движущуюся частицу. Показано как применять метод, если задана только электрическая и магнитная напряженности.

В седьмой главе метод сил принимается для расчета разных взаимодействий, в том числе и для расчета ускорителей элементарных частиц. Здесь также продемонстрированы необычные возможности метода, которые в ряде случаев позволяют решать задачи, не поддающиеся решению другими методами.

В восьмой главе рассмотрено взаимоотношение метода сил с методом теории относительности. Рассчитаны световые явления между движущими телами. Получено выражение для скорости света при относительном движении источника и приемника.

Параметры взаимодействующих объектов могут быть таковы, что в перицентрии скорость движения приближается к световой. Такие взаимодействия могут наблюдаться в микромире. В девятой главе представлены траектории этих движений.

Десятая глава посвящена сверхсветовым движениям. Они наблюдаются в далеком космосе, при вхождении космических частиц в атмосферу Земли и на Земле. Проанализирован процесс наблюдения сверхсветового объекта и исследовано его воздействие. Много внимания уделено ускорению элементарных частиц до сверхсветовой скорости и рассмотрены перспективы применения сверхсветовых движений.

В одиннадцатой главе исследуются гравитационные воздействия. Показано, что отсутствуют основания считать скорость распространения тяготения конечной. Изложен алгоритм численного решения задачи многих тел. Точно решена осесимметричная задача многих тел и ее результаты сопоставлены с численными решениями при взаимодействии трех и четырех тел. Решена задача центрально-симметричной аккреции вещества и рассмотрены проблемы энергетики Солнца.

В конце монографии даны определения основных понятий, программы решения задач и некоторые результаты численных решений.

Сформулированные выше этапы развития нерелятивистской физики являются субъективными и весьма условными. Следует отметить влияние конференций, новых научных журналов, зарождающихся обществ и отдельных ученых в разных странах. Например, большой отклик получило выступление в 80-е годы против ТО группы ученых из Пулковской обсерватории. Их деятельность, в том числе С.А. Толчельниковой, а также других ученых из г. Санкт-Петербурга П.Ф. Паршина, М.П. Варина и др. в организации и проведении Международных научных конференций играет большую роль в антирелятивистском движении. Благодаря Рою Кейзу, издателю журнала "Apeiron", проф. Петру Беккману, создателю журнала "Galilean Electrodynamics", доктору Е. Панарелле, редактору "Physics Essays", в последнее десятилетие нерелятивистские работы публикуются.

С 1994 г. совместно с Юго-Западным отделением Американского общества развития науки проводят свои ежегодные конференции диссиденты-физики, входящие в Альянс натуральной философии, который возглавляется доктором Джоном Е. Чаппеллем. Следует отметить аргументированную критику ТО китайским физиком Шю Саоци, с которой в последние годы он вы-

ступает на страницах ряда международных журналов. По имеющимся скупым сведениям опубликованы статьи и книги с критикой ТО ряда зарубежных ученых, как неизвестных, так и известных, в том числе проф. Л. Эссена.

Многие ученые, в том числе Брайон Ж. Уоллес, А.К. Манеев, Петр Бекманн, Стефан Маринов, В.И.Секерин и др., претерпевали притеснения и гонения за свои антирелятивистские взгляды. В последние годы некоторые из них ушли из жизни: проф. С.А.Базилевский, проф. Ричард А. Валдрон, Ли Кое, проф. Петр Беккман, канд. физ.-мат. наук Г.Д. Ломакин, канд. техн. наук А.Г. Замятин, доктор Тойво Яакола, Брайон Ж. Уоллес, Стефан Маринов. Не каждому из них удалось постичь истину, но все они ее искали, отдаваясь этому до конца. Им, искателям истины, мы и посвящаем настоящую книгу.

В заключение выражаю признательность проф. Л. Эссену, Рою Кейзу, Е. Панарелле, Олегу Д. Ефименко, доктору Девиду Л. Бергману, проф. Умберто Бартоцци за улучшения текста моих статей, способствующие их публикации на английском языке. Переписка с проф. Андре К.Т. Ассисом, Девидом Л. Бергманом, проф. А.Д. Власовым, доктором Джоржом Галецки, Олегом Д. Ефименко, Миллениумом Твейном, канд. физ.-мат. наук Л.А. Победоносцевым, канд. техн. наук Г.И. Сухоруковым, Робертом Дж. Хенноном, Шю Саоци и многими другими укрепляла уверенность в своих выводах и была источником информации и новых мыслей, за что я благодарен перечисленным ученым.

Особую благодарность хочется выразить своим коллегам П.А. Апасеву и О.И. Кротову за помощь в работе над книгой, О.С. Гуль за подготовку рукописи, Л.И. Смульскому за помощь в разработке программ и в компьютерном обслуживании.

Работа над книгой была бы невозможна без благожелательного отношения к ней директора института В.П. Мельникова, за что я ему сердечно признателен.

Все замечания и пожелания просьба направлять по адресу:

625026, Тюмень, ул. Малыгина, 86, Институт криосферы Земли ТюмНЦ СО РАН,
E-mail: jsmulsky@mail.ru

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

A – работа;
a – полуось эллиптической орбиты;

$c, c_1 = c/\sqrt{\mu\varepsilon}$; – скорость света в вакууме и среде;

E – электрическая напряженность;
E_f – полная энергия;
E_c – кинетическая энергия;
E_t – тепловая энергия;
e – заряд электрона;
F – сила воздействия на тело другого тела;
G – гравитационная постоянная;
H – магнитная напряженность;
$h = v_t R$ – кинематический момент количества движения;
I – величина тока;
m – масса частицы или тела;
m_0 – начальная масса объекта с переменной массой;

$m_{re} = 2\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – приведенная масса двух взаимодействующих объектов;

M – магнитный заряд;
q – электрический заряд;
$\vec{r} = i\vec{x} + j\vec{y} + k\vec{z}$ – радиус-вектор точки или частицы;

$\vec{r}_1, \vec{r}_2$ – радиус-векторы двух взаимодействующих объектов;

$\vec{R} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ - относительный радиус-вектор между двумя взаимодействующими объектами;

$R_v = \sqrt{R^2 - \left[\vec{\beta} \times \vec{R}\right]^2}$;

$R_g = -2\mu_1 / c_1^2$ – "гравитационный" или световой радиус;

R_a – радиус апоцентрия: максимальное расстояние между взаимодействующими объектами;
R_p – радиус перицентрия: минимальное расстояние между

взаимодействующими объектами;

$\overline{R} = R/R_p$ или $\overline{R} = R/R_0$ – приведенное расстояние между частицами;

T – временной период движения по траектории;

$T_{0.5}$ – временной полупериод движения по траектории;

$\vec{\upsilon} = \vec{i}\,\upsilon_x + \vec{j}\upsilon_y + \vec{k}\upsilon_z$; υ – скорость движения частицы;

υ_r, υ_t – радиальная и трансверсальная скорости частицы;

$\upsilon_{r0}, \upsilon_{t0}$ – радиальная и трансверсальная скорости частицы в точке R_0;

υ_p – трансверсальная скорость частицы в перицентрии;

$\overline{\upsilon}_r = \upsilon_r/\upsilon_p$; $\overline{\upsilon}_r^0 = \upsilon_r/\upsilon_{t0}$ – приведенные радиальные скорости;

υ_R – скорость приемника излучения;

υ_S – скорость источника излучения;

w – ускорение частицы или тела;

$w_p = \dfrac{4q_1q_2}{\varepsilon m S}$;

x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}, u_{ijk}, υ_{ijk}, w_{ijk}, $\dot{u}_{ijk}$, $\dot{\upsilon}_{ijk}$, $\dot{w}_{ijk}$ – проекции координат, скорости и ускорения частицы с номером i, j, k.

$\alpha = \dfrac{2\mu_1}{R_p c_1^2} = -\dfrac{R_g}{R_p}$ – параметр взаимодействия;

$\alpha_1 = \mu_1/\left(R_p\upsilon_p^2\right)$, – параметр траектории;

$\alpha_1^0 = \mu_1/\left(R_0\upsilon_{t0}^2\right)$ – параметр траектории при отнесении к произвольной точке с радиусом R_0;

$\vec{\beta}_{\text{o}} = \vec{\upsilon}/c$; $\vec{\beta} = \vec{\upsilon}/c_1$; $\beta_x = \upsilon_x/c_1$; $\beta_y = \upsilon_y/c_1$; $\beta_z = \upsilon_z/c_1$; $\beta_{t0} = \upsilon_{t0}/c_1$;

$\beta_{r0} = \upsilon_{r0}/c_1$ – скорость частицы по отношению к скорости света;

$\gamma_x = \sqrt{1-\beta_y^2-\beta_z^2}$; $\gamma_y = \sqrt{1-\beta_x^2-\beta_z^2}$; $\gamma_z = \sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2}$;

ε – диэлектрическая проницаемость среды;

ε_t – эксцентриситет траектории;

μ – магнитная проницаемость среды;

$\mu_1 = \dfrac{q_1q_2(m_1+m_2)}{\varepsilon m_1 m_2}$ либо $\mu_1 = -G(m_1+m_2)$ – константы электромагнитного либо гравитационного взаимодействия;

ρ – плотность электрического заряда;

$\sigma = \dfrac{q_2}{4ab}$ – поверхностная плотность заряда пластины;

Φ – магнитный поток;

φ_T – угловой период траектории;

φ_a – угловой период эллипсовидной или конечной траектории, т.е. угловое расстояние от перицентрия до апоцентрия; либо полуугол между асимптотами для гиперболовидных траекторий, отсчитываемый за стрелкой часов от отрицательного положения оси x;

φ_P – полный угловой период конечной траектории, при котором частица возвращается в одну и ту же точку пространства с неизменной скоростью.

Дифференциальные операторы:

$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\dfrac{\partial}{\partial z}$;

$\Delta = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа;

$\Box = \Delta - \dfrac{1}{c_i^2}\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ – оператор Даламбера, где $c_i = c$ либо $c_i = c_1$;

$\text{grad}\, u = \vec{\nabla} u$;

$\text{div}\ \vec{A} = \vec{\nabla}\vec{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$;

$\text{rot}\,\vec{A} = \text{curl}\,\vec{A} = [\vec{\nabla}\times\vec{A}] = \vec{i}\left[\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right] + \vec{j}\left[\dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right] + \vec{k}\left[\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right]$;

$\text{div grad}\, u = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla} u\right) = \Delta u$;

$\text{grad div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\vec{A}\right) = \Delta\vec{A} + [\vec{\nabla}\times[\vec{\nabla}\times\vec{A}]]$;

$\text{rot rot}\ \vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\vec{A}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{A}$.

Интегральные теоремы [24]

$\oint\limits_S \vec{A}(r)\mathbf{d}\vec{S} = \int\limits_V \vec{\nabla}\vec{A}(r)\mathbf{d}V$ – теорема Гаусса-Остроградского;

$\int\limits_S [\vec{A}(r)\times\mathbf{d}\vec{S}] = -\int\limits_V [\vec{\nabla}\times\vec{A}(r)]\mathbf{d}V$;

$\int\limits_S u(r)\mathbf{d}\vec{S} = \int\limits_V \vec{\nabla} u(r)\mathbf{d}V$;

$\oint \vec{A}(r)\mathbf{d}\vec{l} = \int\limits_S [\vec{\nabla}\times\vec{A}(r)]\mathbf{d}\vec{S}$ – теорема Стокса.

Использованные константы

$c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с – скорость света;

$m_{pr} = 1.672 \cdot 10^{-24}$ г – масса протона;

$m_e = m_{po} = 9.1095 \cdot 10^{-28}$ г – масса электрона и позитрона;

$e = 4.8 \cdot 10^{-10} \text{см}^{1.5} \text{г}^{0.5} / \text{с}$ – заряд электрона;

$R_{po} = 1.4 \cdot 10^{-13}$ см – радиус позитрона;

$R_{pr} = 2.817 \cdot 10^{-13}$ см – радиус протона;

$G = 6.67259 \cdot 10^{-11}$ м$^3/(\text{с}^2 \cdot \text{кг})$ – гравитационная постоянная;

$m_S = 1.97 \cdot 10^{30}$ кг – масса Солнца;

$m_E = 5.96 \cdot 10^{24}$ кг – масса Земли;

$R_S = 6.95 \cdot 10^{8}$ м – радиус Солнца;

$r_E = 1 \text{ а. е.} = 1.496 \cdot 10^{11}$ м – среднее расстояние Земли от Солнца;

$R_E = 6.372 \cdot 10^{6}$ м – средний радиус Земли;

$a_{pl} = 39.52$ а.е. – большая полуось Плутона;

$r_{\alpha C} = 2.31 \cdot 10^{16}$ м – расстояние до ближайшей звезды α–Центавра.

Параметры орбиты Меркурия:

$a = 0.387$ а.е.; $e = 0.206$; $T = 0.204$ года; $i = 7^o 0.2'$.

ГЛАВА 1

ОКРУЖАЮЩИЙ МИР И ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЕГО ОПИСАНИЯ

1.1. ФИЗИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ И ОПИСАНИЕ ПРИРОДЫ

Настоящая книга посвящена теории взаимодействия. Что такое теория? Есть теории корабля, самолета, слесарного дела и есть физическая теория, например теория относительности, квантовая теория. В первых трех теориях описываются принципы и методы выполнения работы: постройка корабля, самолета, изготовление деталей, сборка изделий. Эти теории отличаются от практики тем, что они используются в последней. Например, строится самолет, корабль или слесарь берет напильник и в соответствии с теорией опиливает им деталь.

А что такое сегодня физическая теория? Это нечто иное. В физической теории принимаются исходные гипотезы (положения, принципы) и на них строится картина мира. Так, в теории относительности (ТО) на основании принципа относительности и принципа предельной скорости построен мир, в котором пространство, время и масса зависят от относительной скорости движения. Дополнение этих принципов гипотезой о световой скорости тяготения и замена алгебраической математики на геометрическую привело к общей теории относительности, в которой мир является искривленным четырехмерным пространством-временем. Таким образом, процесс развития физической теории является процессом создания мира.

Итак, существует две разновидности теории, два способа ее понимания. Одна – это описание рассматриваемых объектов: свойств природы, приемов и методов человеческой деятельности и т.д., а другая – процесс творения мира. Под теорией взаимодействия мы будем понимать первый вид теории. В ней будут описываться методы расчета взаимодействий. Традиционно эти вопросы рассматривались механикой. С появлением электродинамики, ТО, ядерной физики, теории элементарных частиц, квантовой механики, и других областей современной физики взаимодействия стали предметом исследования новых наук и вышли за рамки механики. В дальнейшем они должны вернуться в ее лоно. На данном этапе целесообразно определить всю область взаимодействий в виде отдельной науки – теории взаимодействия, подчеркивая ее общность в разных разделах физики.

Наука, в частности физика, развивалась не по заранее написанному сценарию. В ней одновременно существуют различные взгляды, различные

подходы и приемы, которые иногда даже взаимно противоположны. Следовательно, имеются разные взгляды на теорию и тем самым на саму науку. Являясь сторонниками одного из них, мы не будем приводить необходимые и достаточные доказательства ошибочности других. Но отдельное обоснование нашего выбора попытаемся здесь изложить.

1.2. ОКРУЖАЮЩИЙ МИР И ЕГО ОПИСАНИЕ

Все, что нас окружает и с чем мы постоянно имеем дело, можно разделить на две области. Первая – это окружающий мир, который не зависит от наших рассуждений: небо, звезды, деревья, наш дом, предметы в нем и т.д. Вторая область – это описание окружающего мира, его отражение в наших умах, его понимание. Оно содержится в книгах, изучается в школе, имеется в нашем сознании. Если окружающий мир мы своими рассуждениями изменить не можем, то наше понимание мира постоянно меняется. Например, раньше человек представлял, что Земля является центром Вселенной и небосвод вращается вокруг Земли. Сейчас мы знаем, что Земля вращается вокруг своей оси, обращается вокруг Солнца, Солнце совершает движение вокруг центра Галактики, а последняя совершает движение при взаимодействии с другими галактиками. Однако существует масса других представлений, которые наши потомки сочтут заблуждениями, и понимание мира коренным образом изменится. Кроме того меняются даже способы представления мира. Так, если в древности мир представлялся в виде понятных образов: богов, стихий, земли, огня, эфира, и т.п., то сейчас он представляется в виде математических объектов: волновых функций, сингулярностей, солитонов, струн, уровней энергии, тензоров энергии-импульса и т.д.

Как мы видим, описание мира может существенно отличаться от самого мира. Но тем не менее есть некоторые приемы описания, которые дают практически неизменные знания о нем. Мы знаем длительность года в днях и дня в часах, знаем высоту гор и глубину морей, знаем температуру замерзания воды и температуру плавления стали. В этих знаниях мы уверены. Они основаны на сопоставлении свойств объектов. Остановимся на этом более детально.

1.3. ИЗМЕНЕНИЕ ОБЪЕКТОВ ОКРУЖАЮЩЕГО МИРА И ВРЕМЯ КАК ЕГО МЕРА

Вначале выделяют определенные свойства, которыми характеризуются объекты окружающего мира. Например, все объекты подвержены изменениям. Человек рождается ребенком, растет, превращается в юношу, становится зрелым, затем старится и умирает. На протяжении жизни человека происходят другие изменения. Ежедневно Солнце перемещается по небосводу, происходят смена дня и ночи, фаз Луны, сезонов года. Многие из изменений

повторяются и являются циклическими, другие бывают уникальными – появление сверхновой звезды, столкновение кометы Леви - Шумекера с Юпитером. Свойства изменения и движения характеризуют все объекты окружающего мира.

Для определения меры изменения объекта человек сопоставляет это изменение с каким-либо эталонным изменением. В процессе человеческой истории изменения разных объектов выбирались в качестве эталонных: циклическая смена дня и ночи (сутки), смена фаз Луны (месяц), смена сезонов погоды (год), смена поколений, смена династий, вытекание воды или песка из емкости, повторяющиеся удары сердца. В результате сопоставления изменения объекта с изменением эталона определяется величина изменения. Она выражается в количестве эталонных изменений или в количестве их долей и называется временем. Например, изменение человека, т.е. его жизнь, проходит в среднем за 70 оборотов Земли вокруг Солнца, что идентично количеству циклов изменения сезонов. Существует несколько результатов сравнения изменений: длительность, промежуток времени, момент времени и т.д., которые являются синонимами либо уточняют особенности изменений. Промежуток времени обозначает количество циклов эталонного изменения, эквивалентных рассматриваемому изменению. А момент времени рассматриваемого изменения обозначает привязку его к определенному циклу эталонного изменения.

В зависимости от выбора эталона одно и то же изменение будет выражаться разной величиной. Например, возраст дуба равен 350 годам или 5 человеческим жизням. В процессе человеческой деятельности была создана система эталонов изменений: секунда, минута, час, сутки, год и т.д. и установлены точные соответствия между ними. В результате сопоставления изменений объектов с эталонными изменениями мы получаем знания о мире: черепаха живет 300 лет, секвойя – 5000 лет, а Земля существует 5 млрд лет. Эти знания никогда не станут заблуждениями. Они могут претерпевать некоторые количественные изменения, вызванные несколькими причинами. Во-первых, процесс сравнения впоследствии может выполняться с большей точностью. Например, продолжительность года была сначала определена в 365 дней, но по истечении многих лет она уточняется и теперь с точностью до пяти значащих цифр составляет 365.25 дней. Во-вторых, изменения изучаемого объекта или эталона могут зависеть от разных обстоятельств. При неблагоприятных жизненных условиях продолжительность жизни человека может быть не 70, а 35 лет и даже меньше. А маятниковые часы, перенесенные в точку с другим ускорением земного тяготения, или пружинные – в помещение с другой температурой, покажут другую длительность изменения. В-третьих, сами изменения также изменяются. По мере износа изменяется ход механических часов. С увеличением количества оборотов Земли вокруг Солнца изменяется продолжительность года в сутках. Поэтому результат сравнения изменений должен быть приведен к обстоятельствам, от которых он зависит, и к моменту сравнения. При экстраполяции его в будущее или прошлое необходимо провести дополнительные исследования по

изменению изменений изучаемого объекта и эталонного и скорректировать результаты сравнения. Например, возраст Земли 5 млрд лет относится к нынешнему движению Земли вокруг Солнца. Возможно, от начала своего появления Земля совершила 100 млрд оборотов вокруг Солнца, а может всего 1 млрд. Возможно, что 2 млрд оборотов назад Земли как таковой не было, а существовало чечевицеобразное диффузное облако. Как мы видим, тщательное изучение методом сравнения может открывать нам многие знания о мире. И если мы будем учитывать обстоятельства сравнения, то такое описание мира будет оставаться верным до тех пор, пока они не изменятся или не встретятся обстоятельства, которые мы прежде не учитывали.

1.4. ВЕЛИЧИНА ОБЪЕКТОВ И ЕЕ МЕРА

Второе свойство окружающего мира, с которым наиболее часто сталкивается человек, является величина объектов. При сопоставлении обнаруживается, что один объект меньше или больше другого. Так, палец меньше стопы, стопа меньше руки (до локтевого сустава), рука меньше человека, человек меньше дерева. Многие из перечисленных объектов выбирались в качестве эталонов: фут, локоть, шаг. Величина объекта определяется в результате сравнения его с эталоном и выражается количеством эталонов или их долями. Например, величина мужчины равняется 6 футам. В настоящее время большая часть человечества пользуется специально созданным эталоном величины или длины – платино – иридиевым брусом *x*-образного сечения, который хранится в Севре (Франция) в международном бюро мер и весов. Величина бруса при температуре 0 ^{o}C между двумя нанесенными на нем штрихами называется метром. Таким образом, величина объектов как в макро-, так и в микромире выражается в количествах или в долях метра.

Величина объектов, как и их изменение, зависит от многих обстоятельств: например, температуры, давления и др. Эталонный метр изготовлен из такого материала, который в некотором диапазоне температуры не изменяет свою величину. Однако изменение температуры в большем диапазоне или проведение измерений в особых обстоятельствах необходимо учитывать при определении величины объектов.

Величина одного человека может быть больше другого в направлении от пят до головы, больше третьего в направлении плеч и больше четвертого в направлении спина – живот. Это свойственно и для других объектов, т.е. им присущи три вида величины в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Однако для их измерения используется один и тот же эталон. При рассмотрении двух тел необходимо определить величину промежутка между ними. Промежуток, как и величина объекта , располагается в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Величины промежутков между объектами измеряются тем же эталоном длины. Объекты и промежутки между ними образуют их вместилище, которое называют пространством.

Существует много разновидностей мер величины объектов: размер, длина, ширина, высота, глубина, расстояние и т.д. Все они получаются при сравнении величины объекта с одним и тем же эталоном величины. Размер объекта – это результат сопоставления величины объекта с величиной эталона. Длина – наибольший размер объекта, ширина – средний размер, как правило в горизонтальной плоскости. Глубина – размер объекта по вертикали вниз. Расстояние между объектами – размер промежутка между ними. Существует ряд свойств объектов: площадь, объем, форма, которые определяются комбинацией размеров объекта.

В результате сравнения величины объектов мы узнаем расстояние между телами и городами, длины рек, высоту гор, площади стран, диаметр Земли, расстояние до звезд. Многие науки возникли благодаря измерению величин объектов: география, геометрия, астрономия. По-видимому, объем знаний, полученный в результате сравнения величин объектов, является самым большим. Величина – это основное свойство объекта. До тех пор, пока мы надежно не знаем его, мы сомневаемся в существовании объекта. Например, отсутствие знаний о величинах элементарных частиц в современной физике вызывает сомнение в их существовании.

1.5. БЕЗГИПОТЕЗНОЕ ОПИСАНИЕ ОКРУЖАЮЩЕГО МИРА

Кроме изменчивости и величины существует много других свойств окружающего мира: тепло, свет, звук и др. Для их описания человек также ввел эталоны, в результате сравнения с которыми эти свойства определяются в градусах температуры, количестве свечей светимости, децибелах громкости и т.д. Это позволяет определять свойства объектов, устанавливать влияние одних свойств на другие: например, температуры тела на его светимость, длины струны на тональность звука, температуры и давления на объем газа. В результате человек находит соотношения между свойствами. Таким образом создаются области описания поведения объектов природы, например, термодинамика, оптика, электродинамика и т.д.

В дальнейшем выделяются более сложные свойства, которые являются комбинацией простых. Другие свойства, наоборот, детализируются и оказываются зависящими от ранее введенных величин. Так создается система описания окружающего мира, в которой определены величины свойств путем сравнения с эталонами и установлены зависимости между свойствами объектов в виде зависимостей между величинами.

Полученные таким образом знания об объектах окружающего мира позволяют предсказывать их поведение, ориентироваться среди них, воссоздавать их отдельные стадии или даже конструировать такие комбинации явлений, которые в мире не происходили. Например, человек создал объекты, которые преодолели земное притяжение и вышли в космос. В этом процессе результаты человеческих действий будут соответствовать намерениям с той

точностью, с какой свойства объектов были сопоставлены со свойствами эталонов. При этом, естественно, должны быть соблюдены условия сопоставления.

В представленном процессе познания природы гипотезы и предположения о механизмах явлений не вводятся в рассмотрение. На них не строится картина мира. Здесь окружающий мир изучается, сопоставляется и измеряется. И под теорией здесь следует понимать описание свойств объектов природы, методов человеческой деятельности и их результатов.

Сложившаяся система безгипотезного описания создана человечеством в течение тысячелетий и является многогранной и многоплановой. Каждый человек изучает ее по отдельным элементам и никогда не познает всю систему целиком. Он, как правило, не участвует в выявлении новых свойств мира и введении новых эталонов. У него создается впечатление, что меры свойств представляют некоторый мир, который существует независимо от него, существует объективно и вечно. Ему представляется, что существует время, в котором все события развиваются, существует пространство, в котором размещаются все объекты окружающего мира. В результате такого представления у человека возникают вопросы: а что такое время? Это какая-то сущность? Может, оно дискретно? Или превращается в энергию как предполагал Н.А. Козырев, а может, в пространство? Аналогичные вопросы появляются в отношении пространства. Является ли оно какой-то сущностью? Материально ли оно? Искривлено оно или прямолинейно и изотропно? Две параллельные прямые пересекаются в нем или не пересекаются? Может пересекаются, а может и нет? Примем сначала одну парадигму, а затем другую. Эти и подобные гипотезы и сомнения овладевают людьми, если они теряют представление, где окружающий мир, а где его описание.

Введенные человеком меры свойств: пространство – для величины объектов, время – для их изменчивости и т.д. – являются описанием окружающего мира. Это описание могло быть другим. Могли быть выделены другие свойства, введены другие эталоны. Например, величину объекта можно характеризовать вместимостью или объемом, описание взаимодействий – энергией и силой, теплоту при описании тепловых процессов – энтропией и энергией. Способы описания изменяются со временем. У разных народов, в разные времена изменчивость объектов и их величина определялась поразному. И то, что сегодня понимается под пространством и временем, представлялось другим. У древних народов мифические образы – боги, титаны, герои, асуры, дэвы; их области обитания – ад, рай и другие миры – существовали наряду с реальными личностями и географическими объектами. Изменялось также и описание других свойств. Об этом необходимо не забывать и при исследовании всегда задавать себе вопрос: это – окружающий мир или его описание? Например, эфир, материя, сознание, дух, масса, поле, энергия, сила, заряд, электрон, мюон, нейтрино, фотон, гравитон, солитон, планета, звезда, галактика, черная дыра, нейтронная звезда, Земля Санникова, Антарктида – что это? Описание окружающего мира? Или его объекты?

Когда мы сталкиваемся с чем-то неизвестным, то задаем себе вопрос: что это такое? Как оно устроено? и т.д. Однако не все вопросы уместны. Об объекте окружающего мира мы можем спросить: из каких частей он состоит, каковы его свойства? К описанию мы можем задать вопросы: как мы его определили, при каких обстоятельствах, как оно зависит от них. Ответы дополнят безгипотезное описание окружающего мира. Это будет объективное знание о природе, которое в последующем не будет отброшено потомками.

Часто говорят, что без гипотез невозможно познание окружающего мира. При этом считают, что принятые вначале догадки и предположения проверяются, а не подтвержденные отбрасываются. Остаются те, которые согласуются с наблюдаемыми явлениями.

Анализ работы человеческого мозга и процесса мышления показывает, что это самообман. Искушение поддаться влиянию яркой гипотезы возникает у человека в случае, когда все обстоятельства дела не выяснены. Последовать гипотезе можно сразу, а для выяснения обстоятельств могут потребоваться годы. Но опытный специалист не позволит себе увлечься гипотезой. Он продолжит сложную и тяжелую работу по изучению объекта, его свойств, влиянию на них других объектов и обстоятельств. В результате он достигнет такого понимания особенностей объекта, что может предвидеть и описать их, не привлекая гипотез.

ГЛАВА 2

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕХАНИКИ

2.1. ДВИЖЕНИЕ ОБЪЕКТОВ И ЕГО МЕРЫ

Изменение окружающего мира происходит в разных формах. Одна из них – движение. При движении изменяется промежуток между объектами. Мерой движения является скорость. Средняя скорость движения одного объекта относительно другого определяется как отношение изменения расстояния $\mathbf{d}l$ между ними за промежуток времени $\mathbf{d}t$ к величине этого промежутка, т.е. $\upsilon = \mathbf{d}\,l/\mathbf{d}t$. Так как рассматривается изменение промежутка между двумя объектами, то скорость характеризует движение одного объекта по отношению ко второму. Часто об этом забывают и относят скорость только к одному объекту. Например, движущийся относительно поверхности Земли объект рассматривается как абсолютно движущийся. С Землей связывают систему отсчета, затем абстрагируются от Земли и рассматривают движение объектов в этой системе и их скорости представляются абсолютными свойствами объектов. Это часто приводит к ошибкам. Например, если учитывать только скорость самолета относительно Земли, то время полета из Новосибирска в Москву мы представляем с большой ошибкой, если не учтем скорость самолета относительно воздушной среды: сильный западный ветер

может на полчаса задержать прибытие самолета. Таким образом, скорость – это свойство не одного объекта, а двух. Следовательно, при взаимодействии многих объектов необходимо рассматривать их взаимные скорости друг с другом, т.е. рассматривать изменение во времени их взаимных расстояний.

Расположение объектов друг относительно друга может быть в трех различных направлениях. Поэтому имеется три скорости, которые при описании их векторной величиной в декартовой системе координат определяются тремя компонентами вектора скорости

$$\vec{v} = \vec{i}\,v_X + \vec{j}\,v_Y + \vec{k}\,v_Z. \qquad (2.1)$$

Скорость $\vec{v}$ может оставаться неизменной. В этом случае объект движется относительно другого равномерно и прямолинейно. В частном случае нулевой скорости расстояние между объектами не изменяется и они находятся в покое друг относительно друга. В то же время относительно других объектов они могут иметь любые скорости.

Скорость тела может изменяться. Например, неподвижный объект приходит в движение или в процессе движения увеличивается его скорость, или изменяется ее направление. Так как скорость пропорциональна изменению расстояния между двумя телами, то изменение скорости может быть вызвано изменением движения каждого из них. Для характеристики изменения скорости тела было введено понятие ускорения $\vec{w}$, которое отражает изменение скорости только одного объекта. Для этого воображается некоторая система отсчета, которая в момент t имеет одинаковую с телом скорость $\vec{v}$, и ее скорость в дальнейшем не изменяется. Эту систему назвали инерциальной в том смысле, что она движется по инерции, т.е. на нее никто не воздействует и не изменяет ее скорость. В дальнейший момент времени $t+\Delta t$ рассматривается уже не изменение скорости по отношению ко второму телу, а изменение $\Delta\vec{v}$ по отношению к этой неускоренной системе. Средняя величина ускорения определяется как отношение изменения скорости за промежуток Δt к величине промежутка и в векторном виде записывается

$$\vec{w} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \qquad (2.2)$$

Так определенное ускорение тела является уже его абсолютной характеристикой, а не относительной, привязанной к другим объектам.

2.2. ВОЗДЕЙСТВИЕ И ЕГО ОПИСАНИЕ

Почему тело приобретает ускорение? Человек убедился, что случаи ускоренных движений тел имеют причину – на них действуют другие тела. Под воздействием одного тела на другое мы будем понимать способность

первого тела привести в движение второе тело либо изменить его движение. Изменить движение тела – это значит изменить его скорость либо по величине, либо по направлению, т.е. сообщить ему ускорение $\vec{w}$. Отсюда величина воздействия на тело определяется величиной ускорения, которое оно приобретает или приобретет, когда это воздействие начнется. Если нет ускорения, то и нет воздействия, либо воздействие первого тела скомпенсировано обратным по направлению другим воздействием. Например, подвешенный на пружине камень притягивается Землей, но он не изменяет свое движение, так как пружина противодействует этому. Она создает воздействие обратное по направлению воздействию Земли, и камень находится в покое. Пружина при этом растягивается на какую-то величину Δl.

Для выражения воздействия на тело была введена сила. В приведенном примере деформация пружины Δl наглядно представляет силу воздействия. Этим термином мы обозначаем свойство человеческого тела выполнять какое-то действие, например сжимать пружину.

Противодействие третьего тела может быть выражено не только растяжением пружины, но и ее сжатием, если она, например, расположена между притягивающимися телами. Третье тело может быть и не пружиной, а его деформация может измеряться тензодатчиками или с помощью пьезоэффекта. Кроме того, противодействие третьего тела может быть выражено другим воздействием. При измерении взаимодействия двух подвешенных на нитях заряженных шариков их отклонению от вертикали противодействовали гравитационным притяжением к Земле.

Исторически сложилось так, что воздействие стали определять величиной деформации Δl. Было введено понятие силы $\vec{F}$ воздействия, которая определяется величиной деформации Δl, созданной эталонным воздействием. Шкала силы построена так, чтобы единица силы в любом месте шкалы соответствовала одному и тому же воздействию на определенное эталонное тело. В настоящее время за эталонное тело принят платино – иридиевый цилиндр диаметром и высотой 39 мм, который хранится в Париже. При воздействии на него Земли он растягивает пружину на определенную длину, которая выражает величину силы в один килограмм (в технической системе МКГСС). Итак, воздействие Земли на эталон заключается в том, что он падает с ускорением 9,8 м/с^2. Мы же описываем это воздействие величиной силы в F = 1 кГ.

Если присоединить к пружине n эталонов, то они растянут ее на длину эквивалентную n кГ. И мы говорим, что Земля воздействует на них силой в $F = n$ кГ. Другое тело, находящееся под воздействием, тоже может растянуть пружину на n_1 кГ, т.е. как n_1 эталонных цилиндров. Но такое тело, как и все другие тела, падает все с тем же ускорением 9,8 м/с^2. Таким образом, при воздействии на разные тела с одним и тем же ускорением силы воздействия на них будут разными. То есть, одна только сила не может характеризовать воздействие на тело. Поэтому введена масса тела $m = n$ – как количество эталонных тел, которые при воздействии, характеризуемом одинаковым уско-

рением, растянут пружину на ту же величину, что и тело. Тогда при любом воздействии, которое измерено величиной силы $\vec{F}$, на любое тело, которое эквивалентно *m* эталонам, ускорение тела будет

$$\vec{w} = 9.8 \cdot \vec{F}/m. \qquad (2.3)$$

Сила имеет то же направление, что и ускорение, аналогично ему и в пространстве характеризуется тремя составляющими: $\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z$.

В отличие от МКГСС в системе СИ за единицу силы $\vec{F}$ принят 1 ньютон (Н), который характеризует такое воздействие на эталонный цилиндр, при котором он движется с ускорением 1 м/с^2. В системе СИ соотношение (2.3) в векторном виде запишется так:

$$\vec{w} = \vec{F}/m. \qquad (2.4)$$

Выражение (2.4), известное как второй закон Ньютона, в рассмотренной системе единиц справедливо для любых воздействий. И как мы видим, оно является результатом нашего выбора характеристик воздействия и единиц измерения. Аналогично первый и третий законы Ньютона – следствие нашего подхода. Например, первый закон: если на тело не воздействуют другие тела, то оно сохраняет прямолинейное и равномерное движение, – является следствием исходного определения воздействия – это способность одного тела привести в движение второе тело или изменить его движение. Из данного определения следует: если на тело не действуют другие тела, то оно не изменяет свое движение и остается в покое либо движется прямолинейно и равномерно.

Третий закон Ньютона состоит в том, что сила действия первого тела на второе F_{12} равна силе противодействия второго тела на первое F_{21} и противоположна ей по направлению:

$$F_{12} = -F_{21}. \qquad (2.5)$$

Этот закон – следствие определения силы, которая выражает противодействие третьего тела взаимодействию двух тел. Величина противодействия, например деформация пружины, относится как к первому телу, так и ко второму. То есть это одна и та же величина, которая, как и пружина, направлена на тела при их взаимном притяжении и от тел – при их взаимном отталкивании. Другими словами, одна и та же сила направлена взаимно противоположно на взаимодействующие тела.

Здесь же отметим, что несмотря на существующие в обиходе выражения (действует сила на тела, направленная сила и т.д.), сила не является сущностью, субстанцией, духом и т.п. Это введенное нами понятие для описания воздействия.

Итак, воздействие на тело проявляется в его ускорении. Человек выражает и описывает воздействие в виде силы и массы рассматриваемого тела.

В выбранной системе единиц масса однозначно характеризует связь ускорения тела, находящегося под воздействием, с измеренной силой. Отсюда следуют три важных вывода. Во-первых, во всех взаимодействиях масса тела будет одна и та же. Поэтому бессмысленно искать расхождение между гравитационной и инерционной массой. Эти поиски сводятся к тому, чтобы в разного вида взаимодействиях найти погрешности измерения одной и той же шкалы. Во-вторых, из определения массы следует, что она от другого взаимодействия или движения изменяться не может. То есть масса, вопреки принятому в ТО, в принципе не может зависеть от скорости. В-третьих, масса свойственна лишь тому объекту, который может приобрести ускорение в результате воздействия другого объекта, и это воздействие можно измерить в виде силы. Так как для света, поля, энергии и т.п. данный процесс не реализован, то нельзя им приписывать массу. Таким образом, поле, энергия и вводимые частицы (фотон, гравитон и т.д.) массы не имеют.

2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛЫ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ТЕЛО И ЕГО ДВИЖЕНИЕ

Ускорение тела определяется вторым законом Ньютона (2.4). Его масса *m*, однажды измеренная, известна, и если известно выражение для силы $\vec{F}$, то в результате интегрирования ускорения по времени получаем скорость движения тела, а после интегрирования скорости – зависимость пути движения тела от времени *t*. Таким образом определяется полностью движение тела, на которое воздействуют другие тела силой $\vec{F}$. Сила $\vec{F}$ зависит от свойств воздействующих тел, может зависеть от пути движения тела или расстояния между телами $\vec{r}$, скорости $\vec{v}$ и времени *t*, т.е. сила может быть функцией $\vec{F}$ ($\vec{r}$, $\vec{v}$, *t*).

Существует много разных видов воздействий. Например, в стволе пушки на снаряд действуют пороховые газы силой

$$F = SP, \qquad (2.6)$$

где *S* – поперечное сечение снаряда; *P* – избыточное давление в стволе пушки.

При движения снаряда на расстояние *l* объем пороховых газов растет ($V = Sl$), давление падает, например по адиабатическому закону PV^k = const, и поэтому изменяется с ростом *l* так:

$$P = P_0 (l_0/l)^k.$$

где l_0 – длина при первоначальном объеме пороховых газов; P_0 – их начальное давление.

После подстановки в (2.6) получаем следующую зависимость для силы

$$F = SP_0 (l_0/l)^k, \qquad (2.7)$$

которая действует на снаряд в стволе пушки. Эта сила зависит от пути по степенному закону. Если вместо пороховых газов на снаряд воздействовала бы пружина, то в пределах действия закона Гука сила зависела бы от пути тела по линейному закону.

После вылета из ствола снаряд движется в атмосфере. Если его скорость $\vec{v}$, а скорость воздушной среды $\vec{u} = \vec{u}(x,y,z)$, то в простейшем случае сферического снаряда радиусом r на него будет действовать сила

$$\vec{F} = Cf\,\frac{\rho|\vec{u}-\vec{v}|(\vec{u}-\vec{v})}{2}, \qquad (2.8)$$

где C – аэродинамический коэффициент; ρ – плотность воздуха; $f = \pi r^2$ – перпендикулярное обтекаемому потоку сечение снаряда.

Аэродинамический коэффициент C нелинейно зависит от скорости снаряда относительно воздуха, его вязкости, шероховатости снаряда и т.д. Плотность воздуха изменяется с высотой. Скорость ветра $\vec{u}$ также изменяется вдоль пути снаряда. Поэтому сила $\vec{F}$ сложным образом зависит от пути и скорости снаряда и для ее нахождения потребуется знание практически всех свойств атмосферы. С определенными приближениями и упрощениями эти свойства могут быть заданы в виде поля величин по всей атмосфере, где будет проходить снаряд. Последовательным интегрированием соотношения (2.4) будет определено движение снаряда.

Если раньше мы говорили о воздействии на тело другого тела, то в последнем примере на снаряд в процессе его движения воздействуют разные части атмосферы, т.е. многие объекты. Тем не менее, определив силу их воздействия на тело, мы можем рассчитать его движение.

Пусть наш снаряд снабжен реактивным двигателем, который по команде с Земли в какой-то момент включается и с помощью реактивной силы выведет его на орбиту. Эта сила является переменной во времени $\vec{F} = \vec{F}(t)$. Таким образом, мы видим, что силы могут зависеть от переменных интегрирования $\vec{r}$, $\vec{v}$, t уравнения (2.4), т.е. от параметров движения рассматриваемого тела. Кроме того сила зависит от ряда свойств взаимодействующих объектов. Одна из основных задач физики – нахождение этих сил. Анализ известных сил показывает, что все они определяются в результате измерения. Измерения, как правило, многоплановые. Вначале необходимо выделить эталонную ситуацию и произвести в ней измерение сил. Затем определяются свойства, по которым аналогичные ситуации отличаются от эталонной. Вводятся меры этих свойств и производятся измерения их влияния на величину силы в эталонной ситуации. После выполнения таких измерений появляется возможность расчета сил в различных ситуациях.

Если сила воздействия на тело установлена и в процессе движения известна, то можно интегрировать уравнение (2.4). В результате полностью будет определено движение тела. В этом заключается решение задачи взаи-

модействия двух тел или воздействия на тело многих тел. Как видим, силовой метод состоит из трех этапов. Вначале находят силу воздействия, причем полностью основываясь на результатах измерений. На втором этапе устанавливают соответствие между силой воздействия на тело и его ускорением, т.е. измеряют массу тела. На третьем этапе по известному ускорению рассчитывают движение тела, при этом экспериментальные результаты не привлекаются.

2.4. О ЗАВИСИМОСТИ СИЛЫ ОТ УСКОРЕНИЯ

На основании теоретических рассуждений в электродинамике введена сила, которая зависит от ускорения. Например, во многих монографиях и учебниках, в том числе [26] и [97], приводится выражение для напряженности электрического поля движущегося заряда q_1. Используя его, запишем величину силы воздействия на неподвижный заряд q_2:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon\left(r_t - \vec{r}_t\vec{\beta}\right)^{3/2}}\left\{\left(1-\beta^2\right)\left(\vec{r}_t - \vec{\beta}r_t\right) + \vec{r}_t \times \left(\vec{r}_t - \vec{\beta}r_t\right)\times \dot{\vec{\beta}}/c^2\right\}, \qquad (2.9)$$

где $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ – приведенная скорость заряда q_1; $\vec{v}$ – его скорость относительно заряда q_2; $\dot{\vec{\beta}} = \dot{\vec{v}}/c$ – приведенное ускорение заряда q_1; $\vec{r}_t$ – радиус-вектор от заряда q_1 до заряда q_2 в момент времени t', взятый с "запаздыванием":

$$t' = t - r_t/c. \qquad (2.10)$$

Это выражение следует из запаздывающих потенциалов Лиенара – Вихерта и известно в электродинамике с XIX века. По-видимому, по аналогии с (2.9) В. Вебером [123] было предложено следующее выражение для силы:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2 \vec{r}}{\varepsilon r^3}\left(1 - 0{,}5\beta^2 + r\dot{\beta}/c\right). \qquad (2.11)$$

В последнее время формула Вебера привлекает внимание многих ученых [80, 124, 125]. Томас Е. Фиппс [107, 108] предложил аналогичное выражение для силы

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2 \vec{r}}{\varepsilon r^3}\left(\sqrt{1-\beta^2} + \frac{r}{c\sqrt{1-\beta^2}}\,\dot{\beta}\right), \qquad (2.12)$$

которое также зависит от ускорения. Вышеупомянутые ученые намереваются развить новую электродинамику, альтернативную теории относительности.

Силы, зависящие от ускорения, были введены также в механике жидкости. Предполагается, что на частицу диаметром d, если она движется со скоростью $\vec{u}$ действует сила [27]

$$\vec{F} = -3\pi\rho_l \nu \mathbf{d}\vec{u} - \frac{\pi d_l^3 \rho_l}{12}\frac{\mathbf{d}\vec{u}}{\mathbf{d}t} - \frac{3d^2\rho_l(\pi\nu)^{-0.5}}{2}\int_0^t (t-\tau)^{-0.5}\frac{\mathbf{d}\vec{u}}{\mathbf{d}t}\mathbf{d}\tau, \qquad (2.13)$$

где ρ_l – плотность жидкости; ν – ее кинематическая вязкость.

Первое слагаемое в правой части представляет силу Стокса $\vec{F}_S$, которая действительно действует на частицу, что подтверждается многочисленными экспериментами при малых числах Рейнольдса. Второе слагаемое называется силой Бассе, а третье – силой присоединенных масс. Выражение (2.13) получено теоретически при рассмотрении локального взаимодействия сферической частицы, которая движется в жидкости с относительной скоростью $\vec{v}$. Затем полученные результаты были приведены к скорости $\vec{u}$ частицы относительно невозмущенной жидкости.

Итак, силы, зависящие от ускорения, употребляются в разных областях механики. Однако есть ученые, которые с этим не согласны. Например, Ричард А. Валдрон [121] доказал, что зависимость силы от ускорения противоречит второму закону Ньютона, Андре К.Т. Ассис [81] показал, что сила Вебера (2.11) приводит к парадоксальным результатам. Тем не менее в состоявшейся дискуссии [114] он выступил как сторонник силы, зависящей от ускорения [82].

Зависимость силы от ускорения имеет фундаментальное значение. Здесь вопрос не ограничивается тем, существуют ли эти силы в действительности, например силы присоединенных масс и Бассе (2.13), или это ошибочные силы. Зависимость силы от ускорения в электродинамике в форме (2.9) в дальнейшем приводит к представлениям об излучении движущегося заряда, потери энергии на излучение и торможении заряда этим излучением. Эти выводы применяются к электрону, вращающемуся на орбите вокруг заряженного ядра, на основании чего делают заключение, что движущийся с ускорением электрон должен терять энергию, поэтому он неминуемо должен "упасть" на ядро. Именно по этой причине планетарная модель атома не получила дальнейшего развития, вся физика микромира в дальнейшем развивалась в направлении создания математических вероятностных моделей элементарных частиц, а не по пути изучения физической природы микромира.

Почему же сила не может зависеть от ускорения? Чтобы ответить на этот вопрос, приведем вначале доказательство Р.А. Валдрона, модифицировав его. Из выражений для силы (2.9), (2.11), (2.12) и (2.13) видно, что ее можно записать в следующем виде:

$$\vec{F} = A\vec{B}(r, \upsilon, w), \qquad (2.14)$$

где A – общий сомножитель для всех составляющих силы, не зависящий от ускорения. Для выражений (2.9), (2.11) и (2.12) сомножитель $A = q_1 q_2/\varepsilon$, а для силы в жидкости (2.13) $A = \rho_l$. Сомножитель A является не только общим для всех слагаемых силы, но содержит также параметры, от которых сомножитель $\vec{B}$ не зависит. Последнее условие непременно для дальнейшего вывода.

При малых величинах ускорения, разложив сомножитель $\vec{B}(r,\upsilon,w)$ в ряд Тейлора по степеням w, можем записать с точностью до i-го слагаемого

$$\vec{F} = A\left(\vec{B}_0 + \vec{B}'w + \frac{\vec{B}''}{2}w^2 + \ldots + \frac{\vec{B}^{(\mathrm{i})}}{\mathrm{i}!}w^{\mathrm{i}}\right), \qquad (2.15)$$

где $\vec{B}_0$ – значение сомножителя B при w=0; $\vec{B}', \vec{B}'', \ldots, \vec{B}^{(\mathrm{i})}$ – производные от $\vec{B}$ по w.

Если сила (2.14) будет зависеть от вектора ускорения, то тогда необходимо разлагать силу в ряд Тейлора по компонентам вектора.

При отмеченных выше условиях выражение (2.15) является общим и справедливым для взаимодействий при любом изменении величин параметров, от которых зависят сомножители A, $\vec{B}$ и производные $\vec{B}', \vec{B}'', \ldots, \vec{B}^{(i)}$. При действии на тело силы (2.15), согласно второму закону (2.4), оно приобретет ускорение

$$\vec{w} = \vec{F}/m. \qquad (2.16)$$

Изменим параметры воздействующего объекта, которые входят только в сомножитель A таким образом, чтобы сила $\vec{F}$ возросла в n раз. Для этого надо увеличить заряд q_2 воздействующего тела в n раз для сил (2.9), (2.11) и (2.12) или плотность жидкости ρ_l для силы (2.13). Итак, при $A_1 = n\,A$ сила возрастет также в n раз: $\vec{F}_1 = \vec{F}\,n$. При той же массе частицы и неизменных расстоянии и скорости ускорение, согласно (2.16), при увеличившейся силе тоже возрастет в n раз: $w_1 = n\,w$. Выражение (2.15) является общим, поэтому оно должно быть справедливым и для измененных параметров взаимодействия

$$\vec{F}_1 = A_1\left(\vec{B}_0 + \vec{B}'w_1 + \frac{\vec{B}''}{2}w_1^2 + \ldots + \frac{\vec{B}^{(\mathrm{i})}}{i!}w_1^{\mathrm{i}}\right). \qquad (2.17)$$

После подстановки значений $\vec{F}_1$, A_1, w_1 в (2.17) получаем

$$\vec{F} = A\left(\vec{B}_0 + \vec{B}'nw + \frac{\vec{B}''}{2}n^2w^2 + \ldots + \frac{\vec{B}^{(i)}}{i!}n^iw^i\right). \qquad (2.18)$$

Однако выражение (2.18) не согласуется с выражением (2.15). Следовательно, либо исходное выражение для силы (2.14) неверно, либо неверен закон Ньютона (2.16), из которого определено ускорение w_1. Связь между силой и ускорением (2.16) обусловлена, как мы убедились, определением понятий силы, массы, ускорения и единиц их измерения, и другой она не может быть. В таком случае ошибочным является зависимость силы от ускорения (см. также [113, 114]).

Нетрудно убедиться, что каждая из формул (2.9), (2.11) и (2.13), подвергнутая такой же процедуре, вступает в противоречие с собой. Значит, при применении сил, зависящих от ускорения, неизбежно получаются абсурдные результаты, например ускорение в плоском конденсаторе заряженной частицы до бесконечной скорости [82] или неограниченное самоускорение заряженной частицы даже в отсутствие воздействия на нее со стороны других тел (см. §74 в [26]).

Р.А. Валдрон в начале своей статьи [121] отмечает, что некоторые авторы, в том числе и В. Ритц, рассматривают зависимость силы от скорости и ее высших производных. Такое представление имеет развитие и в наши дни, однако в применении к другим величинам – напряженностям электрического E и магнитного H полей. Напомним, что напряженности – это силы, нормированные к единице электрического и магнитного, зарядов соответственно. Так как электрическое поле пропорционально скорости изменения магнитного поля, а магнитное – скорости изменения электрического поля, то в случае движения заряда с переменной скоростью у многих авторов возникает желание вводить поля более высокого порядка, которые определились бы высшими производными от скорости движения заряда.

Так может ли зависеть сила от производных от скорости более высоких, чем ускорение? Р.А. Валдрон, допуская, что такая зависимость возможна, доказательств в ее поддержку или в опровержение не приводит.

Как мы уже рассматривали, сила воздействия на тело и его ускорение являются разными выражениями воздействия. В принципе, описание взаимодействий может быть выполнено и без силы. Например, пусть мы хотим изучить воздействие пружины на алюминиевый шарик диаметром 1 см. Мы можем измерить ускорение w шарика при сжатии пружины на величину x. Проведя серию экспериментов при разных сжатиях пружины x, мы получим зависимость ускорения шарика от сжатия пружины:

$$w = w_{1a}(x). \qquad (2.19)$$

Зависимость (2.19) уже позволяет решить задачу воздействия пружины на шарик. Первая производная от перемещения по времени есть скорость шарика

$$\frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}t} = \upsilon\,, \qquad (2.20)$$

а вторая – его ускорение

$$\frac{\mathbf{d}\upsilon}{\mathbf{d}t} = \frac{\mathbf{d}\upsilon}{\mathbf{d}x}\frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}t} = \upsilon\frac{\mathbf{d}\upsilon}{\mathbf{d}x} = w_{1a}(x)\,. \qquad (2.21)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (2.20) – (2.21) представит изменение пути и скорости шарика во времени, т.е. мы получим описание его движения.

Для алюминиевого шарика диаметром 2 см можно провести такие же измерения и получить зависимость $w_{2a}(x)$. Для свинцового шарика диаметром 1 см эта зависимость $w_{1c}(x)$ тоже может быть получена. Аналогично могут быть измерены зависимости для ускорений других тел, а с помощью уравнений (2.20)–(2.21) рассчитаны их движения.

Этот безсиловой метод описания взаимодействий можно модернизировать, если установить соответствие между ускорением алюминиевых шариков разных размеров в виде коэффициента $K_a(d)$. Тогда по зависимости $w_{1a}(x)$ можно определять ускорение шарика диаметром $d = n$ (см.):

$$w_n(x) = K_a(d)\, w_{1a}(x).$$

Такое же соответствие устанавливается между ускорениями свинцового шарика и алюминиевого. Эту модернизацию можно распространить на шарики из других материалов, на тела другой формы и т.д.

Сложившийся метод описания взаимодействий с помощью сил является еще более общей модернизацией рассмотренного метода. Здесь ускорение измеряется только для одного тела – эталонного килограмма $w = F$, и его мы называем силой. Ускорение всех остальных тел пересчитывается с помощью коэффициента соответствия m, который показывает, во сколько раз при одном и том же воздействии ускорение тела меньше ускорения эталона, т.е. $w = F/m$.

Итак, сила воздействия на тело есть не что иное, как его ускорение, но выраженное в других единицах. Поэтому, естественно, сила воздействия на тело не может зависеть ни от ускорения тела, ни от производных ускорения по времени. В связи с этим все силы, которые зависят от производных скорости по времени, не могут быть измерены. Они вводятся теоретически и являются ошибочными. Ближайшая задача физики – анализ влияния таких сил на трактовку явлений природы, ее исправление и создание нового представления об окружающем мире.

Следует особо отметить выражение для силы (2.9). Оно выведено из уравнений электродинамики, которые, как будет показано далее, являются обобщением экспериментов. Но это выражение представляет силу или ускорение в момент времени, предшествующий рассматриваемому, в соответствии с соотношением (2.10). Таким образом, (2.9) не может быть использовано для расчета скорости и пути движения тела, на которое оказывается воздействие. То есть, по существу, выражение (2.9) не представляет силу, которую можно использовать во втором законе механики (2.4).

2.5. СИЛА И ЭНЕРГИЯ

В механике для характеристики воздействия на тело введены понятия: работа, потенциальная и кинетическая энергии. Если на тело воздействуют другие тела силами F_1, F_2,..., F_n (рис.2.1) и тело за время $\mathbf{d}t$ перемещается по пути $\mathbf{d}l$, то скалярное произведение составляющих сил на это перемещение называется работой:

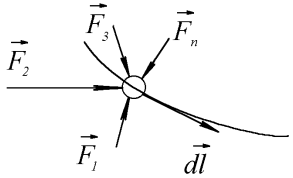


Рис.2.1. Силы воздействия на тело нескольких тел.

$$\mathbf{d}A = \vec{F}_1\,\mathbf{d}\vec{l} + \vec{F}_2\,\mathbf{d}\vec{l} + \ldots = \sum_i \vec{F}_i\,\mathbf{d}\vec{l}\ . \qquad (2.22)$$

По аналогии с бытовой деятельностью говорят, что воздействующие тела выполняют работу за время $\mathbf{d}t$. За конечный промежуток времени t работа воздействующих тел будет

$$A = \int_0^t \sum_i \vec{F}_i\,\mathbf{d}\vec{l} = \sum_i \int_0^t \vec{F}_i\,\frac{\mathbf{d}\vec{l}}{\mathbf{d}t}\mathbf{d}t = \sum_i \int_0^t \vec{F}_i\,\vec{v}\,\mathbf{d}t\,, \qquad (2.23)$$

т.е. она определяется суммой скалярных произведений сил воздействия на скорость тела.

При осуществлении этой работы с воздействующими телами что-то происходит, например лошадь теряет запас жизненных сил, а трактор расходует горючее. Принято называть такой процесс потерей энергии воздействующего тела, которая расходуется на выполнение работы (2.23). Израсходованная энергия как бы потенциально содержалась во взаимодействующих телах, поэтому ее называют потенциальной энергией U и приравнивают работе с обратным знаком:

$$U = -A = -\sum_i \int_0^t \vec{F}_i\,\vec{v}\,\mathbf{d}t\ . \qquad (2.24)$$

В результате воздействия движущееся тело приобретает скорость $\vec{v}$. Своим движением оно может осуществить какое-то воздействие, например ускоренный снаряд в результате удара может разрушить стену здания. Поэтому говорят, что тело обладает кинетической энергией

$$E_c = \frac{mv^2}{2}\,. \qquad (2.25)$$

Введенные величины работы, потенциальной и кинетической энергии позволяют рассматривать процесс взаимодействия в других понятиях. Однако этот метод полностью следует из метода сил, как будет видно ниже. В случае воздействия на тело нескольких тел запишем второй закон Ньютона (2.4) в следующем виде:

$$m\frac{\mathbf{d}\vec{v}}{\mathbf{d}t} = \sum_i \vec{F}_i\ . \qquad (2.26)$$

Умножим левую и правую части (2.26) на $\vec{v}$ и проведем последовательные преобразования

$$m\vec{v}\frac{\mathbf{d}\vec{v}}{\mathbf{d}t} = \sum_i \vec{F}_i\vec{v}; \qquad m\int \vec{v}\,\mathbf{d}\vec{v} = \sum_i \int \vec{F}_i\vec{v}\,\mathbf{d}t; \qquad \frac{mv^2}{2} = \sum_i \int \vec{F}_i\vec{v}\,\mathbf{d}t + C\,, \qquad (2.27)$$

где C – независящая от времени константа интегрирования.

С учетом определений (2.24) и (2.25) последнее выражение запишется так:

$$E_f = E_c + U = C. \qquad (2.28)$$

Сумма кинетической энергии E_c движущегося тела и потенциальной энергии U воздействующих тел называется полной механической энергией E_f взаимодействующих тел. Как видно из (2.28), полная энергия взаимодействия E_f во времени не изменяется и остается постоянной в процессе взаимодействия. В физике закон сохранения энергии называют законом природы. Однако мы знаем, что соотношение (2.28) обусловлено вторым законом Ньютона и является следствием нашего подхода и нашего выбора понятий. То что закон сохранения механической энергии (2.28) является не законом природы, а следствием нашего метода описания взаимодействий, не уменьшает его значения. Если бы это был закон природы, как, например, закон всемирного тяготения или закон Кулона, и был получен в результате измерения свойств тел, можно было бы сомневаться в его универсальности и точности. То что закон обусловлен нашим подходом, свидетельствует, что он должен выполняться с абсолютной точностью при любых обстоятельствах.

При выводе (2.28) мы рассматривали начало движения тела из состояния покоя. Если тело имеет начальную скорость v_0, то в результате интегрирования выражений (2.27) мы получаем

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum_i \int_{t_0}^{t} \vec{F}_i\,\vec{v}\,\mathbf{d}t = \sum_i \int_0^t \vec{F}_i\,\vec{v}\,\mathbf{d}t - \sum_i \int_0^{t_0} \vec{F}_i\,\vec{v}\,\mathbf{d}t = -(U - U_0)\,, \qquad (2.29)$$

что можно записать как:

$$\Delta E_f = \Delta E_c + \Delta U = 0, \qquad (2.30)$$

т.е. приращение полной энергии взаимодействующих тел в процессе движения равно нулю.

При наличии воздействий на тело оно может двигаться с постоянной скоростью: например автомобиль, приводимый в действие колесами, или самолет с реактивным двигателем. В этих случаях воздействующим объектам противодействует воздух сопротивлением движению. Так как скорость не изменяется, то ΔE_c =0 и, согласно (2.29), потенциальная энергия тоже не изменяется, т.е. ΔU = 0. Однако энергия топлива ΔE_T расходуется. Она расходуется на нагрев воздуха и поверхности тела, т.е. выделяется в виде энер-

гии $\Delta E_t = -\Delta E_T$. Дополняя приращение полной механической энергии согласно (2.30) величинами ΔE_t и ΔE_T, получаем

$$\Delta E_f = \Delta E_c + \Delta U + \Delta E_t + \Delta E_T = 0. \qquad (2.31)$$

Так как приращение каждой составляющей относится к начальному и конечному положению действующих тел, например $\Delta E_f = E_f - E_{f0}$, то полная энергия в конечном состоянии запишется согласно (2.31) как

$$E_f = E_c + U + E_t + E_T = E_{c0} + U_0 + E_{t0} + E_{T0} = C. \qquad (2.32)$$

То есть определенная таким образом энергия остается неизменной в процессе взаимодействия.

Связь между механической энергией и тепловой установлена в результате разнообразных измерений количества тепла, выделяемого при выполнении механической работы. Она выражена механическим эквивалентом теплоты η = 4.187 Дж/кал, или 427 кГм/ккал. Выделяемая топливом энергия при сгорании измерена в виде тепловой энергии. Таким образом, все виды энергии в результате экспериментальной тарировки сопоставлены с механической энергией. Поэтому закон сохранения энергии становится применимым как для механической, так и для тепловой, химической и других видов энергий, которые подвергнуты экспериментальному сопоставлению.

Итак, закон сохранения энергии является нашим подходом, а не законом природы. Это особенно важно помнить при рассмотрении новых явлений. Сохранение энергии обусловлено измерениями. Если явление выходит из рамок, в которых проводились измерения, то возможны нарушения закона. Такое нарушение происходит при измерении тепловой энергии, выделяемой в броне после удара бронебойных снарядов: она превышает кинетическую в 1.2, 1.48 и 4 раза при массе снаряда 0.0615, 0.085 и 4.05 кг, соответственно (Яворский В. Энергия «из ниоткуда» // Наука и жизнь. – 1998, № 10.–С.78 – 79). Это нарушение обусловлено пересчетом выделяемого тепла в механическую энергию с помощью эквивалента η = 4.187 Дж/кал, который был измерен при переходе движения в тепло с помощью трения. Как мы видим, при высокоскоростных ударах механический эквивалент теплоты другой и к тому же зависит от массы: в приведенных случаях он с увеличением массы ударника падает η = 3.5, 2.8 и 1.05 Дж/кал.

В современной физике преобладают энергетические методы расчета взаимодействий: рассматривается передача энергии между взаимодействующими телами, переходы объекта на разные уровни энергии и т.д. Существует мнение, что энергетические методы более общие. В качестве аргумента из законов сохранения энергии выводят уравнение движения.

Однако, исходными все-таки являются уравнения механики. Уравнение (2.28) для энергии получено в результате интегрирования уравнения движения (2.26). Дифференцируя (2.27) (а именно так осуществляется вывод канонических уравнений Гамильтона минимизацией действия), мы , естественно, получим уравнения механики. Исходны понятия механики – скорость, ускорение, сила и масса. Понятие энергии и энергетические соотношения базируются на них. Эти основания непосредственно связаны с измерениями свойств окружающего мира, поэтому сведение задачи во всех неясных ситуациях к исходным механическим понятиям позволяет прояснить проблемы и установить истину.

ГЛАВА 3

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОПИСАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ЗАРЯЖЕННЫХ И НАМАГНИЧЕННЫХ ТЕЛ

3.1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕПОДВИЖНЫХ НАЭЛЕКТРИЗОВАННЫХ ТЕЛ

Как известно, первоначально электризацию тел получали трением их одно о другое. Позже стали известны и другие способы получения электричества. Но во всех случаях появление электричества в телах характеризуется тем, что тела начинают притягиваться или отталкиваться друг от друга. Влияние наэлектризованных тел изучалось путем измерения его силы, причем в качестве пружины Кулон использовал тонкую проволоку, по углу закручивания которой определялась сила взаимодействия между двумя наэлектризованными телами. Опытами было установлено, что силы влияния наэлектризованных тел друг на друга зависят от расстояния между ними. Оказалось, что при одной и той же электризации тел сила обратно пропорциональна квадрату расстояния.

Но так как одни и те же тела можно наэлектризовать по-разному, т.е. сила влияния между двумя телами при одном и том же расстоянии может иметь разную величину, возникла необходимость как-то охарактеризовать величину наэлектризованности. Для этого выбрали одинаковую наэлектризованность двух малых тел, которые влияют друг на друга силой в единицу, если расстояние между ними равно единице. Например, при расстоянии 1 м и силе 1 Н единица наэлектризованности называется кулоном (К). Если при этой наэлектризованности одного из тел другое имеет такую наэлектризованность, что при том же расстоянии сила их влияния будет равна q_2 единиц, то величина наэлектризованности второго тела, как было принято, равна числу q_2.

Выбранную величину электризации назвали зарядом электричества. Если же при единичной наэлектризованности второго тела наэлектризованность первого будет такой величины, что сила влияния между ними при единичном расстоянии будет q_1 единиц, то величина заряда первого тела будет равна q_1 . Поэтому при наэлектризованности тел, измеряемой зарядами q_1 и q_2, сила влияния между ними на каждую единицу заряда первого тела равна q_2, а на все q_1 единиц заряда будет равна произведению q_1 q_2. А так как сила между наэлектризованными телами обратно пропорциональна квадрату рас-

стояния R между ними, то выражение для силы при любых расстояниях в векторном виде запишется так:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2 \vec{R}}{\varepsilon R^3}. \qquad (3.1)$$

Это выражение известно как закон Кулона. Коэффициент ε введен для того, чтобы иметь возможность пользоваться величинами зарядов вне зависимости от того, в какой среде находятся взаимодействующие тела. Обычно величину заряда измеряют в какой-то определенной среде (в воздухе или в вакууме) и коэффициентом ε учитывают изменение влияния между наэлектризованными телами при помещении их с той же наэлектризованностью в другую среду. Несмотря на то, что величина наэлектризованности устанавливается по силе воздействия между телами, величины зарядов тел не изменяются при смене среды между ними. Таким образом, воздействие наэлектризованных тел друг на друга, которое может иметь разную величину в разных средах, описывается соотношением (3.1) с помощью электрических зарядов, которые не зависят от среды. Это способствовало возникновению мнения, что электрические заряды являются некоторой материальной сущностью.

Из рассмотренного видно, что заряд это не какая-то сущность или субстанция. Это введенное человеком понятие для описания воздействия наэлектризованных тел друг на друга. Наэлектризованное тело может иметь любой заряд. Если бы на таком же принципе было построено описание гравитационного воздействия, то аналогичная величина заряда для каждого тела была бы неизменной, так как любые два тела влияют друг на друга (при одном и том же расстоянии) всегда одинаково. Единицы заряда для гравитационного воздействия остались бы те же. Например, можно принять, что тело массой 123 т имеет заряд, равный 1Кл, так как оно будет притягиваться к такому же телу силой 1Н.

Со временем слово "заряд" приобретало новый смысл. С применением выражений типа: находятся заряды, изменяются заряды, взаимодействуют заряды – развилось понимание заряда как самостоятельной сущности. С открытием электронов (как частиц с одинаковым электрическим зарядом), утвердилось мнение о существовании зарядов в виде некоторой субстанции. Наличие электрона с постоянным свойством воздействовать на себе подобный всегда одним и тем же образом, не доказывает существования электрической субстанции. Введение такой субстанции аналогично тому, как если бы при воздействии Земли на тело и тепловоза на вагоны вводились бы субстанции тяжести и тепловозной тяги. Несмотря на то что "субстанция" и "воздействие" не только неравнозначные понятия, но и вообще представляют собой несравнимые объекты, в современной физике по аналогии с электричеством введена субстанция для гравитационного влияния в виде гравитонов.

Представление зарядов как носителей электрической субстанции способствовало появлению утверждений о сохранении зарядов, хотя опыты

убеждают нас о появлении и исчезновении электризации. Убеждение о сохранении зарядов в качестве субстанции привело к утверждению о независимости сил взаимодействия наэлектризованных тел от их относительного движения, которое, как будет показано ниже, является ошибочным.

При соединении наэлектризованных тел проводником величина наэлектризованности изменяется, а в проводнике происходят определенные изменения, например нагрев. Введена скорость изменения наэлектризованности

$$I = \frac{\mathbf{d}q}{\mathbf{d}t}, \qquad (3.2)$$

которая названа электрическим током. С точки зрения электрических сил важен тот факт, что при наличии тока в проводящем теле существует воздействие этого тела на магнит. Опытами Роуланда, Эйхенвальда, Рентгена и др. было установлено, что не только изменение наэлектризованности тел, но и движение тел с неизменной наэлектризованностью вызывает ускоренное движение намагниченных тел, т.е. влияет на них. Возможно, в связи с этим многие стали представлять ток в проводнике как движение зарядов.

Движутся ли заряды или электрическая субстанция, существуют кванты энергии и тому подобные гипотетические модели этого явления – мы не будем рассматривать и принимать во внимание. Перед нами стоит четкая и определенная задача – иметь возможность определять взаимодействие наэлектризованных и намагниченных тел в случае изменения их электризации и намагниченности или при их движении. Такая возможность может быть достигнута лишь измерением воздействий эталонных тел друг на друга, находящихся в определенных состояниях, и сравнением величины состояния рассматриваемых тел с соответствующими состояниями эталонных тел, а не введением предполагаемых механизмов этих воздействий. Так, для наэлектризованных тел измеряется эталонное воздействие тел с такой электризацией, когда на расстоянии в одну единицу они притягиваются с силой также в одну единицу. Величина наэлектризованности в виде заряда для любого тела измеряется сравнением его силы влияния с силой эталонного влияния. Необходимо отметить, что величина заряда может быть измерена сравнением и других свойств наэлектризованных тел, например выделенного вещества при электролизе и т.п. Однако все сравнения основываются на единицах электричества, определенных по взаимодействию тел.

3.2. ПРОБЛЕМЫ ОПИСАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ТЕЛ

Сила взаимодействия двух неподвижных заряженных тел выражена соотношением (3.1). Знание силы и массы каждого из тел m_1 и m_2 достаточно для определения их ускорений w_1 и w_2 и последующих движений. Но когда начнутся движения тел, будет ли величина силы описываться тем же соот-

ношением (3.1) или она будет зависеть от скорости их относительного движения?

Прежде чем ответить на этот вопрос, рассмотрим, каким образом можно было бы определить зависимость силы от скорости относительного движения тел. Если при покоящихся телах силу влияния их друг на друга можно измерить помещенной между ними пружиной, то в случае движения одного из тел пружину можно присоединять только ко второму телу. Движущееся тело будет осуществлять свое движение, а находящееся под его влиянием неподвижное тело будет деформировать пружину, второй конец которой теперь должен быть присоединен либо к установке, либо к Земле. Величина деформации пружины представляет величину силы на неподвижное тело от движущегося. А так как известен коэффициент соответствия m (единица ускорения неподвижного тела соответствует m единицам силы), то этим измерением определится и его ускорение движения. При отсоединении пружины тело начнет с этим ускорением двигаться относительно того тела, с которым был связан второй конец пружины, т.е. относительно Земли. Поэтому ускорение, определенное таким образом, представляет изменение движения тела относительно Земли.

Измеряя таким образом силу на неподвижное тело при различных скоростях движущегося тела, можно получить выражение для силы, а следовательно, и для ускорения движения неподвижного тела в зависимости от скорости. Но движущееся тело тоже испытывает влияние неподвижного. Можно ли определить его ускорение?

В случае неподвижных взаимодействующих тел деформации пружины относятся как к одному, так и к другому телу. При известных массах тел знание силы их влияния достаточно для определения ускорений.

Можем ли мы сказать, что в случае одного движущегося тела деформация пружины, которую совершает неподвижное тело, будет также представлять силу на движущееся тело, а следовательно, и выражать его ускорение? Ответить на этот вопрос можно было бы непосредственным измерением силы на движущееся тело.

Для этого нужно соединить его пружиной с более массивным телом, которое не вносит изменения во взаимодействие с неподвижным телом и движется с необходимой постоянной скоростью относительно неподвижного. Так как такие измерения нам неизвестны, то будем искать ответ на вопрос, основываясь на косвенных фактах. В результате взаимодействия каждое из двух тел, движущееся и первоначально неподвижное, начинают двигаться ускоренно. Силы, описывающие движение первого тела $F_{12}= m_1w_1$ и движение второго тела $F_{21} = m_2w_2$, равны. Поэтому ускорения тел будут обратно пропорциональны массам, $w_1/w_2 = m_2/m_1$. В этом случае точка с расстояниями от объектов, обратно пропорциональными массам ($R_1/R_2 = m_2/m_1$), и известная как центр масс системы тел должна перемещаться без ускорения. Это положение подтверждается. Из наблюдений всех случаев движения таких тел в природе следует, что при отсутствии внешнего влияния на тела системы их центр масс движется равномерно и прямолинейно или покоится.

Благодаря изложенному факту приходим к выводу о равенстве сил, с которыми два объекта взаимодействуют друг с другом, и в случае их относительного движения.

Напомним, что положение о равенстве сил является следствием метода описания взаимодействия в природе с помощью сил, а не выбором самой природы. Метод сам по себе исключает существование разных по величине сил воздействия на каждое из двух тел.

Итак, измерив силу по величине деформации пружины неподвижным телом, мы можем, зная массы тел, рассчитать ускорение движущегося и первоначально неподвижного тел. При этом величина силы может зависеть от скорости движущегося тела, но тем не менее, рассмотренным способом мы можем определить ускорение движения тел, а следовательно, выяснить всю картину движения.

3.3. ИЗМЕНЕНИЕ СИЛЫ ВОЗДЕЙСТВИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЗАРЯЖЕННОГО ТЕЛА И МАГНИТА

Если тело с зарядом q_1 движется со скоростью υ относительно второго с зарядом q_2, то эти тела будут взаимодействовать, сообщая друг другу ускорения. Измерив силу F_{21} воздействия движущегося тела на неподвижное, мы могли бы определить зависимость силы от скорости. Так как подобные измерения не проводились, то рассмотрим результаты других опытов, на основании которых можно вычислить силу воздействия движущегося заряженного тела на неподвижное [112, 113, 115, 116].

Начнем с опытов, в которых изучалось воздействие движущихся заряженных тел на магнит (под магнитом подразумевается намагниченное тело или электромагнит). Если неподвижное заряженное тело никакого влияния на магнит не оказывает, то при наличии движения относительно магнита возникает взаимодействие между ними. Это взаимодействие изучалось в опытах по влиянию вращающегося заряженного конденсатора на магнитную стрелку, которые проводились Г. Роуландом, А. Эйхенвальдом и др. Оно сравнивалось с воздействием конденсатора, по которому пропускался ток так, чтобы направление тока находилось в соответствии с движением наэлектризованных пластин конденсатора. В результате было установлено, что воздействие на магнит от вращающегося заряженного конденсатора равно воздействию конденсатора с таким током, при котором происходит изменение заряда электричества в единицу времени, равное изменению заряда при вращении конденсатора. Этот результат свидетельствует , что воздействие на магнит тела с изменяющейся наэлектризованностью зависит от скорости изменения этой наэлектризованности, т.е. от тока $I = \mathbf{d}q/\mathbf{d}t$. Следовательно, от тока I зависит сила воздействия на магнит независимо от того, выражено ли током изменение электрической силы вследствие тока проводимости или вследствие движения заряженного тела. Итак, изменение электрической си-

лы воздействия от движущегося заряженного тела, выражаемое током I, приводит к появлению силы воздействия этого тела на магнит.

Рассмотрим второй опытный факт, при котором измерялась сила воздействия проводника с током на магнит. Эксперименты по воздействию проводника с током на магнитную стрелку или магнит при разных конфигурациях тел проводились разными учеными, в том числе Эрстедом, Ампером и др. Лаплас установил, что воздействие проводника с током на магнит уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния между ними. В результате этих экспериментов получено выражение для приращения напряженности $\mathbf{d}\vec{H}$, создаваемой участком проводника длиной $\mathbf{d}l$ с током I и расстоянием R от него до магнита в виде

$$\mathbf{d}\vec{H} = \frac{I}{R^3 c}\left[\mathbf{d}\vec{l} \times \vec{R}\right], \tag{3.3}$$

которое известно как закон Био – Савара – Лапласа. Здесь $\vec{H}$ представляет величину силы на единичный магнитный полюс.

Так как влияние движущегося заряженного тела можно охарактеризовать током I, то выражение (3.3) описывает и его воздействие на магнит. Величина воздействия определяется тем, какой величиной тока I будет представляться движение заряженного тела.

Но магнит, в свою очередь, при движении воздействует на заряженное тело. Соотношение, описывающее это воздействие, установлено М. Фарадеем на основании опытов, в которых производилось движение магнита относительно проводника. На концах такого проводника появлялись заряды, которые определялись в виде разности потенциалов. Это означает появление силы воздействия на заряженное тело, если оно будет помещено на месте проводника. В опытах измерялась разность потенциалов на концах проводника, а не сила на заряженное тело, как это требуется при нашем рассмотрении. Однако последняя может быть вычислена по разности потенциалов.

Величина появляющегося заряда на концах проводника зависит от величины, характеризующей воздействие магнита на другой магнит, и его скорости движения. Наэлектризованность на концах проводника появляется также и при неподвижном магните, если изменяется сила воздействия его на другой магнит. Например, электромагнит, в обмотке которого меняется ток, также создает заряд на концах проводника.

Как в первом случае движущегося постоянного магнита, так и во втором случае неподвижного с изменяющейся величиной намагниченности, величина появляющейся электризации в проводнике могла быть установлена в зависимости от скорости изменения напряженности $\vec{H}$ в месте нахождения проводника. Наводимое электричество измерялось по величине тока в замкнутом проводящем контуре, а напряженность $\vec{H}$ рассматривалась через магнитный поток, проходящий через контур, в следующем виде:

$$\Phi = \mu \int \vec{H}\mathbf{d}\vec{s}\,, \tag{3.4}$$

где μ – магнитная проницаемость, характеризующая среду, в которой находится проводник.

В итоге была установлена зависимость наэлектризованности от скорости изменения потока Φ магнитной напряженности $\vec{H}$ через этот контур. Данная зависимость носит название закона индукции Фарадея и имеет вид

$$u = -\frac{1}{c}\frac{\mathbf{d}\Phi}{\mathbf{d}t}\,. \tag{3.5}$$

Здесь u в системе единиц СГС представляет электродвижущую силу в замкнутом проводящем контуре, c – скорость света.

Итак, появляется воздействие u на заряженное тело, которое в соотношении (3.5) обусловлено скоростью изменения воздействия на магнит в том месте, где находится заряженное тело.

Мы рассмотрели три экспериментальных факта: 1) движущееся заряженное тело по воздействию на магнит эквивалентно току; 2) сила воздействия тока на магнит определяется законом (3.3); 3) воздействие движущегося магнита на заряд осуществляется согласно выражению (3.5). Возвратимся теперь к рассмотрению воздействия движущегося тела с зарядом q_1. При его движении возникает воздействие на магнит, которое зависит от скорости изменения воздействия на заряженное тело в месте нахождения магнита. Это положение выражено соотношением (3.3). Но при движении заряженного тела воздействие на магнит будет изменяться и, как свидетельствует соотношение (3.5), в том месте будет возникать воздействие на заряженное тело. Данное воздействие пропорционально скорости изменения магнитного воздействия, которое, в свою очередь, согласно соотношению (3.3), пропорционально скорости изменения электрического воздействия. Поэтому совместно соотношения (3.3) и (3.5) выражают тот факт, что от движущегося тела с зарядом q_1 возникает дополнительное воздействие на неподвижное тело с зарядом q_2 , зависящее от изменения основного воздействия, которое создается телом q_1 в случае, когда оно покоится относительно тела q_2.

Из приведенных опытов следует, что воздействие движущегося заряженного тела на неподвижное происходит не так, как их взаимодействие при покое. Во всех трех опытах электрические и магнитные эффекты появляются при наличии относительного движения двух взаимодействующих тел. Например, в катушке появится ток лишь при относительном движении магнита. При совместном движении магнита и катушки с любой скоростью и по отношению к любым телам в катушке тока не будет, если нет движения магнита относительно нее. Следовательно, взаимодействие двух наэлектризованных тел зависит от их относительной скорости.

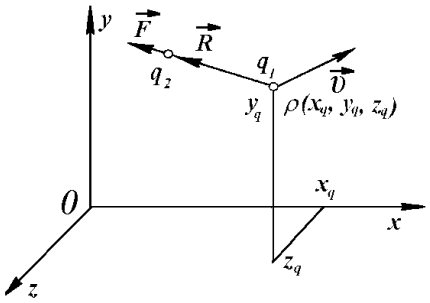


Рис.3.1. Воздействие движущегося точечного тела с зарядом q_1 на неподвижное точечное тело с зарядом q_2.

расстоянии, равном единице, деформировали пружину на единицу силы. Но при наличии относительного движения этих тел величина силы зависит от скорости. Значит тела на том же расстоянии будут воздействовать друг на друга силой, отличной от единицы. Так как этой величиной силы определяются заряды тел, то другой станет их величина. Таким образом, при наличии движения заряженных тел величина заряда изменяется. В электродинамике принято величину заряда тела считать неизменной. В связи с этим в опытах Кауфмана и подобных опытах по изменению отношения заряда к массе электронов и других частиц пришли к выводу об изменении массы этих частиц при их движении. Но поскольку воздействие зависит от движения, данный вывод является ошибочным. Опыт Кауфмана подтверждает изменение заряда тела при его движении, однако в физике величину заряда принято считать постоянной. Поэтому в дальнейшем будем полагать ее постоянной, но учитывать, что величина заряда определяется по силовому воздействию неподвижных тел.

3.4. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ОСНОВАНИЙ

Для определения воздействия между относительно движущимися телами введем координатную систему *x, y, z* (см.рис.3.1), в которой координаты, относящиеся к движущемуся телу с зарядом q_1, обозначим x_q, y_q, z_q соответственно. Пусть $\rho(x_q, y_q, z_q)$ есть плотность наэлектризованности, с помощью которой заряд тела определяется как

$$q_1 = \int_V \rho \mathbf{d}V , \qquad (3.6)$$

где V – объем тела, а элемент объема равен

$$\mathbf{d}V = \mathbf{d}x_q \mathbf{d}y_q \mathbf{d}z_q . \qquad (3.7)$$

Элемент объема $\mathbf{d}V$ имеет заряд $\mathbf{d}q_1 = \rho \mathbf{d}V$ и воздействует на заряд q_2 силой согласно закону Кулона (3.1). Интегрируя ее по всему объему, получаем

$$\vec{F} = \frac{q_2}{\varepsilon} \int_V \frac{\rho \vec{R}}{R^3} \mathbf{d}V , \qquad (3.8)$$

где $\vec{R} = \vec{r}(x, y, z) - \vec{r}(x_q, y_q, z_q)$ –. радиус-вектор от заряда q_1 к заряду q_2. После интегрирования (3.8) сила $\vec{F}$ будет функцией только координат заряда q_2, т.е. $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$. В любой точке координат можно поместить тело q_2 и определить силу. В математическом смысле силу $\vec{F}$ можно рассматривать как функцию координат и применять к ней все математические операции.

Входящий в подынтегральное выражение (3.8) сомножитель $\vec{R}/R^3$ может быть записан как

$$\vec{R}/R^3 = -\mathrm{grad}(1/R) , \qquad (3.9)$$

где в операции градиента дифференцирование осуществляется по координатам *x, y, z*. С учетом (3.9) сила (3.8) будет:

$$\vec{F} = -\frac{q_2}{\varepsilon} \int_V \mathrm{grad}\left(\frac{\rho}{r}\right) \mathbf{d}V . \qquad (3.10)$$

Найдем дивергенцию от правой и левой частей (3.10) по переменным *x, y, z*:

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = -\frac{q_2}{\varepsilon} \int_V \mathrm{div}\left[\mathrm{grad}\left(\frac{\rho}{r}\right)\right] \mathbf{d}V = -\frac{q_2}{\varepsilon} \int_V \frac{\Delta\rho}{r} \mathbf{d}V . \qquad (3.11)$$

Воспользуемся теоремой Пуассона для скалярной функции U:

$$U = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\Delta U}{r} \mathbf{d}V . \qquad (3.12)$$

С учетом (3.12) выражение (3.11) примет вид:

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = \frac{4\pi q_2}{\varepsilon} \rho . \qquad (3.13)$$

Из выражения (3.13) видно, что производные от силы по координатам *x, y, z* зависят от плотности заряда в этой точке. По существу, соотношение (3.13) не вносит ничего нового, а отражает свойство заряда q_1 и его плотности ρ как силовой характеристики воздействия на тело с зарядом q_2. Оно является другой формой записи закона Кулона, а именно дифференциальной, когда заряд воздействующего тела выражен в виде плотности наэлектризованности ρ и распределен по пространству, описываемому координатами *x, y, z*. Если закон Кулона описывает взаимодействие двух точечных тел, то закон взаимодействия в дифференциальном виде (3.13) описывает воздействие заряженных тел любой конфигурации, плотность заряда которой задается ее плотностью $\rho(x_q, y_q, z_q)$.

Для неподвижных зарядов представляют интерес некоторые дифференциальные уравнения. Для их вывода возьмем операцию rot от правой и левой частей (3.10). Так как для любой скалярной функции rot(grad U) = 0, то

$$\operatorname{rot}\vec{F} = 0\,. \qquad (3.14)$$

Такое распределение сил, создаваемое неподвижными зарядами, называется безвихревым. Теперь возьмем операцию grad от правой и левой частей (3.13):

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F}) = \Delta\vec{F} + \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \frac{4\pi q_2}{\varepsilon}\operatorname{grad}\rho\,.$$

С учетом (3.14) это уравнение принимает вид

$$\Delta\vec{F} = \frac{4\pi q_2}{\varepsilon}\operatorname{grad}\rho\,. \qquad (3.15)$$

Оно называется уравнением Лапласа и, как и уравнение Пуассона (3.13), является дифференциальной формой записи закона Кулона.

Рассмотрим воздействие движущегося тела с зарядом q_1 на неподвижное второе q_2. При движении заряженного элемента $\mathbf{d}V$ первого тела происходит изменение во времени величины заряда в точках, неподвижных относительно второго тела. То есть относительно него происходит ток электричества, который определяется как скорость изменения заряда: $I = \dfrac{\mathbf{d}q_1}{\mathbf{d}t}$. Выражая величину заряда через плотность согласно (3.6) и дифференцируя, получаем

$$I = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\int\rho\mathbf{d}V = \int\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathbf{d}V + \int\operatorname{div}(\rho\vec{v})\mathbf{d}V\,.$$

Здесь интегрирование осуществляется по координатам x_q, y_q, z_q воздействующего заряда q_1 , а не по координатам x, y, z, в которых может находиться заряд q_2. Частную производную по времени можно выразить через силу $\vec{F}$ согласно закону (3.13):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi q_2}\operatorname{div}\left(\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}\right). \qquad (3.16)$$

После подстановки производной получаем выражение для тока электричества I, создаваемого движущимся зарядом q_1 :

$$I = \int\operatorname{div}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi q_2}\frac{\partial\vec{F}}{\partial t} + \rho\vec{v}\right)\mathbf{d}V\,. \qquad (3.17)$$

Как уже упоминалось, движущееся заряженное тело оказывает воздействие на магнит, которое согласно закону Био – Савара – Лапласа (3.3) пропорционально току (3.17). Преобразуем выражение (3.3) к распределенным в пространстве x, y, z величинам. С этой целью проинтегрируем его для бесконечного прямого проводника с током I (см. рис. 3.2). Здесь $\mathbf{d}\vec{l}$ – элемент проводника, совпадающий по направлению с током, а $\vec{R}$ – расстояние его до магнита. Тогда, с учетом геометрических соотношений

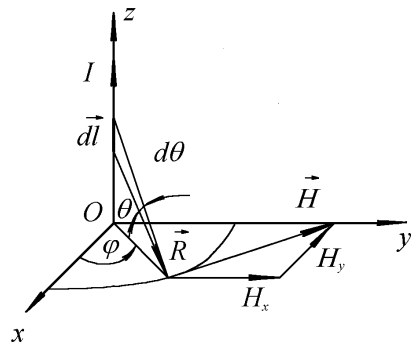


Рис. 3.2. Магнитная напряженность бесконечного проводника с током.

$$[\mathbf{d}\vec{l}\times\vec{R}] = \vec{\tau}\,\mathbf{d}l\,R\cos\theta,$$

$$\mathbf{d}l\cos\theta = R\mathbf{d}\theta \quad \text{и} \quad R = R_P/\cos\theta,$$

где $\vec{\tau}$ – орт касательной к окружности в плоскости xy, а R_P – наименьшее расстояние от точки x, y до проводника с током I, магнитная напряженность (3.3) запишется:

$$\vec{H} = \frac{I\vec{\tau}}{c}\int\frac{\mathbf{d}l\cos\theta}{R^2} = \frac{I\vec{\tau}}{R_P}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,\mathbf{d}\theta = \frac{2I\vec{\tau}}{cR_P}\,. \qquad (3.18)$$

Вектор $\vec{H}$ направлен (см. рис. 3.2) по окружности, в центре которой проходит ток перпендикулярно к ее плоскости, и в декартовой системе координат он может быть записан так:

$$\vec{H} = \frac{2I}{cR_P}\left(-\vec{i}\,\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi\right).$$

Магнитная напряженность $\vec{H}$ – величина силы воздействия на магнитный полюс с магнитным зарядом M = 1. Источником электрической силы являются заряды. Математическая связь между плотностью зарядов и дивергенцией силы выражена соотношением (3.13). Определим дивергенцию магнитной напряженности:

$$\operatorname{div}\vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = \frac{2I}{c}\left[-\sin\varphi\frac{\partial\left(1/R_P\right)}{\partial x} + \cos\varphi\frac{\partial\left(1/R_P\right)}{\partial y}\right].$$

Так как $R_P = \sqrt{x^2+y^2}$, а $\sin\varphi = x/R_P$, $\cos\varphi = y/R_P$, то после подстановки производных получаем

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0\,. \qquad (3.19)$$

Соотношение (3.19) свидетельствует о таком характере магнитной силы, который не может быть выражен в виде отдельных магнитных зарядов. Источники магнитной силы существуют в виде двух противоположных магнитных полюсов – северного и южного.

Выражение (3.18) можно записать в виде

$$2\pi R_P \vec{H} = \frac{4\pi I}{c}\vec{\tau},$$

т.е. циркуляция магнитной напряженности по кольцевому контуру определяется только величиной тока I, охваченного контуром. Его можно переписать так:

$$\oint_l \vec{H}\mathbf{d}\vec{l} = \frac{4\pi I}{c}. \qquad (3.20)$$

Используя теорему Стокса для интеграла по замкнутому контуру, запишем (3.20) следующим образом:

$$\int \mathrm{rot}\,\vec{H}\ \mathbf{d}\vec{S} = \frac{4\pi I}{c}, \qquad (3.21)$$

а в отношении (3.17) для тока с помощью теоремы Остроградского-Гаусса интеграл по объему выразим через интеграл по поверхности:

$$I = \int\left(\frac{\varepsilon}{4\pi\pi_2}\frac{\partial\vec{F}}{\partial t} + \rho\vec{v}\right)d\vec{S}.$$

После подстановки в тока (3.21) получаем следующее выражение:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi q_2}\frac{\partial\vec{F}}{\partial t} + \rho\vec{v}\right). \qquad (3.22)$$

Этим соотношением определяется сила воздействия $\vec{H}$ на единичный магнитный полюс, обусловленная движущимся заряженным телом q_1. Оно известно как второй закон Максвелла [65, 96] и, по существу, является другой формой записи экспериментального закона Био – Савара – Лапласа (3.3).

Воздействие $\vec{H}$ на магнит возникает в месте нахождения тела с зарядом q_2 (см.рис.3.1). Так как тело q_1 движется, магнитное воздействие $\vec{H}$ изменяется. В соответствии с соотношениями (3.4) и (3.5) в месте нахождения q_2 будет появляться воздействие на заряженное тело. В (3.4) рассматривается поток магнитной напряженности $\vec{H}$ через поверхность S, опирающуюся на контур l, в котором согласно (3.5) индуцируется электродвижущая сила u. Ее

можно выразить через циркуляцию электрической напряженности $E = \vec{F}/q_2$ следующим образом:

$$u = \oint\frac{\vec{F}}{q_2}\mathbf{d}\vec{l} = \int \mathrm{rot}\frac{\vec{F}}{q_2}\mathbf{d}\vec{S}. \qquad (3.23)$$

После подстановки в (3.5) u и Φ закон индукции Фарадея принимает вид

$$\int \mathrm{rot}\frac{\vec{F}}{q_2}\mathbf{d}\vec{S} = -\frac{\mu}{c}\int\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\mathbf{d}\vec{S}.$$

Поскольку это выражение должно быть справедливым при любых подынтегральных функциях, отсюда следует соотношение

$$\mathrm{rot}\frac{\vec{F}}{q_2} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \qquad (3.24)$$

которое известно как первое уравнение Максвелла.

3.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИЛ

Как мы видим, первое и второе уравнения Максвелла являются другой формой записи двух экспериментальных законов: электрической индукции Фарадея и магнитного воздействия тока Био – Савара – Лапласа соответственно. Движущееся со скоростью $\vec{v}$ заряженное тело, плотность наэлектризованности которого ρ, в соответствии с уравнениями (3.24) и (3.22) создает эти воздействия. Если мы исключим из уравнений величину $\vec{H}$, то получим одно уравнение для величины воздействия движущегося со скоростью $\vec{v}$ заряженного тела на неподвижное. С этой целью возьмем операцию rot от (3.24)

$$\mathrm{rot}\left[\mathrm{rot}\frac{\vec{F}}{q_2}\right] = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{rot}\,\vec{H}\right).$$

Проводя последовательные преобразования левой части этого соотношения, получаем

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\frac{\vec{F}}{q_2} - \frac{\Delta\vec{F}}{q_2} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\mathrm{grad}\,\rho - \frac{\Delta\vec{F}}{q_2} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{rot}\,\vec{H}\right). \qquad (3.25)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, а в первом слагаемом $\mathrm{div}\frac{\vec{F}}{q_2}$ выражена через плотность заряда ρ в соответствии с (3.13).

Теперь продифференцируем по времени второе уравнение Максвелла (3.22)

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{H}=\frac{\varepsilon}{cq_2}\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial t^2}+\frac{4\pi}{c}\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t}$$

и подставим в правую часть (3.25). После преобразования имеем

$$\Delta\vec{F}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial t^2}=\frac{4\pi\mu q_2}{c^2}\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t}+\frac{4\pi q_2}{\varepsilon}\operatorname{grad}\rho\,. \qquad (3.26)$$

Введем обозначение

$$c_1=\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad (3.27)$$

и запишем это уравнение так:

$$\Delta\vec{F}-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial t^2}=\frac{4\pi q_2}{\varepsilon}\left[\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t}+\operatorname{grad}\rho\right]. \qquad (3.28)$$

Оно называется уравнением Даламбера. Это уравнение без правой части

$$\Delta\vec{F}-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial t^2}=0 \qquad (3.29)$$

называется волновым. Оно допускает [24, 52] частные решения типа

$$\vec{F}(r,t)=\vec{F}_k(r)\mathrm{e}^{\mp i\omega t},\ \ \omega=kc_1, \qquad (3.30)$$

где k – произвольная константа, определяемая краевыми условиями. Частным случаем (3.30) является решение

$$\vec{F}(x,y,z,t)=\vec{F}_0\cos\omega\left[t\mp\left(k_1x+k_2y+k_3z\right)/c+t_0\right], \qquad (3.31)$$

где $k_1^2+k_2^2+k_3^2=1$, t_0 – константа интегрирования.

Решение (3.31) представляет собой плоские волны, где k_1, k_2, k_3 – направляющие косинусы плоскости, на которой сохраняется постоянное значение силы $\vec{F}_0$. Эта плоскость перемещается в пространстве со скоростью c_1, которую называют скоростью распространения электромагнитного взаимодействия.

Если заряженные объекты неподвижны и неизменны (ρ = const), их воздействие на заряд q_2 постоянно ($\partial\vec{F}/\partial t=0$), то уравнение (3.28) превращается в уравнение Лапласа (3.15). Для движущихся или нестационарных зарядов сила их воздействия будет другой, она определяется уравнением Даламбера (3.28).

Как мы уже рассматривали, движущееся заряженное тело воздействует на магнит. Соотношения (3.22) и (3.24) позволяют определить такое воздействие в зависимости от плотности его заряда и скорости $\vec{v}$ тела относительно магнита ρ. С этой целью возьмем операцию rot от правой и левой частей второго уравнения Максвелла (3.22):

$$\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\vec{H}\right)=-\Delta\vec{H}+\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{H}\right)+\frac{\varepsilon}{cq_2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)+\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}(\rho\vec{v}) \qquad (3.32)$$

и продифференцируем по времени первое уравнение Максвелла (3.24)

$$\frac{1}{q_2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}. \qquad (3.33)$$

Исключая $\vec{F}$ из выражений (3.32) и (3.33), с учетом (3.27) получаем уравнение Даламбера для магнитного воздействия движущихся заряженных тел

$$\Delta\vec{H}-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}(\rho\vec{v}). \qquad (3.34)$$

ГЛАВА 4

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ТОЧЕЧНЫХ ТЕЛ

4.1. УРАВНЕНИЕ ДАЛАМБЕРА ДЛЯ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА

Если размеры тел значительно меньше расстояний между ними, такие тела можно считать точечными. Определим силу, с которой действует движущийся с постоянной скоростью $\vec{v}$ точечный заряд q_1 на другой точечный заряд q_2 (см.рис.4.1). Движение рассматривается относительное: заряд q_1 движется относительно заряда q_2. В декартовой системе координат заряд q_2 может находиться в любой точке x, y, z. Заряд q_1 в момент t=0 находится в начале координат.

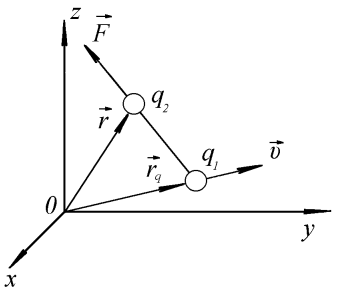


Рис.4.1. К выводу уравнения Даламбера для точечного заряженного тела.

Плотность заряда q_1 как точечного объекта можно записать с помощью δ-функции [17], которая в зависимости от координаты x имеет следующий вид:

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\, i(x-x')k\mathbf{d}k = \begin{cases} 0, x \neq x', \\ \infty, x = x' \end{cases} \qquad (4.1)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')\mathbf{d}x = 1. \qquad (4.2)$$

Как видим δ-функция имеет только одно ненулевое значение и оно равно бесконечности в точке x', где находится частица. Во всех остальных точках она равна нулю. Однако интеграл от δ-функции по всему диапазону изменения x является конечной величиной и равен единице.

С помощью δ-функции плотность заряда q_1 в пространственной системе координат запишется так:

$$\rho = q_1\delta(x-\upsilon_x t)\,\delta(y-\upsilon_y t)\delta(z-\upsilon_z t), \qquad (4.3)$$

где $\vec{r} = \vec{i}\,x + \vec{j}y + \vec{k}z$ – радиус-вектор точки пространства;

$\vec{r}_q = \vec{i}\,\upsilon_x t + \vec{j}\upsilon_y t + \vec{k}\upsilon_z t$ – радиус-вектор заряда q_1.

Тогда после подстановки выражений для δ-функций получаем

$$\rho = \frac{q_1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\, i\left[k_1(x-\upsilon_x t) + k_2(y-\upsilon_y t) + k_3(z-\upsilon_z t)\right]\mathbf{d}k\,, \qquad (4.4)$$

где интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{d}k$ является тройным интегралом $\iiint \mathbf{d}k_1\mathbf{d}k_2\mathbf{d}k_3$. С учетом (4.2) нетрудно убедиться, что интеграл по всему пространству $\int \rho\mathbf{d}x\mathbf{d}y\mathbf{d}z = q_1$, где ρ определяется выражением (4.4). Таким образом, δ-функция позволила распределить точечный заряд по всему пространству с одновременной локализацией его в месте нахождения заряда q_1. Теперь мы можем воспользоваться уравнением Даламбера (3.28), в котором нестационарная плотность электричества ρ действует силой $\vec{F}$ на неподвижный заряд q_2. Далее будем рассматривать единичную силу

$$\vec{E} = \vec{F}/q_2\,, \qquad (4.5)$$

действующую на единицу заряда q_2. Следуя традиции, будем называть ее электрической напряженностью. Перепишем уравнение Даламбера (3.28) в проекциях на оси координат с учетом (4.5):

$$\Box E_x = \frac{4\pi}{\varepsilon}\left[\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}\upsilon_x\right];$$

$$\Box E_y = \frac{4\pi}{\varepsilon}\left[\frac{\partial\rho}{\partial y} + \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}\upsilon_y\right]; \qquad (4.6)$$

$$\Box E_z = \frac{4\pi}{\varepsilon}\left[\frac{\partial\rho}{\partial z} + \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}\upsilon_z\right],$$

где $\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ – оператор Даламбера.

После подстановки плотности заряда (4.4) для проекции E_x имеем:

$$\Box E_x = \frac{q_1 i}{2\pi^2\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(1-\beta_x^2\right)k_1 - \beta_x\beta_y k_2 - \beta_x\beta_z k_3\right]\exp(i\,r_v)\mathbf{d}k\,, \qquad (4.7)$$

где

$$r_v = k_1(x-\upsilon_x t) + k_2(y-\upsilon_y t) + k_3(z-\upsilon_z t), \qquad (4.8)$$

$$\beta_x = \frac{\upsilon_x}{c_1}, \quad \beta_y = \frac{\upsilon_y}{c_1}, \quad \beta_z = \frac{\upsilon_z}{c_1}.$$

Уравнением Даламбера определяется x-проекция силы воздействия движущегося заряда q_1 на единицу неподвижного заряда q_2. Аналогичным образом запишется составляющая силы на оси y и z.

4.2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДАЛАМБЕРА

Оператор Даламбера не зависит от переменных интегрирования в правой части k_1, k_2, k_3. Поэтому символически уравнение (4.7) можно записать так:

$$E_x = \frac{q_1 i}{2\pi^2\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(1-\beta_x^2\right)k_1 - \beta_x\beta_y k_2 - \beta_x\beta_z k_3\right]\Box^{-1}\exp\,(i\,r_v)\mathbf{d}k\,, \qquad (4.9)$$

где $r_v = k_1(x-\upsilon_x t) + k_2(y-\upsilon_y t) + k_3(z-\upsilon_z t)$.

Напряженность E_x будет представлена в виде интеграла, если определится

$$\Box^{-1}\exp\,(i\,r_v) = G\,. \qquad (4.10)$$

Функцию G называют функцией Грина. Ее можно теперь отыскать из уравнения

$$\nabla G = \exp(i r_v), \tag{4.11}$$

которое является линейным дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных с правой частью. Его решение складывается из частного решения от правой части и общего решения $\nabla G = 0$. Решение уравнения $G = 0$ дает решение от нулевой плотности заряда, т.е. представляет электрическое воздействие от какого-то другого источника. По условию задачи имеется только один заряд q_1 в пространстве. Общее решение уравнения без правой части отбрасывается: интересует только воздействие от заряда q_1. Частное решение ищется в виде

$$G = C \cdot \exp(i r_v). \tag{4.12}$$

Подстановка его в уравнение (4.11) определяет коэффициент

$$C = -\frac{1}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - (\beta_x k_1 + \beta_y k_2 + \beta_z k_3)^2}.$$

После подстановки коэффициента C в (4.12) функция Грина будет следующий:

$$G = -\frac{\exp(i r_v)}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - (\beta_x k_1 + \beta_y k_2 + \beta_z k_3)^2}. \tag{4.13}$$

Заменяя функцией Грина выражение (4.10) в (4.9), получаем электрическую напряженность в виде интеграла

$$E_x = -\frac{q_1 i}{2\pi^2 \varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\beta_x^2)k_1 - \beta_x\beta_y k_2 - \beta_x\beta_z k_3}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - (\beta_x k_1 + \beta_y k_2 + \beta_z k_3)^2} \exp(i r_v)\mathbf{d}k. \tag{4.14}$$

Преобразуем (4.14), выделив интеграл по переменной k_1:

$$E_x = -\frac{q_1 i}{2\pi^2 \varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp i\left[k_2(y - \upsilon_y t) + k_3(z - \upsilon_z t)\right] I_1 dk_2 dk_3, \tag{4.15}$$

где

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[(1-\beta_x^2)k_1 - (\beta_x\beta_y k_2 + \beta_x\beta_z k_3)\right] \exp i(x - \upsilon_x t)\, k_1}{k_1^2 - \beta_x^2 k_1^2 - 2\beta_x k_1(\beta_y k_2 + \beta_z k_3) + a^2} \mathbf{d}k_1, \tag{4.16}$$

$$a^2 = k_2^2 + k_3^2 - (\beta_y k_2 + \beta_z k_3)^2. \tag{4.17}$$

Дальше рассматривается решение интегралов (4.15) и (4.16) в случае скорости движения заряда, не превосходящей скорости c_1, т.е.

$$\beta^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 \le 1. \tag{4.18}$$

Исследуем знак выражения для a^2. При предельных значениях скорости β величина a^2 заключена в пределах от $a^2 = k_2^2 + k_3^2$ при $\beta_y = \beta_z = 0$ до $a^2 = [k_2(1-\beta_y^2)^{1/2} - k_3\beta_y]^2 > 0$ при $\beta_y^2 + \beta_z^2 = 1$, т.е. положительна.

Перепишем выражение (4.17) в виде

$$a^2 = k_2^2(1-\beta_y^2) + k_3^2(1-\beta_z^2) - 2\beta_y\beta_z k_2 k_3.$$

Оно может быть отрицательным лишь тогда, когда третье слагаемое положительно, например β_y, β_z, k_2 и k_3 имеют одинаковые знаки или попарно одинаковые знаки. Из (4.17) найдем приращение $\mathbf{d}a^2$ при изменении β:

$$\mathbf{d}a^2 = -2(\beta_y k_2 + \beta_z k_3)(k_2\mathbf{d}\beta_y + k_3\mathbf{d}\beta_z).$$

Нетрудно убедиться, что при этих знаках приращение $\mathbf{d}a^2 < 0$, т.е. a^2 монотонно изменяется. А так как в предельных случаях по β величина a^2 положительна, то и во всем диапазоне она положительна.

Введем обозначения: $e_1 = \sqrt{1-\beta_x^2}$; $b = \beta_x(\beta_y k_2 + \beta_z k_3)$; $x_q = x - \upsilon_x t$, а ζ – комплексное число. Рассмотрим интеграл по замкнутому контуру в комплексной плоскости

$$\oint \frac{(e_1^2\zeta - b)\exp ix_q\zeta}{e_1^2\zeta^2 - 2b\zeta + a^2}\mathbf{d}\zeta. \tag{4.19}$$

По этим обозначениям видно, что подынтегральное выражение (4.19) при $\zeta = k_1$ совпадает с подынтегральным выражением (4.16). Знаменатель подынтегральной функции в (4.19) имеет нули при

$$\zeta_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - a^2 e_1^2}}{e_1^2}, \tag{4.20}$$

где

$$b^2 - a^2 e_1^2 = -\left\{(k_2^2 + k_3^2)(1-\beta_x^2) - (\beta_y k_2 + \beta_z k_3)^2\right\}. \tag{4.21}$$

Способом, аналогичным при доказательстве знака a^2, можно показать, что $b^2 - a^2 e_1^2 < 0$. Тогда после подстановки значений b, a^2, e_1 в (4.21) нули знаменателя будут

$$\zeta_{1,2} = \frac{\beta_x\left(\beta_y k_2 + \beta_z k_3\right) \pm i\sqrt{\left(k_2^2 + k_3^2\right)\left(1-\beta_x^2\right) - \left(\beta_y k_2 + \beta_z k_3\right)^2}}{1-\beta_x^2}. \qquad (4.22)$$

Известно [24], что интеграл по замкнутому контуру типа (4.19) определяется через сумму вычетов C_{-1}

$$\oint f(\zeta)\exp(ix_q\zeta)\mathbf{d}\zeta = 2\pi i\zeta C_{-1}.$$

Комплексный интеграл (4.19) рассмотрим по контуру полукольца радиусом R в верхней полуплоскости комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$. Согласно (4.22), полюс ζ^+, т.е. особая точка при плюсовом знаке перед i, находится в этой полуплоскости. Разобьем интеграл (4.19) на две составляющие: по верхней полуокружности C_R и горизонтальному диаметру:

$$\oint = \int_{C_R} + \int_{-R}^{R} = 2\pi i C_{-1}\left(\zeta^+\right). \qquad (4.23)$$

Здесь в правой части записано его значение через вычет ζ^+.

По лемме Жордана интеграл по полуокружности с бесконечным радиусом $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}\frac{e_1^2\zeta - b}{e_1^2\zeta^2 - 2b\zeta + a^2}\exp ix_q\zeta\mathbf{d}\zeta$ равен нулю, если

$x_q > 0$ и $\lim\limits_{\zeta\to\infty}\frac{e_1^2\zeta - b}{e_1^2\zeta^2 - 2b\zeta + a^2}$ является конечной величиной, что и есть в данном случае. Если же $x_q = x - \upsilon_x t < 0$, то лемма Жордана будет выполняться в нижней полуплоскости и тогда интеграл (4.19) разбиваем на две составляющие по нижней полуокружности и горизонтальному диаметру:

$$\oint = 2\pi i C_{-1}\left(\zeta^-\right) = \int_{-C_R} - \int_{-R}^{R}. \qquad (4.24)$$

Таким образом, как по верхней полуокружности в (4.23), так и по нижней в (4.24) интегралы равны нулю, а интегралы по горизонтальному диаметру в пределе переходят в интеграл (4.16):

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{r}\frac{e_1^2\zeta - b}{e_1^2\zeta^2 - 2b\zeta + a^2}\exp ix_q\zeta\cdot\mathbf{d}\zeta = I_1.$$

Отсюда в соответствии с (4.23) и (4.24) решения интеграла (4.16) будут

при $x - \upsilon_x t > 0$ $\quad I_1 = 2\pi i C_{-1}(\zeta^+)$, а при $x - \upsilon_x t < 0$ $\quad I_1 = -2\pi i C_{-1}(\zeta^-)$.

Найдем вычет от полюса в верхней полуплоскости:

$$C_{-1}\left(\zeta^+\right) = \lim_{\zeta\to\zeta^+} f(\zeta)\exp\left(i x_q\zeta\right)\left(\zeta - \zeta^+\right).$$

После подстановки $f(\xi)$, согласно (4.19), получаем

$$C_{-1}\left(\zeta^+\right) = \lim_{\xi\to\xi^+}\frac{\left(e_1^2\zeta - b\right)\exp\left(i x_q\zeta\right)\left(\zeta - \zeta^+\right)}{\left(1-\beta_x\right)^2\left(\zeta - \zeta^+\right)\left(\zeta - \zeta^-\right)} = \frac{\left(e_1^2\zeta^+ - b\right)\exp\left(i x_q\zeta^+\right)}{2i\sqrt{\left(k_2^2 + k_3^2\right)\left(1-\beta_x^2\right) - \left(\beta_y k_2 + \beta_z k_3\right)^2}}.$$

Подставляя сюда e_1 и b, вычет можем записать в виде

$$C_{-1}\left(\zeta^+\right) = (1/2)\exp\left[\frac{x_q\beta_x\left(\beta_y k_2 + \beta_z k_3\right)}{1-\beta_x^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{ix_q\sqrt{\left(k_2^2 + k_3^2\right)\left(1-\beta_x^2\right) - \left(\beta_y k_2 + \beta_z k_3\right)^2}}{1-\beta_x^2}\right]. \qquad (4.25)$$

Аналогично определяется вычет от полюса в нижней полуплоскости:

$$C_{-1}\left(\zeta^-\right) = (1/2)\exp\left[\frac{x_q\beta_x\left(\beta_y k_2 + \beta_z k_3\right)}{1-\beta_x^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{ix_q\sqrt{\left(k_2^2 + k_3^2\right)\left(1-\beta_x^2\right) - \left(\beta_y k_2 + \beta_z k_3\right)^2}}{1-\beta_x^2}\right]. \qquad (4.26)$$

После подстановки вычетов в значения интеграла I_1,находим:
при $x > \upsilon_x t$

$$I_1 = \pi i\exp i(x - \upsilon_x t)\frac{\beta_x\beta_y k_2 + \beta_x\beta_z k_3}{1-\beta_x^2}\times$$
$$\times\exp\left[-(x - \upsilon_x t)\times\frac{\sqrt{\left(k_2^2 + k_3^2\right)\left(1-\beta_x^2\right) - \left(\beta_y k_2 + \beta_z k_3\right)^2}}{1-\beta_x^2}\right],$$

при $x < \upsilon_x t$

$$I_1 = -\pi i\exp i(x - \upsilon_x t)\frac{\beta_x\beta_y k_2 + \beta_x\beta_z k_3}{1-\beta_x^2}\times$$
$$\times\exp(x - \upsilon_x t)\times\frac{\sqrt{\left(k_2^2 + k_3^2\right)\left(1-\beta_x^2\right) - \left(\beta_y k_2 + \beta_z k_3\right)^2}}{1-\beta_x^2}.$$

Общее для обоих случаев выражение интеграла можно записать в виде

$$I_1 = \pi i \frac{x-\upsilon_x t}{|x-\upsilon_x t|}\exp\left[i(x-\upsilon_x t)\frac{\beta_x(\beta_y k_2+\beta_z k_3)}{1-\beta_x^2} - |x-\upsilon_x t|\times \right.$$

$$\left. \times \frac{\sqrt{(k_2^2+k_3^2)(1-\beta_x^2)-(\beta_y k_2+\beta_z k_3)^2}}{1-\beta_x^2} \right].$$

После подстановки I_1 в (4.15) электрическая напряженность запишется так:

$$E_x = \frac{q(x-\upsilon_x t)}{2\pi\varepsilon|x-\upsilon_x t|}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\left(y-\upsilon_y t+\frac{x-\upsilon_x t}{1-\beta_x^2}\beta_x\beta_y \right)k_2 + \right.$$

$$\left. +\left(z-\upsilon_z t+\frac{x-\upsilon_x t}{1-\beta_x^2}\beta_x\beta_z \right)k_3 \right] - \frac{|x-\upsilon_x t|}{1-\beta_x^2}\times \qquad (4.27)$$

$$\times\sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2}\sqrt{\frac{(k_2^2+k_3^2)(1-\beta_x^2)-(\beta_y k_2+\beta_z k_3)^2}{1-\beta_x^2-\beta_y^2}}\,\mathbf{d}k_2\mathbf{d}k_3 .$$

Введем новые обозначения:

$$L_2 = y-\upsilon_y t+\frac{x-\upsilon_x t}{1-\beta_x^2}\beta_x\beta_y , \qquad (4.28)$$

$$L_3 = z-\upsilon_z t+\frac{x-\upsilon_x t}{1-\beta_x^2}\beta_x\beta_z , \qquad (4.29)$$

$$A_g = \frac{\beta_y^2\beta_z^2}{1-\beta_x^2-\beta_y^2} , \qquad (4.30)$$

$$A_i = \sqrt{\frac{1-\beta_x^2-\beta_z^2-\beta_y^2\beta_z^2(1-\beta_x^2-\beta_y^2)^{-1}}{1-\beta_x^2-\beta_y^2}} , \qquad (4.31)$$

$$A_\pm = A_g \pm A_i i , \qquad (4.32)$$

$$u = \frac{|x-\upsilon_x t|}{1-\beta_x^2}\sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2} > 0 \qquad (4.33)$$

и заменим переменные

$$s^2 = (k_2-k_3A_+)(k_2-k_3A_-) > 0 , \qquad (4.34)$$

$$n = k_2L_2 + k_3L_3 . \qquad (4.35)$$

Так как при изменении k_2 и k_3 в одной из полуплоскостей, например $0<k_2<\infty$, $-\infty<k_3<\infty$, новые переменные s, n проходят все свои значения, например $0<s<\infty$, $-\infty<n<\infty$, то при интегрировании по n и s значение интеграла необходимо удвоить.

Подстановка новых обозначений (4.28)–(4.35) в (4.27) приводит к выражению для электрической напряженности

$$E_x = \frac{q_1(x-\upsilon_x t)}{2\pi\varepsilon|x-\upsilon_x t|}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{ i(L_2k_2+L_3k_3)-us\}\,\mathbf{d}k_2\mathbf{d}k_3 . \qquad (4.36)$$

Определим элемент площади в новых переменных n и s. Так как

$$\mathbf{d}s\mathbf{d}n = \left(\frac{\partial s}{\partial k_2}\frac{\partial n}{\partial k_3} - \frac{\partial s}{\partial k_3}\frac{\partial n}{\partial k_2} \right)\mathbf{d}k_2\mathbf{d}k_3 ,$$

то с учетом (4.34) – (4.35) получаем

$$\mathbf{d}s\mathbf{d}n = \frac{\mathbf{d}k_2\mathbf{d}k_3}{s}\left[k_2(L_3+L_2A_g) - k_3(L_3A_g+L_2A^2) \right], \qquad (4.37)$$

где

$$A^2 = \frac{\beta^2{}_y\beta_z^2}{(1-\beta_x^2-\beta_y^2)^2} + \frac{1-\beta_x^2-\beta_z^2-\frac{\beta^2{}_y\beta^2{}_z}{1-\beta_x^2-\beta_y^2}}{1-\beta_x^2-\beta_y^2} . \qquad (4.38)$$

С учетом (4.34) – (4.35) выразим k_2 и k_3 через s и n:

$$k_2 = \frac{s}{L_2} - k_3\frac{L_3}{L_2} , \qquad (4.39)$$

$$s^2 = k_2^2 - 2k_2k_3A_g + k_3^2A^2 ,$$

$$k_3^2\left(\frac{L_3^2}{L_2^2} + 2A_g\frac{L_3}{L_2} + A^2 \right) - 2k_3n\left(\frac{L_3}{L_2^2} + \frac{A_g}{L_2} \right) + \frac{n^2}{L_2^2} - s^2 = 0 .$$

Решение полученного квадратного уравнения дает

$$k_3 = \frac{n(L_3+L_2A_g) \pm L_2\sqrt{s^2B^2-n^2A_i^2}}{B^2} , \qquad (4.40)$$

где

$$B^2 = L_3^2 + 2A_g L_3 L_2 + A^2 L_2^2 . \qquad (4.41)$$

Определяется и k_2 при подстановке k_3 в (4.39):

$$k_2 = \frac{n\left(L_3 A_g + L_2 A^2\right) \mp L_3\sqrt{s^2B^2 - n^2A_i^2}}{B^2} . \qquad (4.42)$$

Подстановка k_2 и k_3 в (4.37) дает окончательное выражение для элемента площади в новых переменных:

$$\mathbf{d}k_2\mathbf{d}k_3 = \mp\frac{s}{\sqrt{s^2B^2 - n^2A_i^2}}\mathbf{d}s\mathbf{d}n . \qquad (4.43)$$

Двойные знаки свидетельствуют о двойственности значений k_2 и k_3 при одних и тех же значениях n и s, что уже было отмечено. Из выражений (4.40) и (4.42) видно, что k_2 и k_3 будут действительны, если $s^2B^2 - n^2A_i^2 \ge 0$, тогда $|n| \le sBA_i^{-1}$. После подстановки элемента площади (4.43) в (4.36) и умножения на 2 электрическая напряженность выразится

$$E_x = \frac{q_1(x - \upsilon_x t)}{\pi\varepsilon|x - \upsilon_x t|}\int_0^\infty \mathbf{d}s \int_{-\infty}^{\infty}\frac{s\exp(in - us)}{\sqrt{s^2B^2 - n^2A_i^2}}\mathbf{d}n . \qquad (4.44)$$

Осуществим переход к полярным координатам r, α в плоскости ns:

$$n = r\cdot\sin\alpha , \qquad s = r\cdot\cos\alpha , \qquad (4.45)$$

для которых элемент площади и диапазон изменения будут следующими:

$$\mathbf{d}n\mathbf{d}s = r\mathbf{d}r\mathbf{d}\alpha, \qquad 0 < r < \infty, \qquad -\alpha_0 \le \alpha < \alpha_0 ,$$

где

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg}\frac{B}{A_i} . \qquad (4.46)$$

Тогда (4.44) в полярных координатах принимает вид

$$E_x = \frac{q_1(x - \upsilon_x t)}{\pi\varepsilon|x - \upsilon_x t|}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\cos\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r\exp\left(i\sin\alpha - u\cos\alpha\right)r}{\sqrt{B^2\cos^2\alpha - A_i^2\sin^2\alpha}}\mathbf{d}\alpha\mathbf{d}r ,$$

после интегрирования которого по r получаем

$$E_x = \frac{q_1(x - \upsilon_x t)}{\pi\varepsilon|x - \upsilon_x t|}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\frac{\cos\alpha}{\sqrt{B^2\cos^2\alpha - A_i^2\sin^2\alpha}}\frac{\mathbf{d}\alpha}{\left(i\sin\alpha - u\cos\alpha\right)^2} . \qquad (4.47)$$

Выделим из (4.47) реальную часть и преобразуем:

$$E_x = \frac{2q_1(x - \upsilon_x t)}{\pi\varepsilon|x - \upsilon_x t|}\int_0^{B/A_i}\frac{(u^2 - \operatorname{tg}^2\alpha)\mathbf{d}\operatorname{tg}\alpha}{\left(u^2 - \operatorname{tg}^2\alpha\right)^2\sqrt{B^2 - A_i^2\operatorname{tg}^2\alpha}} .$$

Произведем замены (a и b – новые параметры):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B}{A_i}\sin\gamma, \qquad a = u^2 , \qquad b = \frac{B^2}{A_i^2} > 0 , \qquad (4.48)$$

после подстановки которых получаем

$$E_x = \frac{2q_1(x - \upsilon_x t)}{\pi\varepsilon|x - \upsilon_x t|A_i}\int_0^{\pi/2}\frac{a - b\sin^2\gamma}{\left(a + b\sin^2\gamma\right)^2}\mathbf{d}\gamma . \qquad (4.49)$$

Входящий в (4.49) интеграл можно выразить через известные интегралы [12]:

$$I_2 = \int_0^{\pi/2}\frac{a - b\sin^2\gamma}{\left(a + b\sin^2\gamma\right)^2}\mathbf{d}\gamma = 2a\int_0^{\pi/2}\frac{\mathbf{d}\gamma}{\left(a + b\sin^2\gamma\right)^2} - \int_0^{\pi/2}\frac{\mathbf{d}\gamma}{a + b\sin^2\gamma} . \qquad (4.50)$$

Запишем значение второго интеграла:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathbf{d}\gamma}{\left(a + b\sin^2\gamma\right)^2}\mathbf{d}\gamma = \frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a+b}{a}}\operatorname{tg}\gamma\right)}{\sqrt{a^2 + ab}}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2 + ab}} .$$

Найдем первый интеграл:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathbf{d}\gamma}{\left(a + b\sin^2\gamma\right)^2} = \frac{1}{2a(a+b)}\left[(2a + b)\int_0^{\pi/2}\frac{\mathbf{d}\gamma}{a + b\sin^2\gamma} + \right.$$

$$\left. + \frac{b\sin\gamma\cos\gamma}{a + b\sin^2\gamma}\Bigg|_0^{\pi/2}\right] = \frac{2a + b}{2a(a+b)}\frac{\pi}{2\sqrt{a^2 + ab}} .$$

Подставляя значения интегралов в (4.50), находим

$$I_2 = \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{a}}{(a+b)^{3/2}} . \qquad (4.51)$$

После подстановки интеграла (4.51) в (4.49) электрическая напряженность будет

$$E_x = \frac{q_1(x-\upsilon_x t)}{\varepsilon|x-\upsilon_x t|}\frac{\sqrt{a}}{A_i(a+b)^{3/2}}. \qquad (4.52)$$

В соответствии с (4.48) определим параметры a и b:

$$\sqrt{a} = u = \frac{|x-\upsilon_x t|}{1-\beta_x^2}\sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2},$$

$$b = \frac{B^2}{A_i^2} = \frac{\left(L_3^2 + 2A_g L_3 L_2 + A^2 L_2^2\right)\left(1-\beta_x^2-\beta_y^2\right)^2}{(1-\beta_x^2)(1-\beta^2)},$$

$$a+b = \frac{1-\beta_x^2-\beta_y^2}{(1-\beta_x^2-\beta_z^2)(1-\beta_x^2-\beta_y^2)-\beta_y^2\beta_z^2}\times$$

$$\times\left\{\left(1-\beta_y^2-\beta_z^2\right)(x-\upsilon_x t)^2 + \left(1-\beta_x^2-\beta_z^2\right)(y-\upsilon_y t)^2 + \right.$$

$$+\left(1-\beta_x^2-\beta_y^2\right)(z-\upsilon_z t)^2 + 2\beta_x\beta_y(x-\upsilon_x t)(y-\upsilon_y t)+$$

$$\left.+2\beta_x\beta_z(x-\upsilon_x t)(z-\upsilon_z t)+2\beta_y\beta_z(y-\upsilon_y t)(z-\upsilon_z t)\right\}.$$

А это, как нетрудно проверить в обратном порядке, равняется

$$a+b = \frac{1-\beta_x^2-\beta_y^2}{\left(1-\beta_x^2\right)\left(1-\beta^2\right)}\left\{(\vec{r}-\vec{\upsilon}t)^2 - \left[\vec{\beta}\times(\vec{r}-\vec{\upsilon}t)\right]^2\right\}.$$

После подстановки A_i, a и b в (4.52) получаем

$$E_x = \frac{q_1(x-\upsilon_x t)\dfrac{|x-\upsilon_x t|}{1-\beta_x^2}\sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2}}{\varepsilon|x-\upsilon_x t|\left[\dfrac{\left(1-\beta_x^2\right)\left(1-\beta^2\right)}{\left(1-\beta_x^2-\beta_y^2\right)^2}\right]^{1/2}}\times$$

$$\times\frac{1}{\left[\dfrac{1-\beta_x^2-\beta_y^2}{\left(1-\beta_x^2\right)\left(1-\beta^2\right)}\right]^{3/2}\left\{(\vec{r}-\vec{\upsilon}t)^2 - \left[\vec{\beta}\times(\vec{r}-\vec{\upsilon}t)\right]^2\right\}^{3/2}}.$$

Это выражение после упрощения принимает вид

$$E_x = \frac{q_1(x-\upsilon_x t)\left(1-\beta^2\right)}{\varepsilon\left\{(\vec{r}-\vec{\upsilon}t)^2 - \left[\vec{\beta}\times(\vec{r}-\vec{\upsilon}t)\right]^2\right\}^{3/2}}. \qquad (4.53)$$

Аналогичными будут решения уравнений (4.6) для составляющих напряженностей E_y и E_z. Поэтому сила воздействия равномерно и прямолинейно движущегося заряда q_1 со скоростью $\vec{\upsilon}$ на единицу неподвижного заряда q_2 запишется в векторном виде так:

$$\vec{E} = \frac{q_1(\vec{r}-\vec{\upsilon}t)\left(1-\beta^2\right)}{\varepsilon\left\{(\vec{r}-\vec{\upsilon}t)^2 - \left[\vec{\beta}\times(\vec{r}-\vec{\upsilon}t)\right]^2\right\}^{3/2}}. \qquad (4.54)$$

4.3. СИЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ТЕЛ

Если $\vec{R} = \vec{r} - \vec{\upsilon}t = \vec{r} - \vec{r}_q$ – вектор расстояния от заряда q_1 до заряда q_2, то движущийся относительно него заряд q_1 в соответствии с (4.54) действует силой

$$\vec{F} = \frac{q_2 q_1\left(1-\beta^2\right)\vec{R}}{\varepsilon\left\{R^2 - \left[\vec{\beta}\times\vec{R}\right]^2\right\}^{3/2}} \qquad (4.55)$$

на заряд q_2. Как видим, сила взаимодействия между заряженными телами зависит лишь от их относительных параметров: расстояния между ними, их относительной скорости и углового положения между расстоянием и скоростью. Взаимодействие двух тел не зависит от координатных систем, систем отсчета, эфира, поля. Этот результат свидетельствует о том, что отсутствуют среды типа эфира или поля, относительно которых происходит движение. Если бы они были, то взаимодействие зависело бы от скорости относительно этих гипотетических сущностей. Выражение (4.55) также свидетельствует, что наиболее просто рассматривать взаимодействия двух тел можно с помощью их относительного расстояния и скорости, а не в разных системах отсчета, как это принято в ТО.

Выражение (4.54) известно в современной электродинамике [40] и ТО [26] под названием напряженности электрического поля, создаваемого движущимся с постоянной скоростью зарядом. Его записывают в следующем виде:

$$\vec{E} = \frac{q_1\left(1-\beta^2\right)\vec{R}}{R^3\left(1-\beta^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}},$$

где φ – угол между $\vec{R}$ и $\vec{\upsilon}$.

Это выражение выведено с помощью преобразований электрической напряженности точечного заряда из неподвижной системы координат в движущуюся. Согласно О.Д. Ефименко [98], его впервые получил Оливер Хэвисайд в 1888 г., на базе уравнений Максвелла с использованием изобретенного им операционного исчисления [94]. О.Д.Ефименко также выводит соотношение (4.54), основываясь на теории запаздывания, обусловленной конечной скоростью распространения электромагнитного воздействия. Томас Ж. Барнс с коллегами выводит (4.54) на основе индукции движущимся зарядом электрического поля, которое, в свою очередь, создает индукцию, т.е. наводит новую поправку поля [84]. Таким образом получен бесконечный ряд напряженностей *E*, после суммирования которых они приходят к выражению (4.54). Чарльз В. Лукес (мл.) и Джозеф В. Лукес [102], основываясь на экспериментальных законах (3.3) и (3.5), выводят соотношение (4.54) в результате многократного интегрирования переходов электрического поля в магнитное, а магнитного – в электрическое, которые описываются этими законами.

В вышеназванных работах авторы находятся под впечатлением мировоззрения о том, что заряженное тело создает электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$, при движении которого дополнительно создается магнитное поле с напряженностью $\vec{H}$. Согласно этому мировоззрению, кроме электрической силы $\vec{F}_E = q_2\vec{E}$, на тело должна действовать и магнитная сила в соответствии с законом Лоренца

$$\vec{F}_H = \frac{\mu q}{c}\left[\vec{v}\times\vec{H}\right]. \qquad (4.56)$$

Никто из них не интерпретирует выражение (4.54) как величину силы воздействия движущегося заряженного тела q_1 на единицу неподвижного заряженного тела. Более того, выражение для силы взаимодействия двух движущихся зарядов никто в явном виде не приводит. Это связано с тем, что в рамках полевых концепций выражения для сил вступают в противоречие с основными законами механики. Например, Олег Д. Ефименко показывает, что нарушается третий закон механики [97] или появляются другие парадоксы [98].

Выведенное нами в 1968 г. выражение (4.55), непосредственно следует из экспериментальных законов (3.3) и (3.5). Из этих законов мы также вывели первый (3.24) и второй (3.22) законы Максвелла. Мы последовательно показали, что как при экспериментальных исследованиях, приведших к выведению законов (3.3) и (3.5), так и в полученном выражении (4.55) используется одно и то же понятие, а именно сила воздействия на тело.

Сила, согласно (4.55), получена нами при постоянной скорости $\vec{v}$ движения заряженного тела q_1. Если скорость $\vec{v}$ будет зависеть от времени, то вместо решенных нами уравнений Даламбера (4.6) будут уравнения, одно из которых в проекции на ось *x*, согласно (3.36), запишется так

$$\Box E_x = \frac{4\pi}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}v_x\right)+\frac{\rho}{c_1^2}\frac{\partial v_x}{\partial t}, \qquad (4.57)$$

т.е. появляется составляющая производной $\partial v_x/\partial t$. Решение уравнения (4.57) должно дать зависимость $\vec{E}$ не только от расстояния и скорости, но и от производной от скорости. По-видимому, эти рассуждения применительно к уравнениям для скалярного φ и векторного $\vec{A}$ потенциалов привели классиков электродинамики к представлению о том, что поля, созданные движущимися зарядами, должны зависеть от их ускорений. Отсюда и появились электромагнитные силы воздействия на частицу, зависящие от ее ускорения.

Мы считаем, что наличие производной $\partial v_x/\partial t$ в (4.57) обусловлено издержкой дифференциальных связей, которые возникают при исследовании воздействия движущегося заряженного тела на магнит, а затем движущегося магнита на заряженное тело. Производная скорости по времени в (4.57) является частной производной в фиксированной точке пространства, относительно которого движется тело. А ускорение тела возникает при его перемещении по пространству. Поэтому вывод о зависимости силы от ускорения из выражения (4.57) не следует. Мы имели бы полное право сказать, что силы зависят от ускорения, если бы при движении заряженного тела со скоростью $\vec{v}$ было обнаружено, что при ускорении $\vec{w}$ сила воздействия на магнит отличается от силы, когда ускорения нет, либо если при движении магнита была бы выявлена зависимость воздействия на заряженное тело от ускорения. Если бы такие зависимости от ускорения были установлены, то в экспериментальные законы (3.3) и (3.5) вошли бы слагаемые с *w*. Однако таких результатов экспериментов нам неизвестно, поэтому в соответствии с приведенными ранее общими доказательствами будем считать, что электромагнитные силы от ускорения не зависят. Следовательно, выражение (4.55) определяет силу воздействия при любой скорости движения заряженного тела.

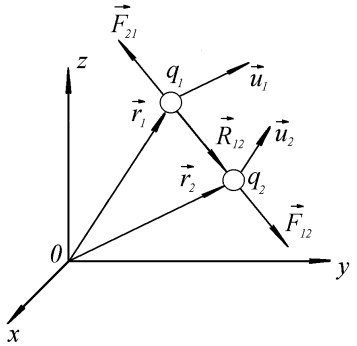
4.4. ЗАКОН ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУХ ОБЪЕКТОВ

Рассмотрим взаимодействие двух наэлектризованных точечных объектов с зарядами q_1 и q_2, с массами m_1 и m_2 (см. рис. 4.2). Если $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ – их радиус-векторы, то скорости зарядов будут $\vec{u}_1 = \frac{\mathbf{d}\vec{r}_1}{\mathbf{d}t}$ и $\vec{u}_2 = \frac{\mathbf{d}\vec{r}_2}{\mathbf{d}t}$.

Радиус-вектор от заряда q_1 до заряда q_2 будет $\vec{R}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, а его скорость относительно заряда q_2

$$\vec{v} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \frac{\mathbf{d}\vec{r}_1}{\mathbf{d}t} - \frac{\mathbf{d}\vec{r}_2}{\mathbf{d}t}.$$

Рис.4.2. Силы взаимодействия двух точечных заряженных тел.



В соответствии с (4.55) сила воздействия первого заряда на второй

$$\vec{F}_{12}=\frac{q_1q_2}{\varepsilon}\frac{\vec{R}_{12}\left(1-\beta^2\right)}{\left\{R_{12}^2-\left[\vec{\beta}\times\vec{R}_{12}\right]^2\right\}^{3/2}}. \quad (4.58)$$

Зная силу, можно записать уравнение движения второго заряда:

$$m_2\frac{\mathbf{d}^2\vec{r}_2}{\mathbf{d}t^2}=\frac{q_1q_2}{\varepsilon}\frac{\vec{R}_{12}\left(1-\beta^2\right)}{\left\{R_{12}^2-\left[\vec{\beta}\times\vec{R}_{12}\right]^2\right\}^{3/2}}. \quad (4.59)$$

Так как второй заряд движется относительно первого со скоростью $(-\vec{v})$ и радиус-вектор от него к первому заряду $\vec{R}_{12}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$, то в соответствии с (4.55) сила воздействия его на первый заряд примет вид

$$\vec{F}_{21}=\frac{q_1q_2}{\varepsilon}\frac{\vec{R}_{21}\left(1-\beta^2\right)}{\left\{R_{21}^2-\left[\vec{\beta}\times\vec{R}_{21}\right]^2\right\}^{3/2}}.$$

Тогда уравнение движения первого заряда запишется

$$m_1\frac{\mathbf{d}^2\vec{r}_1}{\mathbf{d}t^2}=\frac{q_1q_2}{\varepsilon}\frac{\vec{R}_{21}\left(1-\beta^2\right)}{\left\{R_{21}^2-\left[\vec{\beta}\times\vec{R}_{21}\right]^2\right\}^{3/2}}. \quad (4.60)$$

А так как $\vec{R}_{12}=-\vec{R}_{21}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=\vec{R}$, то вычитание уравнения (4.60), умноженного на m_2, из уравнения (4.59), умноженного на m_1, дает

$$m_1m_2\frac{\mathbf{d}^2\vec{R}}{\mathbf{d}t^2}=\left(m_1+m_2\right)\frac{q_1q_2}{\varepsilon}\frac{\vec{R}\left(1-\beta^2\right)}{\left\{R^2-\left[\vec{\beta}\times\vec{R}\right]^2\right\}^{3/2}}.$$

После преобразования получаем закон относительного движения двух заряженных точечных объектов

$$\frac{\mathbf{d}^2\vec{R}}{\mathbf{d}t^2}=\mu_1\frac{\vec{R}\left(1-\beta^2\right)}{\left\{R^2-\left[\vec{\beta}\times\vec{R}\right]^2\right\}^{3/2}}, \quad (4.61)$$

где

$$\mu=\frac{q_1q_2\left(m_1+m_2\right)}{\varepsilon m_1m_2}. \quad (4.62)$$

В уравнение (4.61) входят только относительные величины: расстояние $\vec{R}$ и скорость $\vec{v}$ взаимодействующих объектов, т.е. их движение не зависит ни от систем отсчета, ни от наблюдателей, ни от полей и т.д. При малых скоростях движения $\beta\to 0$ уравнение (4.61) переходит в закон движения зарядов, взаимодействующих по закону Кулона:

$$\frac{\mathbf{d}^2\vec{R}}{\mathbf{d}t^2}=\mu_1\frac{\vec{R}}{R^3}. \quad (4.63)$$

Уравнение (4.63) можно трактовать как уравнение движения при бесконечной скорости распространения взаимодействия, поскольку при $c_1\to\infty$ приведенная скорость $\beta\to 0$. Значит, уравнение (4.61) описывает движение объектов, взаимодействие которых распространяется с конечной скоростью. Если гравитационное воздействие распространяется со скоростью c_1, то следует ожидать, что движение двух взаимодействующих масс m_1 и m_2 будет определяться уравнением (4.61). В данном случае в соответствии с законом тяготения Ньютона константа взаимодействия

$$\mu_1=-G\left(m_1+m_2\right), \quad (4.64)$$

где G – гравитационная постоянная.

4.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЗАКОНА ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим относительное движение частиц в плоскости векторов $\vec{v}$ и $\vec{R}$ (см. рис.4.3). Выразим ускорение $\vec{w}=\frac{\mathbf{d}^2\vec{R}}{\mathbf{d}t^2}$ в левой части (4.61) через ускорения в проекциях: на направление радиус-вектора и на направление, перпендикулярное к нему. Составляющую ускорения на перпендикулярное направление $\vec{w}_t=\frac{\vec{\tau}}{R}\frac{\mathbf{d}\left(\omega R^2\right)}{\mathbf{d}t}$ называют

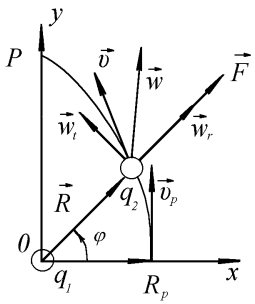


Рис. 4.3. Плоское движение двух взаимодействующих тел.

трансверсальной. Здесь $\vec{\tau}$ – единичный вектор, а ω – угловая скорость. Радиальная компонента ускорения будет:

$$\vec{w}_r = \frac{\vec{R}}{R}\left(\frac{\mathbf{d}^2R}{\mathbf{d}t^2} - R\omega^2\right).$$

После подстановки этих ускорений в (4.61) имеем

$$\frac{\vec{\tau}}{R}\frac{\mathbf{d}\left(\omega R^2\right)}{\mathbf{d}t} + \frac{\vec{R}}{R}\left(\frac{\mathbf{d}^2R}{\mathbf{d}t^2} - R\omega^2\right) = \mu_1 \frac{\vec{R}\left(1-\beta^2\right)}{\left\{R^2 - \left[\vec{\beta}\times\vec{R}\right]^2\right\}^{3/2}}. \qquad (4.65)$$

Приравнивая выражения в правой и левой частях этого равенства при соответствующих векторах $\vec{\tau}$ и $\vec{R}$ получаем два уравнения, из которых первое преобразуется так:

$$\frac{1}{R}\frac{\mathbf{d}\left(\omega R^2\right)}{\mathbf{d}t} = 0, \quad \frac{\mathbf{d}\left(\omega R^2\right)}{\mathbf{d}t} = 0, \quad \omega R^2 = \text{const}.$$

То есть в процессе движения кинематический момент количества движения

$$\omega R^2 = h \qquad (4.66)$$

остается неизменным. Движение происходит в той плоскости, в которой лежат векторы $\vec{R}$ и $\vec{v}$. Такое свойство движения также присуще взаимодействиям по закону Кулона и Ньютона.

Коэффициенты при векторе $\vec{R}$ в (4.65) дают второе уравнение движения:

$$\frac{\mathbf{d}^2R}{\mathbf{d}t^2} - R\omega^2 = \mu_1 \frac{R\left(1-\beta^2\right)}{\left\{R^2 - \left[\vec{\beta}\times\vec{R}\right]^2\right\}^{3/2}}. \qquad (4.67)$$

Так как компоненты скорости частицы будут: радиальная – $v_r = \dot{R}$ и трансверсальная $v_t = \omega R$, то

$$1-\beta^2 = 1-\frac{v^2}{c_1^2} = 1-\frac{1}{c_1^2}\left(\dot{R}^2 + \omega^2R^2\right),$$

$$R^2 - \left[\vec{\beta}\times\vec{R}\right]^2 = R^2 - \frac{1}{c_1^2}\omega^2R^4 = R^2\left(1-\frac{\omega^2R^2}{c_1^2}\right),$$

и после подстановки в (4.67) получаем

$$\frac{\mathbf{d}^2R}{\mathbf{d}t^2} - R\omega^2 = \mu_1 \frac{1-\frac{1}{c_1^2}\left(\dot{R}^2 + \omega^2R^2\right)}{R^2\left(1-\frac{\omega^2R^2}{c_1^2}\right)^{3/2}}. \qquad (4.68)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка. Рассмотрим его решение. С этой целью перейдем к новым переменным

$$y = 1/R \qquad \text{и} \qquad \varphi = \int \omega \mathbf{d}t, \qquad (4.69)$$

где φ – угловая координата (см. рис. 4.3). Преобразуем производные с учетом (4.66):

$$\frac{\mathbf{d}R}{\mathbf{d}t} = -\frac{1}{y^2}\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}\varphi}\frac{\mathbf{d}\varphi}{\mathbf{d}t} = -\frac{\omega}{y^2}\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}\varphi} = -h\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}\varphi},$$

$$\frac{\mathbf{d}^2R}{\mathbf{d}t^2} = -h\frac{\mathbf{d}^2y}{\mathbf{d}\varphi^2}\omega = -h^2y^2\frac{\mathbf{d}^2y}{\mathbf{d}\varphi^2}.$$

После подстановки новых переменных и производных в (4.68) и преобразования его, запишем:

$$\frac{\mathbf{d}^2y}{\mathbf{d}\varphi^2} - \frac{\mu_1}{c_1^2}\frac{\left(\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}\varphi}\right)^2}{\left(1-\frac{h^2}{c_1^2}y^2\right)^{3/2}} = -y - \frac{\mu_1}{h^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{h^2}{c_1^2}y^2}}. \qquad (4.70)$$

Поскольку уравнение (4.70) относится к классу нелинейных уравнений, в которые явно не входит независимый аргумент φ, можно произвести замену

$$p = \frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}\varphi}. \qquad (4.71)$$

Тогда $\frac{\mathbf{d}^2y}{\mathbf{d}\varphi^2} = \frac{\mathbf{d}p}{\mathbf{d}y}\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}\varphi} = p\frac{\mathbf{d}p}{\mathbf{d}y}$ и уравнение (4.70) принимает вид

$$p\frac{\mathbf{d}p}{\mathbf{d}y} - \frac{\mu_1}{c_1^2}\frac{p^2}{\left(1-\frac{h^2}{c_1^2}y^2\right)^{3/2}} = -y - \frac{\mu_1}{h^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{h^2}{c_1^2}y^2}}. \qquad (4.72)$$

Таким образом, мы свели (4.68) к нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка. Перейдем к новым переменным:

$$z = p^2, \qquad f(y) = -2\frac{\mu_1/c_1^2}{\left(1-\frac{h^2}{c_1^2}y^2\right)^{3/2}}, \tag{4.73}$$

$$g(y) = -2\left(y + \frac{\mu_1}{h^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{h^2}{c_1^2}y^2}}\right), \tag{4.74}$$

которые сводят (4.72) к линейному дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\frac{\mathbf{d}z}{\mathbf{d}y} + f(y)z = g(y). \tag{4.75}$$

С учетом граничных условий в точке $y = y_0$, $z = z_0$ и обозначая $F = \int_{y_0}^{y} f(y)\mathbf{d}y$, решение уравнения (4.75) запишется в виде

$$z = e^{-F}\left(z_0 + \int_{y_0}^{y} g(y)e^{F}\mathbf{d}y\right). \tag{4.76}$$

Теперь найдем функцию F, подставив в подынтегральное выражение значение для $f(y)$ согласно (4.73):

$$F = -2\int_{y_0}^{y}\frac{\mu_1/c_1^2}{\left(1-\frac{h^2}{c_1^2}y^2\right)^{3/2}}\mathbf{d}y = \frac{2\mu_1}{c_1^2}\left(\frac{y_0}{\sqrt{1-\frac{h^2}{c_1^2}y_0^2}} - \frac{y}{\sqrt{1-\frac{h^2}{c_1^2}y^2}}\right).$$

Далее возьмем интеграл в (4.76):

$$\int_{y_0}^{y} g(y)e^{F}\mathbf{d}y = -\exp\frac{2\mu_1 y_0}{c_1^2\sqrt{1-\frac{h^2}{c_1^2}y_0^2}}\int_{y_0}^{y} 2\left(y + \frac{\mu_1}{h^2\sqrt{1-\frac{h^2}{c_1^2}y_0^2}}\right)\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{2\mu_1 y}{c_1^2\sqrt{1-\frac{h^2}{c_1^2}y^2}}\right)\mathbf{d}y = \exp\frac{2\mu_1 y_0}{c_1^2\sqrt{1-\frac{h^2}{c_1^2}y_0^2}}\frac{c_1^2}{h^2}\left(1-\frac{h^2}{c_1^2}y^2\right)\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{2\mu_1 y}{c_1^2\sqrt{1-\frac{h^2}{c_1^2}y^2}}\right)\Bigg|_{y_0}^{y} = y_0 - \frac{c_1^2}{h^2} + \left(\frac{c_1^2}{h^2} - y^2\right)\times$$

$$\times\exp\frac{2\mu_1}{c_1^2}\left(\frac{y_0}{\sqrt{1-\frac{h^2}{c_1^2}y_0^2}} - \frac{y}{\sqrt{1-\frac{h^2}{c_1^2}y^2}}\right).$$

После подстановки этих выражений в (4.76) решение примет вид

$$z = -y^2 + \frac{c_1^2}{h^2} + \left(y_0^2 + z_0 - \frac{c_1^2}{h^2}\right)\exp\frac{2\mu_1}{c_1^2}\left(\frac{y}{\sqrt{1-\frac{h^2}{c_1^2}y^2}} - \frac{y_0}{\sqrt{1-\frac{h^2}{c_1^2}y_0^2}}\right). \tag{4.77}$$

В соответствии с (4.73) и (4.71) преобразуем переменную z:

$$z = p^2 = \left(\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}\varphi}\right)^2 = \frac{1}{R^4}\left(\frac{\mathbf{d}R}{\mathbf{d}\varphi}\right)^2,$$

$$z_0 = \frac{1}{R^4}\left(\frac{\mathbf{d}R}{\mathbf{d}t}\right)^2\left(\frac{\mathbf{d}\varphi}{\mathbf{d}t}\right)^{-2}\Bigg|_{R=R_0} = \frac{v_r^2}{R^4\omega^2}\Bigg|_{R=R_0} = \frac{v_{r0}^2}{h^2}, \quad y_0 = \frac{1}{R_0}.$$

Здесь мы использовали второе граничное условие $v_r(R_0) = v_{r0}$. Первое граничное условие использовалось для трансверсальной скорости $v_t(R_0) = \omega R_0 = h/R_0$. Отметим, что начальные условия потребуются при привязке решений ко времени при интегрировании $R = \int v_r\mathbf{d}t$ и $\varphi = \int \omega\mathbf{d}t$.

После подстановки значений y, z и y_0, z_0 в (4.77) получаем закон движения (4.61):

$$\frac{1}{R^2}\frac{\mathbf{d}R}{\mathbf{d}\varphi}=\sqrt{\frac{c_1^2}{h^2}-\frac{1}{R^2}+\left(\frac{1}{R_0^2}+\frac{v_{r0}^2}{h^2}-\frac{c_1^2}{h^2}\right)\exp\frac{2\mu_1}{c_1^2}\left(\frac{1/R}{\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c_1^2R^2}}}-\frac{1/R_0}{\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c_1^2R_0^2}}}\right)}. \quad (4.78)$$

Так как

$$\frac{\mathbf{d}R}{\mathbf{d}\varphi}=\frac{\mathbf{d}R/\mathbf{d}t}{\mathbf{d}\varphi/\mathbf{d}t}=\frac{v_r}{\omega}=\frac{v_r}{h}R^2, \quad (4.79)$$

то, исключая $\dfrac{\mathbf{d}R}{\mathbf{d}\varphi}$ из (4.78) и (4.79), получаем радиальную скорость движения взаимодействующих частиц

$$v_r=c_1\sqrt{1-\beta_t^2-\left(1-\beta_0^2\right)\exp\frac{2\mu_1}{c_1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2-\dfrac{h^2}{c_1^2}}}-\frac{1}{\sqrt{R_0^2-\dfrac{h^2}{c_1^2}}}\right)}. \quad (4.80)$$

Здесь введены приведенные скорости

$$\beta_{r0}=\frac{v_{r0}}{c_1},\qquad \beta_{t0}^2=\frac{h^2}{c_1^2R_0^2}=\frac{\omega^2R_0^2}{c_1^2}=\frac{v_{t0}^2}{c_1^2},\qquad \beta_0^2=\beta_{t0}^2+\beta_{r0}^2. \quad (4.81)$$

При известной, согласно (4.80), радиальной скорости уравнение траектории в соответствии с (4.79) запишется так:

$$\varphi=h\int\frac{\mathbf{d}R}{R^2v_r}. \quad (4.82)$$

Уравнения (4.80) и (4.82) определяют движения объектов, взаимодействие которых распространяется с конечной скоростью c_1. Из этих уравнений вытекают интересные следствия.

4.6. ПЕРЕХОД К КЛАССИЧЕСКОЙ И РЕЛЯТИВИСТКОЙ МЕХАНИКЕ

Покажем, что уравнения (4.80) и (4.82) переходят в уравнения классической механики, если считать распространение взаимодействий мгновенным. С учетом (4.81) найдем предел квадрата радиальной скорости (4.78) при $c_1\to\infty$:

$$\lim_{c_1^2\to\infty}v_r^2=\lim_{c_1^2\to\infty}\frac{1-\dfrac{h^2}{c_1^2R^2}-\left(1-\dfrac{v_{r0}^2}{c_1^2}-\dfrac{h^2}{c_1^2R_0^2}\right)\exp\dfrac{2\mu_1}{c_1^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R^2-\dfrac{h^2}{c_1^2}}}-\dfrac{1}{\sqrt{R_0^2-\dfrac{h^2}{c_1^2}}}\right)}{1/c_1^2}.$$

Предел представляет неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$. После применения правила Лопиталя и упрощения имеем

$$\lim_{c_1^2\to\infty}v_r^2=v_{r0}^2-\frac{h^2}{R^2}+\frac{h^2}{R_0^2}-2\mu_1\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}\right)=v_{r0}^2+\left(\frac{\mu_1}{h}+\frac{h}{R_0}\right)^2-\left(\frac{\mu_1}{h}+\frac{h}{R}\right)^2.$$

Отсюда находим радиальную скорость

$$v_r=\sqrt{v_{r0}^2+\left(\frac{\mu_1}{h}+\frac{h}{R_0}\right)^2-\left(\frac{\mu_1}{h}+\frac{h}{R}\right)^2}, \quad (4.83)$$

после подстановки которой в (4.82) получаем уравнение траектории в классической механике при движении в центральном поле

$$\varphi=\int\frac{h\mathbf{d}R}{R^2\sqrt{v_{r0}^2+\left(\mu_1/h+h/R_0\right)^2-\left(\mu_1/h+h/R\right)^2}}. \quad (4.84)$$

Покажем, что уравнения (4.80) и (4.82) при скоростях движения объектов, не близких к скорости света, сводятся к уравнению движения в центрально-симметричном поле в теории относительности [26]:

$$\varphi=\int\frac{M\mathbf{d}R}{R^2\sqrt{W_0^2/c^2-\left(m^2c^2+M^2/R^2\right)\left(1-R_g/R\right)}}. \quad (4.85)$$

С этой целью упростим выражение для радиальной скорости (4.80), раскладывая сомножители в ряд и пренебрегая слагаемыми малого порядка:

$$\left(1-\frac{h^2}{c_1^2}\frac{1}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{h^2}{2c_1^2}\frac{1}{R^2}+\ldots;$$

$$\exp\frac{2\mu_1}{c_1^2R}\left(1-\frac{h^2}{c_1^2}\frac{1}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+2\frac{\mu_1}{c_1^2}\frac{1}{R}+2\frac{\mu_1^2}{c_1^4}\frac{1}{R^2}+\frac{\mu_1h^2}{c_1^4R^3}+\ldots$$

Аналогично запишется экспоненциальный сомножитель (4.80) с R_0. С учетом только членов c_1^2 в знаменателе квадрат радиальной скорости выразится

$$\upsilon_r^2 = c_1^2\left[\left(1-\frac{h^2}{c_1^2R^2}\right)-\left(1-\beta_0^2\right)\left(1+2\frac{\mu_1}{c_1^2R}\right)\left(1-2\frac{\mu_1}{c_1^2R_0}\right)\right]. \qquad (4.86)$$

Введем величину

$$R_g = -2\frac{\mu_1}{c_1^2}, \qquad (4.87)$$

которую называют гравитационным радиусом и вынесем из правой части (4.86) множители:

$$\upsilon_r^2 = c_1^2\left(1-\frac{h^2}{c_1^2R^2}\right)\left(1-\beta_0^2\right)\left[\left(1-\beta_0^2\right)^{-1}-\left(1-\frac{h^2}{c_1^2R^2}\right)^{-1}\left(1-\frac{R_g}{R}\right)\left(1+\frac{R_g}{R_0}\right)\right].$$

Но так как при скорости не близкой к c_1 справедливы будут упрощения

$$\left(1-\beta_0^2\right)^{-1} = 1+\beta_0^2+\ldots,$$

$$\left(1-\frac{h^2}{c_1^2R^2}\right)^{-1} = 1+\frac{h^2}{c_1^2R^2}+\ldots,$$

то после подстановки их и с учетом членов порядка c_1^2 получаем

$$\upsilon_r^2 = c_1^2+\upsilon_0^2-\left(c_1^2+\frac{h^2}{R^2}\right)\left(1-\frac{R_g}{R}\right)\left(1+\frac{R_g}{R_0}\right). \qquad (4.88)$$

После подстановки (4.88) в (4.82) получаем приближенное до степеней c_1^2 уравнение траектории

$$\varphi = \int\frac{h\mathbf{d}R}{R^2\sqrt{c_1^2+\upsilon_0^2-\left(c_1^2+\frac{h^2}{R^2}\right)\left(1-\frac{R_g}{R}\right)\left(1+\frac{R_g}{R_0}\right)}}. \qquad (4.89)$$

Обозначим через m массу движущегося объекта, например массу заряда q_2 на рис.4.3. Тогда $M = mh$ – его момент количества движения. Согласно теории относительности, квадрат энергии объекта, движущегося со скоростью υ_0, можно записать

$$\frac{W_0^2}{c_1^2} = \frac{1}{c_1^2}\left(\frac{mc_1^2}{\sqrt{1-\beta_0{}^2}}\right)^2 = \frac{m^2c_1^2}{1-\beta_0{}^2} \approx m^2c_1\left(1+\beta_0^2\right) = m^2\left(c_1^2+\upsilon_0^2\right).$$

Если числитель и знаменатель в правой части (4.89) умножим на m и используем выражения для M и W_0, то выводим уравнение траектории движения точечного тела с массой m под действием другого точечного тела

$$\varphi = \int\frac{M\mathbf{d}R}{R^2\sqrt{W_0^2/c^2-\left(m^2c^2+M^2/R^2\right)\left(1-R_g/R\right)\left(1+R_g/R_0\right)}}. \qquad (4.90)$$

Так как гравитационный радиус $R_g << R_0$, то, пренебрегая R_g/R_0, из (4.90) получаем релятивистское уравнение (4.85).

Уравнение (4.89) справедливо для любой скорости распространения взаимодействия c_1 в среде, а не только для предельной скорости распространения света c в вакууме, как это имеет место в теории относительности. Оно справедливо для электромагнитного и гравитационного взаимодействий. Выбором μ_1, согласно (4.62) или (4.64), в параметре R_g в (4.87) определяется вид взаимодействия. Релятивистское выражение (4.85) возможно использовать только тогда, когда масса объекта m значительно меньше массы воздействующего тела. Уравнение (4.89) справедливо при любых массах взаимодействующих тел.

При выводе (4.89) в разложении учитывались члены порядка c_1^2. Поэтому данное соотношение, как и релятивистское (4.85), является неточным и может давать неверные результаты. В последующем мы получим более точное выражение для интеграла траектории и решим его.

Из классической механики известно, что притягивающиеся объекты могут достичь при радиальном сближении какой угодно большой скорости, которая ограничивается лишь μ_1 – постоянной их взаимодействия. Но если взаимодействие объектов распространяется с конечной скоростью c_1, то достижение объектами такой скорости приведет к тому, что они не смогут оказывать друг на друга воздействие. Следует ожидать, что такие объекты не смогут ускорить друг друга до скорости, большей скорости распространения их воздействия. С этой целью рассмотрим взаимодействие радиально движущихся частиц (h = 0), начинающих свое движение в бесконечности ($\upsilon_{r0} = 0$). Радиальная скорость сближения, согласно (4.80), при этих условиях запишется

$$\upsilon_r = c_1\sqrt{1-\exp\left(\frac{2\mu_1}{c_1^2}\frac{1}{R}\right)}. \qquad (4.91)$$

Так как при притяжении $\mu_1 < 0$, то лишь при сближении до R = 0, как видно из (4.91), скорость достигнет скорости распространения взаимодействия.

Если же в какой-то точке R_0 скорость объекта равняется скорости распространения взаимодействия (β_0 = 1), то из (4.80) следует $\upsilon_r = c_1\sqrt{1-\beta_t^2} = \sqrt{c_1^2-\upsilon_t^2}$, т.е. полная скорость $\upsilon = \upsilon_r^2+\upsilon_t^2 = c_1^2$. Следова-

тельно, такой объект будет иметь скорость c_1 и во всех остальных точках траектории, т.е. будет двигаться с неизменной скоростью, равной скорости распространения взаимодействия.

В заключение рассмотрим изолинии силы (4.55). Как видим, сила направлена по радиусу, а модуль силы воздействия движущегося со скоростью υ заряда можно записать в виде

$$F = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon} \frac{1-\beta^2}{R^2\left(1-\beta^2 \sin^2\varphi\right)^{3/2}}, \qquad (4.92)$$

где $\beta = \upsilon/c_1$ – приведенная скорость относительного движения зарядов; φ - угол между скоростью $\vec{\upsilon}$ и радиус-вектором $\vec{R}$ от заряда q_1 до заряда q_2.

Из (4.92) получаем уравнение линии постоянного значения

$$R = \sqrt{A \frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2 \sin^2\varphi\right)^{3/2}}}, \qquad (4.93)$$

где

$$A = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon} = \text{const}. \qquad (4.94)$$

Зависимость (4.93) при A = 1 изображена на рис. 4.4 в полярных координатах. Линии равной силы (4.93) представляют собой сечения центральной плоскостью поверхностей равной силы, которые образованы вращением изолиний вокруг вектора скорости υ. При нулевой скорости заряда q_1 изоповерхность является сферой с радиусом R = 1. С увеличением скорости изоповерхности сжимаются вдоль линии движения и растягиваются в плоскости, перпендикулярной движению. При β = 1 изоповерхность силы превращается в перпендикулярную скорости неограниченную плоскость. Отметим, что изолинии силы (4.54) являются одновременно и изолиниями напряженности E (4.54) движущегося заряженного тела.

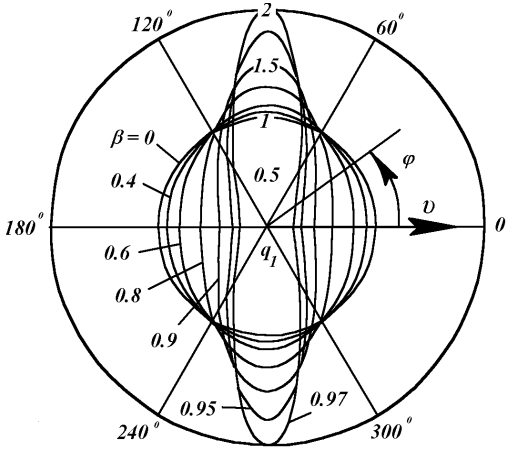


Рис. 4.4. Изолинии силы воздействия движущегося со скоростью υ заряженного тела q_1 на неподвижное заряженное тело q_2, находящееся от него на разных угловых расстояниях φ при разных величинах скорости $\beta = \upsilon/c_1$.

ГЛАВА 5

ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ДВУХ ТЕЛ

5.1 КЛАССИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ

Вначале рассмотрим траектории взаимодействующих частиц по закону Кулона или Ньютона, которые описываются уравнением траектории (4.84). В некоторой точке траектории, называемой перицентрием, взаимодействующие объекты сближаются на минимальное расстояние R_p (см. рис. 4.3): их радиальная скорость равна нулю, а трансверсальная $\upsilon_t = \upsilon_p = h/R_p$ принимает наибольшее значение. Преобразуем уравнения для радиальной скорости (4.83) и траектории (4.82) к безразмерному виду:

$$\bar{\upsilon}_r = \sqrt{(\alpha_1+1)^2 - \left[\alpha_1 + \frac{1}{\bar{R}}\right]^2}, \qquad (5.1)$$

$$\varphi = \int \frac{\mathbf{d}\bar{R}}{\bar{R}^2 \bar{\upsilon}_r}, \qquad (5.2)$$

где $\bar{R} = R/R_p$ – относительный радиус; $\bar{\upsilon}_r = \upsilon_r/\upsilon_p$ – относительная радиальная скорость; $\beta_p = \upsilon_p/c_1$; $\alpha_1 = \mu_1/\left(R_p \upsilon_p^2\right)$ – параметр траектории.

Выражение (5.2) при радиальной скорости (5.1) заменой $y = 1/\bar{R}$ легко интегрируется, и при граничном условии $\bar{R} = 1$, при φ = 0, получаем уравнение фундаментальных классических траекторий

$$\bar{R} = \frac{1}{(\alpha_1+1)\cos\varphi - \alpha_1}. \qquad (5.3)$$

С помощью преобразований $\bar{x} = \bar{R}\cos\varphi$ и $\bar{y} = \bar{R}\sin\varphi$, где

$$\bar{x} = x/R_p, \qquad \bar{y} = y/R_p \qquad (5.4)$$

являются приведенными координатами, уравнение траектории (5.3) в декартовой системе координат принимает вид:

$$\alpha_1^2 \bar{y}^2 - (2\alpha_1+1)\bar{x}^2 + 2(\alpha_1+1)\bar{x} = 1. \qquad (5.5)$$

Уравнения (5.3) или (5.5) зависят только от одного параметра α_1, т.е. вид траектории определяется его величиной. Будем рассматривать траектории притяжения при α_1 < 0. При α_1 < -1 из (5.3) следует, что $\bar{R} = R/R_p < 1$, но это противоречит принятому, что радиус перицентрия R_p – наименьшее

расстояние между взаимодействующими объектами. Поэтому возможны значения $\alpha_1 \geq -1$. При α_1 = -1, согласно (5.3), $\bar{R} = 1$, т.е. движение происходит при неизменном расстоянии между частицами, а именно по окружности.

При α_1 = -0.5, согласно (5.5),

$$\bar{x} = 1 - 0.25\bar{y}^2, \tag{5.6}$$

т.е. траекторией является парабола. В диапазоне изменения -1 < α_1 < -0.5 траектории представляют собой эллипсы. При $\varphi = \pi$ расстояние между частицами, согласно (5.3), будет наибольшим:

$$\bar{R}_a = -1/(2\alpha_1 + 1). \tag{5.7}$$

Величина R_a – радиус апоцентрия. Так как $\bar{h} = h/(R_p \upsilon_p) = 1$, то в апоцентрии частица имеет наименьшую трансверсальную скорость, равную

$$\bar{\upsilon}_a = 1/\bar{R}_a = -(2\alpha_1 + 1), \tag{5.8}$$

а ее радиальная скорость равна нулю. Отметим, что для параболы при α_1 = -0.5, согласно (5.7), радиус апоцентрия $\bar{R}_a \to \infty$, и скорость на бесконечности в соответствии с (5.8) $\upsilon_\infty = 0$. При изменении α_1 от -1 до -0.5 траектории становятся все более вытянутыми эллипсами и в пределе превращаются в параболическую траекторию. В диапазоне -0.5 < α_1 < 0 траектории являются гиперболами. Полуугол между асимптотами гипербол определяется из (5.3) при $\bar{R} \to \infty$:

$$\varphi_a = \pi - \arccos\left[\alpha_1/(\alpha_1 + 1)\right]. \tag{5.9}$$

Скорость движения частицы на бесконечности становится исключительно радиальной и равной, согласно (5.1),

$$\bar{\upsilon}_\infty = \sqrt{2\alpha_1 + 1}. \tag{5.10}$$

С приближением α_1 к нулю полуугол между асимптотами φ_a приближается к $\pi/2$. При α_1 = 0 гипербола вырождается в прямую в соответствии с (5.3), равную

$$\bar{R} = 1/\cos\varphi. \tag{5.11}$$

Как видно из (5.10), частица движется по ней в бесконечности с $\bar{\upsilon}_\infty = 1$ такой же, как и в перицентрии. С помощью (5.1) легко показать, что полная скорость частицы во всех точках траектории будет $\bar{\upsilon} = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_t^2} = 1$, т.е. частица движется с неизменной скоростью. Параметр траектории α_1 = 0 в двух случаях: при отсутствии взаимодействия μ_1 = 0 и при бесконечной скорости

$\bar{\upsilon}_p \to \infty$. При этом траекторией будет прямая линия (5.11). Далее мы увидим, что при конечной скорости взаимодействия c_1 частицы будут двигаться по этой траектории, если их скорость $\upsilon = c_1$.

Траектории (5.3) или (5.5) описывают сечения конуса плоскостью и давно известны. Однако они приводятся [24] в зависимости от двух параметров:

$$\bar{R} = \frac{\bar{P}}{1 + \varepsilon_t \cos\varphi}, \tag{5.12}$$

где $P = \bar{P} R_p$ – фокальный параметр (на рис. 4.3 – координата траектории y, при x = 0); ε_t – эксцентриситет.

Из сопоставления (5.3) и (5.12) видно, что

$$\bar{P} = -1/\alpha_1, \tag{5.13}$$

$$\varepsilon_t = -(1 + 1/\alpha_1). \tag{5.14}$$

Выразим также через параметр траектории α_1 большую и малую полуоси эллипса:

$$\bar{a} = \frac{\alpha_1}{2\alpha_1 + 1}, \qquad \bar{b} = \sqrt{-\frac{1}{2\alpha_1 + 1}}. \tag{5.15}$$

5.2. ВРЕМЯ ДВИЖЕНИЯ ПО ТРАЕКТОРИИ

Теперь рассмотрим время движения при взаимодействий по закону Кулона или Ньютона. При известной радиальной скорости время движения определяется как

$$t = \int \mathbf{d}R/\upsilon_r \quad . \tag{5.16}$$

Будем рассматривать интеграл в приведенных переменных. Так как не во всех случаях движений имеются данные в перицентрии, будем относить переменные к значениям в произвольной точке R_0, в которой частица имеет радиальную υ_{r0} и трансверсальную $\upsilon_{t0} = h/R_0$ составляющие скорости и в которой начинается отсчет времени, т.е. t_0 = 0. Тогда с учетом радиальной скорости (4.83) в безразмерном виде время движения будет

$$\bar{t} = \int_1^{\bar{R}} \frac{\mathbf{d}\bar{R}}{\sqrt{\bar{\upsilon}_{r0}^{02} + \left(\alpha_1^0 + 1\right)^2 - \left(\alpha_1^0 + \frac{1}{\bar{R}}\right)^2}}, \tag{5.17}$$

где

$$\bar{\upsilon}_{r0}^0 = \upsilon_{r0}/\upsilon_{t0}\,, \qquad \alpha_1^0 = \mu_1/\left(R_0\upsilon_{t0}^2\right), \qquad \bar{R} = R/R_0\,, \qquad \bar{t} = t\,\upsilon_{t0}/R_0\,.$$

В соответствии с определением, связь между параметрами траектории следующая

$$\alpha_1 = \alpha_1^0\, R_p/R_0\,. \tag{5.18}$$

Преобразуем выражение (5.17), а интеграл сведем к известным [12]:

$$\bar{t} = \int_1^{\bar{R}} \frac{\bar{R}\mathbf{d}\bar{R}}{\sqrt{A\bar{R}^2 - 2\alpha_1^0\bar{R} - 1}} = \frac{\sqrt{A\bar{R}^2 - 2\alpha_1^0\bar{R} - 1}}{A}\Bigg|_1^{\bar{R}} + \frac{\alpha_1^0}{A}\int_1^{\bar{R}} \frac{\mathbf{d}\bar{R}}{\sqrt{A\bar{R}^2 - 2\alpha_1^0\bar{R} - 1}}\,, \tag{5.19}$$

где

$$A = \left(\bar{\upsilon}_{r0}^0\right)^2 + 2\alpha_1^0 + 1\,. \tag{5.20}$$

Рассмотрим случай $A > 0$. Это соответствует малым значениям $|\alpha_1|$, т.е. гиперболическим траекториям. Решение интеграла в (5.19) зависит от дискриминанта подкоренного выражения

$$D = -4A + 4\left(\alpha_1^0\right)^2 = -4\left[\bar{\upsilon}_{r0}^{02} + \left(\alpha_1^0 + 1\right)^2\right] < 0\,.$$

При этом значении D интеграл в (5.19) запишется так:

$$I = \frac{1}{\sqrt{A}}\ln\left(2\sqrt{A\bar{R}^2 - 2\alpha_1^0\bar{R} - 1} + 2A\bar{R} - 2\alpha_1^0\right). \tag{5.21}$$

После подстановки (5.21) в (5.19) и преобразования получаем время движения по гиперболической траектории

$$\bar{t} = \frac{\bar{R}\bar{\upsilon}_r^0 - \bar{\upsilon}_{r0}^0}{A} + \frac{\alpha_1^0}{A^{3/2}}\ln\frac{\bar{R}\bar{\upsilon}_r^0\sqrt{A} + A\bar{R} - \alpha_1^0}{\bar{\upsilon}_{r0}^0\sqrt{A} + A - \alpha_1^0}\,, \tag{5.22}$$

где

$$\bar{\upsilon}_r^0 = \sqrt{\left(\bar{\upsilon}_{r0}^0\right)^2 + \left(\alpha_1^0 + 1\right)^2 - \left(\alpha_1^0 + 1/\bar{R}\right)^2}\,. \tag{5.23}$$

Случай $A < 0$ соответствует большим значениям $|\alpha_1|$, т.е. эллипсам, и интеграл в (5.19) будет

$$I = -\frac{1}{\sqrt{-A}}\arcsin\frac{A\bar{R} - \alpha_1^0}{\sqrt{\left(\bar{\upsilon}_{r0}^0\right)^2 + \left(\alpha_1^0 + 1\right)^2}}\,. \tag{5.24}$$

После подстановки (5.24) в (5.19) и преобразования находим время движения по эллиптической орбите

$$\bar{t} = \frac{\bar{R}\bar{\upsilon}_r^0 - \bar{\upsilon}_{r0}^0}{A} + \frac{\alpha_1^0}{(-A)^{3/2}}\left\{\arcsin\frac{A\bar{R} - \alpha_1^0}{\sqrt{\left(\bar{\upsilon}_{r0}^0\right)^2 + \left(\alpha_1^0 + 1\right)^2}} - \arcsin\frac{A - \alpha_1^0}{\sqrt{\left(\bar{\upsilon}_{r0}^0\right)^2 + \left(\alpha_1^0 + 1\right)^2}}\right\} \tag{5.25}$$

Рассмотрим случай $A = 0$. Отсюда, согласно (5.20), $\alpha_1^0 = -0.5 - 0.5\left(\upsilon_{r0}\right)^2$. При нормировании к R_p, где $\upsilon_{r0} = 0$, $\alpha_1^0 = \alpha_1 = -0.5$, т.е. это случай параболической траектории. Тогда первый интеграл в (5.20) будет

$$\bar{t} = \int_1^{\bar{R}} \frac{\bar{R}\mathbf{d}\bar{R}}{\sqrt{-2\alpha_1^0\bar{R} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{-2\alpha_1^0}}\int_1^{\bar{R}}\left(\sqrt{\bar{R} + 1/\left(2\alpha_1^0\right)} + \frac{1}{2\alpha_1^0\sqrt{\bar{R} + 1/\left(2\alpha_1^0\right)}}\right)\mathbf{d}\bar{R}\,.$$

После интегрирования и приведения получаем время движения по параболической орбите

$$\bar{t} = \frac{\left(-2\alpha_1^0\bar{R} - 1\right)^{3/2} - \left(-2\alpha_1^0 - 1\right)^{3/2}}{6\left(\alpha_1^0\right)^2} + \frac{\sqrt{-2\alpha_1^0\bar{R} - 1} - \sqrt{-2\alpha_1^0 - 1}}{\sqrt{2}\left(-\alpha_1^0\right)^{3/2}}\,. \tag{5.26}$$

Мы рассмотрели время движения по траектории при наличии трансверсальной скорости. В случае чисто радиального движения, при $h = 0$, радиальная скорость, согласно (4.83), будет

$$\upsilon_r = \sqrt{\upsilon_{r0}^2 - 2\mu_1\left(1/R - 1/R_0\right)}\,. \tag{5.27}$$

Тогда в соответствии со (5.16) время запишется

$$t = \int_{R_0}^{R} \frac{\mathbf{d}R}{\sqrt{\upsilon_{r0}^2 - 2\mu_1\left(1/R - 1/R_0\right)}} = \frac{1}{2\mu_1}\int_{R_0}^{R}\frac{\mathbf{d}x}{(a+bx)^2\sqrt{x}}\,, \tag{5.28}$$

здесь

$$x = \upsilon_{r0}^2 - 2\mu_1\left(1/R - 1/R_0\right), \qquad a = \frac{1}{R_0} + \frac{\upsilon_{r0}^2}{2\mu_1}\,, \qquad b = -\frac{1}{2\mu_1}\,. \tag{5.29}$$

Интеграл в (5.28) раскрывается с помощью табличных интегралов [24]:

$$\int\frac{\mathbf{d}x}{(a+bx)^2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{a(a+bx)} + \frac{1}{a\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{bx}{a}}\,,$$

после подстановки которого в (5.28) и преобразования с использованием (5.29) получаем время движения при радиальном взаимодействии двух объектов

$$\bar{t}^{\,m} = \frac{\bar{R}\bar{v}_r^{\,m} - \bar{v}_{r0}^{\,m}}{1-\left(\bar{v}_{r0}^{\,m}\right)^2} - \frac{1}{\left(1-\left(\bar{v}_{r0}^{\,m}\right)^2\right)^{3/2}}\left\{\operatorname{arctg}\frac{\bar{v}_{\mathrm{r}}^{\,m}}{\sqrt{1-\left(\bar{v}_{r0}^{\,m}\right)^2}} - \operatorname{arctg}\frac{\bar{v}_{\mathrm{r0}}^{\,m}}{\sqrt{1-\left(\bar{v}_{r0}^{\,m}\right)^2}}\right\}, \quad (5.30)$$

где

$$\bar{t}^{\,m} = t\sqrt{\frac{-2\mu_1}{R_0^3}}; \qquad \bar{v}_r^{\,m} = v_r\sqrt{\frac{R_0}{-2\mu_1}}; \qquad \bar{v}_{r0}^{\,m} = v_{r0}\sqrt{\frac{R_0}{-2\mu_1}}. \quad (5.31)$$

Итак, время движения по траектории при взаимодействии двух тел подразделяется на четыре случая движения, три из которых имеют место при наличии трансверсальной составляющей скорости: 1) гиперболический (5.22) при $A > 0$; 2) эллиптический (5.25) при $A < 0$; 3) параболический (5.26) при $A = 0$. Траектории при этом определяются (5.3) при $-0.5 < \alpha_1 < 0$, $-1 \le \alpha_1 < -0.5$, $\alpha_1 = -0.5$ соответственно. В четвертом случае радиального движения время и закон движения задаются соотношением (5.30). Сюда входит приведенная в соответствии с (5.31) радиальная скорость $\bar{v}_r^{\,m}$, которая, согласно (5.27), имеет вид

$$\bar{v}_r^{\,m} = \sqrt{\frac{1}{\bar{R}} - 1 + \left(v_{r0}^{\,m}\right)^2}\,. \quad (5.32)$$

Уравнения для времени (5.22), (5.25) и (5.26) при наличии трансверсальной скорости упрощаются при отнесении к параметрам в перицентрии. Для этого необходимо в указанных выражениях заменить α_1^0 на α_1 и приравнять $\bar{v}_{r0} = 0$. Например, время движения по параболической траектории, согласно (5.26), будет

$$\bar{t} = \frac{2}{3}\left(\bar{R}-1\right)^{3/2} + 2\sqrt{\bar{R}-1} \quad (5.33)$$

и в соответствии с (5.25) по эллиптической орбите

$$\bar{t} = \frac{\bar{R}\bar{v}_r}{2\alpha_1+1} - \frac{\alpha_1\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{(2\alpha_1+1)\bar{R}-\alpha_1}{-\alpha_1-1}\right)}{\left(-2\alpha_1-1\right)^{3/2}}. \quad (5.34)$$

Из последнего выражения при $\bar{R} = \bar{R}_a$, где $\bar{R}_a$ определяется (5.7), найдем время движения из перицентрия в апоцентрий

$$\bar{t}_a = -\frac{\alpha_1\pi}{\left(-2\alpha_1-1\right)^{3/2}}. \quad (5.35)$$

Так как период обращения по эллиптической орбите $\bar{T} = 2\bar{t}_a$, то

$$\bar{T} = -\frac{2\alpha_1\pi}{\left(-2\alpha_1-1\right)^{3/2}}. \quad (5.36)$$

Отсюда следует, что для круговой орбиты ($\alpha_1 = -1$) приведенный в соответствии с (5.17) период

$$\bar{T} = 2\pi. \quad (5.37)$$

После подстановки в (5.36) большой полуоси эллиптической орбиты a в соответствии с (5.15) получаем

$$\bar{T}^2 = -\frac{4\pi^2}{\alpha_1}\bar{a}^3. \quad (5.38)$$

Последнее выражение для круговых орбит ($\alpha_1 = -1$) выражает третий закон Кеплера: "Квадраты времен обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы их средних расстояний от него". Выражение (5.38) по сравнению с законом Кеплера является более точным и дает соотношение между T и a для эллиптических орбит ($\alpha_1 \ne -1$), позволяя учитывать массы обоих взаимодействующих тел посредством параметра μ_1 в α_1.

5.3. ТРАЕКТОРИИ ПРИ КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗДЕЙСТВИЯ

После отнесения скорости (4.80) к параметрам в перицентрии (5.2) приведенная радиальная скорость будет

$$\bar{v}_r = \frac{1}{\beta_p}\sqrt{1 - \frac{\beta_p^2}{\bar{R}^2} - \left(1-\beta_p^2\right)\exp\left[2\alpha_1\beta_p^2\left[\frac{1}{\sqrt{\bar{R}^2-\beta_p^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta_p^2}}\right]\right]}. \quad (5.39)$$

Выражение (5.39) совместно с (5.2) представляет в безразмерном виде траектории движения при взаимодействии двух тел с конечной скоростью его распространения. Они описывают также рассмотренные выше классические траектории, так как при малой скорости β_p выражение (4.80) переходит в (4.83). Соотношение (5.39) в отличие от (5.1) является двухпараметрическим, поскольку зависит не только от параметра α_1, но и от относительной скорости β_p.

Интегрирование уравнений траектории (5.2) и (5.39), а также времени (5.16) и (5.39) выполнялось численно [60] на персональном компьютере помощью пакета MATHCAD. С целью увеличения скорости и точности интегрирования область изменения $\bar{R}$ разделялась на участки, на которых осуществлялось интегрирование, а результаты затем суммировались. С помощью асимптотических решений, приведенных в п. 5.7, и тестовых примеров уста-

новлено, что погрешность интегрирования не превышает 0.001. При расчетах варьировались параметры α_1(-0.1; -0.2; -0.3; -0.4; -0.5; -0.6; -0.7; -0.8; -0.9) и β_p(0.1; 0.3; 0.7; 0.9). Задавались и другие значения параметров, которые определялись особенностями траекторий. Для обработки результатов программы писались на Фортране.

В последующем была разработана программа на языке MATHCAD, которая включала все стадии вычислений. Это позволило значительно упростить расчет траекторий и повысить точность результатов. Данная программа приведена в Приложении 1.

Ниже будут представлены только наиболее характерные виды траекторий, а время движения по ним мы рассматривать не будем. Все рассчитанные траектории (около 90) можно найти в монографии [59] в виде таблиц величин $\overline{R}, \bar{v}_r, \varphi, \bar{x}, \bar{y}, \Delta\varphi, \bar{t}$, где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – декартовы координаты. Там же даны значения $\overline{R}, \varphi$ и $\bar{t}$ для предельных точек классических траекторий, которые определяются таким же параметром α_1 . В Приложении 2 приведены исходные параметры и значения в конечных расчетных точках траекторий, которые систематизированы по форме траекторий.

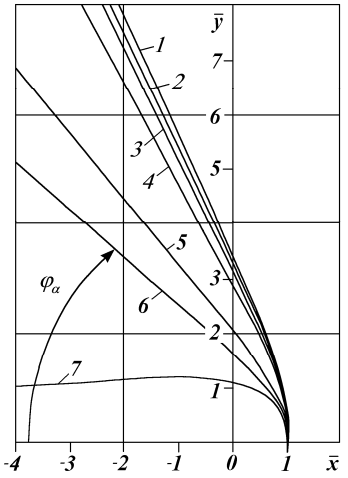
5.4. ГИПЕРБОЛОВИДНЫЕ ТРАЕКТОРИИ

На рис. 5.1 в декартовой системе координат ($\bar{x} = x/R_p$; $\bar{y} = y/R_p$) представлены полуветви гиперболовидных траекторий. Притягивающий центр находится в начале координат, а частица движется с перицентрия ($\bar{x} = 1$; $\bar{y} = 0$) в бесконечность или наоборот. Обращаемость движения допускается процессом интегрирования для всех траекторий, за исключением *7*.

При β_p = 0.1 траектория практически совпадает с классической. С увеличением скорости в перицентрии полуугол между асимптотами φ_a уменьшается и при предельном $\beta_p = \beta_{pc}$ = 0.954 становится отрицательным. Траектория *7* отличается от остальных не только углом $\varphi_a < 0$. Рассмотрим некоторые детали интегрирования. Точка $\overline{R} = 1$ является особой точкой интеграла (5.2), так как она превращает (5.39) в нуль. Поэтому численное интегрирование осуществлялось от $\overline{R} = 1.001$ до $\overline{R} = 1000$, а приращение угла φ в области $1 < \overline{R} < 1.001$ определялось из асимптотического решения

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_1 / \sqrt{1-\beta_p^2}}} \frac{\sqrt{\overline{R}^2 - 1}}{\overline{R}}, \qquad (5.40)$$

вывод которого дан в п. 5.7. Как видим, знаменатель в первом сомножителе обращается в нуль при



$$\beta_p = \beta_{pc} = \sqrt{1-\alpha_1^2}\,, \qquad (5.41)$$

т.е. в данном случае при β_{pc} = 0.954 с приближением к $\overline{R} = 1$ угол φ стремится к бесконечности. Этот результат был проверен численным интегрированием, а именно последовательным заданием начала интегрирования $\overline{R} = 1.0001$, $\overline{R} = 1.00001$ и т.д. Таким образом, частица на траектории с предельной скоростью β_{pc} в перицентрии, двигаясь из бесконечности, достигает окружности радиусом $\overline{R} = 1$ и бесконечно долго на ней находится. Происходит захват движущейся из бесконечности частицы притягивающим центром на круговую орбиту.

Рис. 5.1. Траектории при α_1= - 0.3 и при досветовой скорости в перицентрии ($\beta_p \le \beta_{pc}$) с полууглами между асимптотами φ_a и скоростями в бесконечности $\beta_{r\infty}$ (знак ! свидетельствует о начале интегрирования с $\overline{R}$ = 1.001).

N°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
β_p	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.93	0.954
α	-0.006	-0.054	-0.15	-0.294	-0.486	-0.519	-0.546
$\beta_{r\infty}$	0.063	0.208	0.329	0.480	0.649	0.668	0.667
φ_a°	64.8	64.4	63.8	61.9	50.6	40.3	-5.58!

Рассмотрим данный процесс более детально. Стремление φ к бесконечности, а следовательно, и круговая орбита возможны при $\bar{v}_r = 0$ в выражении (5.2). При этом условии из выражения (5.39) получаем

$$\alpha_1 = 0.5 \frac{\ln\left[\left(1 - \frac{\beta_p^2}{\overline{R}^2}\right) \Big/ \left(1-\beta_p^2\right)\right]}{\beta_p^2 / \sqrt{\overline{R}^2 - \beta_p^2} - \beta_p^2 / \sqrt{1-\beta_p^2}}\,. \qquad (5.42)$$

Радиус круговой орбиты одновременно является радиусом перицентрия, т.е. $\overline{R} = 1$. После нахождения предела правой части (5.42) при $\overline{R} \to 1$ получаем для круговой орбиты в обозначениях $\alpha_{1c} = \alpha_1$ и $\beta_{pc} = \beta_p$ следующую зависимость:

$$\alpha_{1c} = -\sqrt{1-\beta_{pc}^2}\,. \qquad (5.43)$$

При малых скоростях ($\beta_p \to 0$) из (5.43) следует α_1 = -1, что действительно соответствует круговой орбите. Так как выражения (5.41) и (5.43) идентичны, то это еще раз убеждает в том, что при достижении в перицентрии предельной скорости β_{pc} траектория *7* на рис. 5.1 превращается в круговую орбиту.

На рис. 5.1 приведены также радиальные скорости частиц на бесконечности $\beta_{r\infty}$ и полууглы φ_a между асимптотами. Для траектории 7 начало отсчета полярного угла взято при $\bar{R} = 1.001$. С увеличением скорости частицы на бесконечности возрастает и ее скорость в перицентрии. Отступление от этого правила для траекторий *6* и *7* объясняется тем, что параметр траектории α_1 зависит от скорости в перицентрии υ_p. Поэтому целесообразно рассматривать независимый от скорости параметр взаимодействия

$$\alpha = \frac{2\mu_1}{R_p c_1^2} = -\frac{R_g}{R_p}, \qquad (5.44)$$

который связан с α_1 соотношением

$$\alpha = 2\alpha_1 \beta_p^2. \qquad (5.45)$$

Как следует из рис. 5.1, параметр взаимодействия α для всех гиперболовидных траекторий меньше 1, т.е. в соответствии с (5.44) радиус перицентрия больше гравитационного.

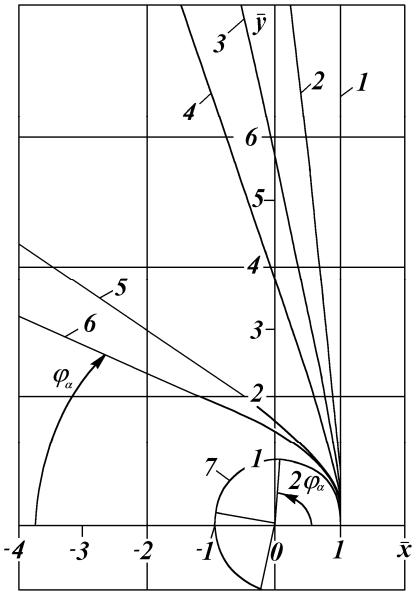
Третьим свойством траектории *7* на рис. 5.1 является ее предельность. В области $\beta_{pc} < \beta_p < 1$ подкоренное выражение в (5.39) отрицательно, т.е. траекторий не существует. С целью численного исследования возможных других траекторий параметры уравнений (4.80) и (4.82) были, как и в (5.17), отнесены к параметрам υ_{t0}, R_0 в произвольной точке траектории. В этом случае уравнение (5.2) остается без изменения, а вместо (5.39) запишем

$$\bar{\upsilon}_r^0 = \frac{1}{\beta_{t0}} \sqrt{1 - \frac{\beta_{t0}^2}{\bar{R}^2} - \left(1 - \beta_{r0}^2 - \beta_{t0}^2\right) \exp\left[2\alpha_1^0 \beta_{t0}^2 \left[\frac{1}{\sqrt{\bar{R}^2 - \beta_{t0}^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta_{t0}^2}}\right]\right]}, \qquad (5.46)$$

где

$$\bar{R} = R/R_0, \quad \beta_{t0} = \upsilon_{t0}/c_1, \quad \beta_{r0} = \upsilon_{r0}/c_1, \quad \bar{\upsilon}_r^0 = \upsilon_r/\upsilon_{t0}, \quad \alpha_1^0 = \mu_1/\left(R_0 \upsilon_{t0}^2\right).$$

Уравнения (5.2), (5.46), а также (5.16) и (5.46) интегрировались на двух участках: $\bar{R} > 1$ и $\bar{R} < 1$. Относительной трансверсальной скорости задавались значения β_{t0} = 0.96; 0.97; 0.98; 0.987, которые больше β_{pc} и варьировалась радиальная скорость β_{r0} (см. рис. 5.2). Во всех расчетах было получено, что при уменьшении $\bar{R}$ до некоторого значения $\bar{R} \to \beta_{t0}$ радиальная скорость стремится к нулю, т.е. эта точка является перицентрием $\bar{R} = \bar{R}_p$. А



величина $R_p/R_0 = \beta_{t0}$, согласно закону сохранения кинетического момента $\bar{h} = \bar{R}\beta_{t0} = 1$, свидетельствует о том, что тангенциальная скорость в данной точке стремится к световой, но ее не достигает: $\beta_p = \upsilon_p/c_1 = 1_{-0}$. Эти траектории при почти световой скорости в перицентрии перенормированы к R_p и представлены на рис. 5.2. Так как параметр траектории $\alpha_1 = \mu_1/(h\upsilon_p)$ при $\upsilon_p = c_1$ связан $\alpha_1^0 = \mu_1/(h\upsilon_{t0})$ соотношением

$$\alpha_1 = \alpha_1^0 \beta_{t0}, \qquad (5.47)$$

Рис. 5.2. Траектории при α_1^0 = - 0.3 и при световой скорости в перицентрии ($\beta_p = 1_{-0}$). Знак * - соответствие данных.

N°	*5*	*4*	*2*	*1*	*5*	*3*	*1*	*6*	*1*	*7*	*1*
β_{t0}	0.96	0.96	0.96	0.96	0.97	0.97	0.97	0.98	0.98	0.987	0.987
α	-0.576	-0.576	-0.576	-0.576	-0.582	-0.582	-0.582	-0.588	-0.588	-0.592	-0.592
β_{r0}	0.1	0.2	0.25	0.28	0.1	0.2	0.243	0.1	0.199	0.1	0.161
$\beta_{r\infty}/\bar{R}_a^*$	0.712	0.850	0.949	1.0	0.707	0.897	1	0.681	1	1.04*	1
φ_a°	35	73	84	90	35	78	90	23	90	41.2	90

то в данном случае $\alpha_1 \approx$ -0.3 и траектории рис. 5.2 можно рассматривать как продолжение траекторий рис. 5.1 при дальнейшем увеличении скорости частицы на бесконечности. Однако в отличие от траекторий рис. 5.1, с увеличением $\beta_{r\infty}$ (см. траектории *6*, *5*, *4*, *3*, *2* на рис. 5.2) угол между асимптотами φ_a увеличивается и при световой скорости частицы ($\beta_{r\infty} = 1$) равен $\pi/2$ (см. траектории *1*), т.е. частица со световой скоростью движется по прямой линии. Ее траектория описывается выражением (5.11). По такой траектории происходит движение частицы с бесконечной скоростью в случае взаимодействия по закону Кулона.

Численные решения показали, что траектории со световой скоростью в перицентрии получаются при тангенциальной скорости частицы

$$\beta_{t0} > \beta_{pc}. \qquad (5.48)$$

С дальнейшим увеличением тангенциальной скорости (см. траекторию 7 на рис. 5.2) орбита становится конечной с апоцентрием, отстоящим от перицен-

трия на угол φ_a = 41.2°. В этом случае период возврата к перицентрию будет осуществляться на угле 82.4°, а за один оборот будет более четырех таких периодов. Под конечной орбитой будем подразумевать траекторию, по которой частица не уходит в бесконечность. Для такой орбиты угол φ_a обозначает угловое расстояние до апоцентрия, т.е. угловой полупериод орбиты. Поскольку радиус апоцентрия в рассмотренном примере $\overline{R}_a = 1.04$ мало отличается от радиуса перицентрия, движение будет проходить по круговой орбите с четырьмя небольшими подскоками на один оборот. Во время подскоков скорость частицы замедляется, а в перицентрии стремится к скорости света. Так как в данном случае φ_a не кратно π/n, где n – целое число, то положение в пространстве перицентриев будет изменяться, они будут поворачиваться за один оборот на угол

$$\Delta\varphi_p = 2\varphi_a(n+1) - 2\pi\,, \qquad (5.49)$$

где n = INTEGER(π/φ_a) – целое число; INTEGER – целая часть числа.

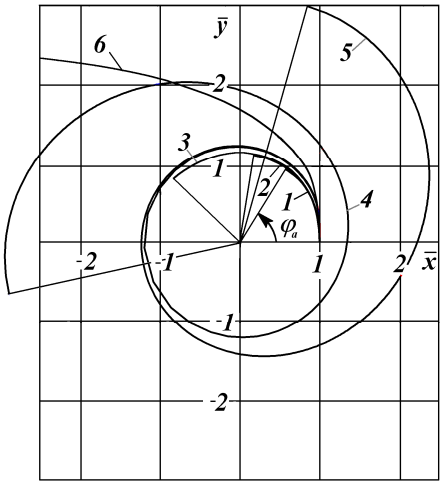
По-видимому, для конечных орбит, аналогичных *7* на рис. 5.2, подкоренное выражение в (5.46) при больших $\overline{R}$ должно быть отрицательным. Найдем предельные параметры α_{1p}^0 и $\beta_{0p} = \sqrt{\beta_{r0}^2 + \beta_{tp}^2}$ из условия $\bar{v}_r^0 = 0$ при $R \to \infty$. После преобразования (5.46) получаем

$$\alpha_{1p}^0 = 0.5\frac{\sqrt{1-\beta_{tp}^2}\,\ln\left(1-\beta_{0p}^2\right)}{\beta_{tp}^2}. \qquad (5.50)$$

При $R_0 = R_p$ и малых скоростях $\beta_{0p} = \beta_{tp} \to 0$, отсюда следует $\alpha_{1p}^0 = -0.5$, т.е. соотношение (5.50) дает величину параметра параболических траекторий. Если же тангенциальная скорость частицы больше предельной скорости β_{pc} и больше β_{tp}, то траектория будет конечной и иметь световую скорость в перицентрии.

В соответствии с этими положениями были определены параметры $\alpha_1^0 = -0{,}498$, $\beta_{t0} = 0.93$, при которых такие конечные траектории наиболее ярко выражены (рис. 5.3). С увеличением радиальной скорости для траекторий *1, 2, 3* величина подскока $\Delta\overline{R} = \overline{R}_a - 1$ и угол до апоцентрия увеличивается. С дальнейшим увеличением β_{r0} величина R_a непрерывно растет, угол φ_a достигает максимума для траектории *4*, а затем уменьшается. При этом траектории *4* и *5* имеют апоцентрий, отстоящий от перицентрия больше, чем на один оборот. С дальнейшим повышением радиальной скорости траектория (линия *6*) размыкается. С приближением β_0 к единице траектории выпрямляются и, приближаясь к вертикали при световой скорости, переходят в прямую (аналогично траекториям *3, 2, 1* на рис. 5.2). Следует отметить, что гиперболовидные траектории на рис. 5.1 и 5.2 могут на отдельных участках

совпадать. Однако им соответствуют разные параметры взаимодействия α и скорости движения частиц по ним разные.



Итак, в области $-0.5 < \alpha_1 < 0$ отмечаются гиперболовидные траектории при скоростях частиц в перицентрии $\beta_p < \beta_{pc}$, траектории захвата частиц из бесконечности на круговую орбиту при $\beta_p = \beta_{pc}$ и траектории при стремящихся к скорости света частиц в перицентрии при $\beta_{t0} > \beta_{pc}$. В последнем случае при $\beta_{t0} > \beta_{tp}$ имеют место конечные траектории, период которых может существенно отличаться от 2π.

Рис. 5.3. Конечные траектории (*1÷5*) при световой скорости в перицентрии ($\beta_p = 1_{-0}$). α_1° = - 0.498; β_{t0}= 0.93; α = - 0.926

N°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
β_{r0}	0.100	0.120	0.128	0.129	0.130	0.200
$\overline{R}_a/\beta_{r\infty *}$	1.103	1.133	1.176	2.981	3.035	0.095*
φ_a°	59.8	82.1	135.6	553.3	432.9	-18.24

5.5. ПАРАБОЛОВИДНЫЕ И ЭЛЛИПСОВИДНЫЕ ТРАЕКТОРИИ

На рис. 5.4 представлены досветовые траектории при α_1 = -0.5, что в классическом случае ($\beta_p \to 0$) дает параболу. Уже при $\beta_p = 0.1$ траектория *1* является сильно вытянутым эллипсом. С увеличением скорости расстояние до апоцентрия уменьшается, а угловое расстояние φ_a возрастает, и для предельной траектории *6* оно превышает 2π. Для этой траектории, как и для предельной траектории *7* на рис. 5.1, угол отсчитывается от $\overline{R} = 1.001$. В области $1.001 > \overline{R} \geq 1$ $\varphi \to \infty$, т.е. происходит захват частицы из конечной области пространства на круговую орбиту. На рис. 5.4 показана также траектория *7* при $\beta_{t0} = 0.9$ и $\beta_{r0} = 0.2$, которая имеет световую скорость в перицентрии. Эта гиперболовидная траектория с отрицательным углом между асимптотами подобна траектории *6* на рис. 5.3.

Итак, при постоянном параметре траектории α_1 с увеличением скорости частицы параболическая траектория превращается в эллипсовидную, в кото-

рой перицентрий за один оборот, согласно (5.49), поворачивается на угол $\Delta\varphi$. Минимальное расстояние до апоцентрия $\overline{R}_a = 5.456$ свойственно для предельной траектории. При еще больших скоростях траектории становятся гиперболовидными со световой скоростью в перицентрии.

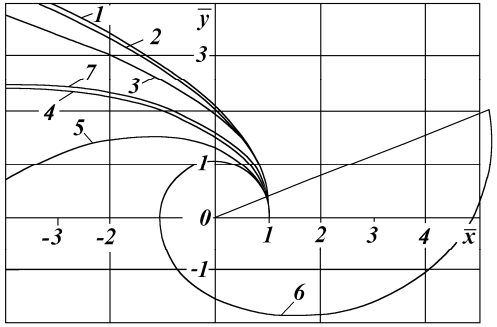


Рис. 5.4. Траектории при α_1= - 0.5 и при досветовой скорости в перицентрии ($\beta_p \le \beta_{pc}$).

N°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
β_p	0.1	0.3	0.5	0.7	0.8	0.866	1_{-0}
α	-0.01	-0.09	-0.25	-0.49	-0.64	-0.75	-0.9
$\overline{R}_a/\beta_{r\infty}{}^*$	236411	2574	250.7	37.28	13.16	5.456	0.195*
φ_a°	180.2	182.2	186.8	200.7	224.3	383.6!	-7.243*

У эллипсовидных траекторий, как следует из рис. 5.5, с увеличением скорости уменьшается эксцентриситет и увеличивается поворот перицентрия. У предельной траектории *5* апоцентрий мало выражен, поэтому она практически не отличается от круговой орбиты. Здесь же приведена траектория *6* со световой скоростью в перицентрии, полученная при $\beta_{t0} = 0.8$ и $\beta_{r0} = 0.4$. Параметр взаимодействия $|\alpha|$ в этом случае превышает единицу, т.е. в перицентрии

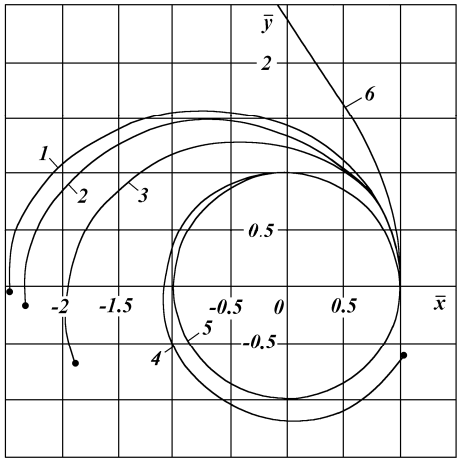


Рис. 5.5. Траектории при α_1= - 0.7 и при досветовой скорости (*1*÷*5*) в перицентрии ($\beta_p \le \beta_{pc}$).

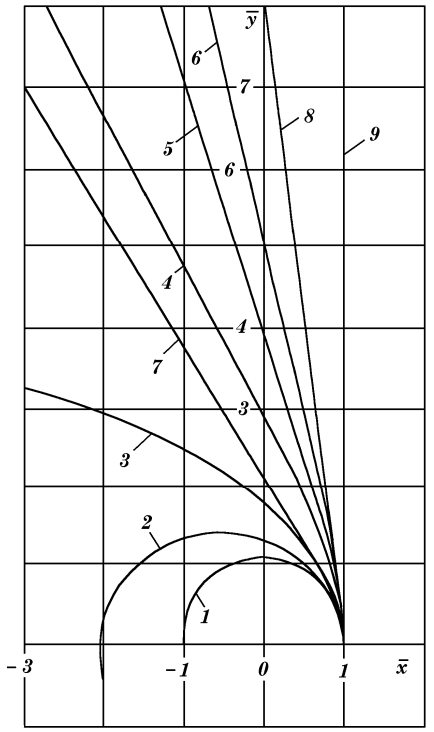
N°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
β_p	0.1	0.3	0.5	0.7	0.714	1_{-0}
α	-0.014	-0.126	-0.350	-0.686	-0.714	-1.12
$\overline{R}_a/\beta_{r\infty}{}^*$	2.482	2.334	1.991	1.220	1.031	0.331*
φ_a°	180.4	184.5	197.5	328.1	1340!	40.26*

частица входит внутрь сферы гравитационного радиуса.

Для определения граничных величин α воспользуемся связью (5.45) с параметром α_1. Тогда для предельных траекторий (5.43) получаем зависимость параметра взаимодействия $\alpha_c = \alpha$ со скоростью в перицентре β_{pc} в виде

$$\alpha_c = -2\beta_{pc}^2\sqrt{1-\beta_{pc}^2}\ . \qquad (5.51)$$

Несложно показать, что это выражение имеет экстремум при $\beta_{pc} = \sqrt{2/3}$ и наибольшее по модулю значение параметра взаимодействия будет $\alpha_c = -4/\sqrt{27}$. При $|\alpha| > |\alpha_c|$ траектории уже имеют световую скорость в перицентрии и они либо гиперболовидные, либо конечные. Таким образом, учитывая (5.44), можно сделать выводы. Во-первых, для притягивающего центра с радиусом меньшим гравитационного радиуса R_g (так называемая "черная дыра") частицы могут проникать внутрь сферы гравитационного радиуса и удаляться от притягивающего центра, не падая на него. Во-вторых, частицы в перицентрии приобретают световую скорость и вследствие уменьшения воздействия на них уходят на бесконечность (или в апоцентрий – для конечных траекторий). Исключение составляет только частица, вектор скорости которой направлен строго по радиусу. Согласно (4.80), при h = 0 и $R_0 \to \infty$ получаем



$$\beta_r = \sqrt{1-\left(1-\beta_{r0}^2\right)\exp\left(-R_g/R\right)}\ . \qquad (5.52)$$

Рис. 5.6. Траектории при постоянном параметре взаимодействия α = - 0.3.

N°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
β_p	0.408	0.463	0.548	0.707	0.866	0.913	0.988	1_{-0}	1
α	-0.9	-0.7	-0.5	-0.3	-0.2	-0.18	-0.154	-0.151	-0.15
$\overline{R}_a/\beta_{r\infty}$	1.036	2.074	157	0.488*	0.739*	0.809*	0.913*	0.968*	1.0*
φ_a°	189.9	193.5	189.1	62.56	73.78	77.56	59.40!	82.72	90

В этом случае частица упадет на притягивающий центр, но ее скорость, как следует из (5.52), будет меньше скорости света. В классическом случае (4.83) для радиально движущейся из бесконечности частицы

$$\beta_r = \sqrt{\beta_{r0}^2 + R_g / R}\,. \qquad (5.53)$$

Если на бесконечности частица покоилась (β_{r0} = 0), то по достижению радиуса $R = R_g$ ее скорость будет равна скорости света. Поскольку этот процесс одинаков как для электромагнитного взаимодействия, так и для гравитационного, величину R_g лучше называть световым радиусом.

Итак, полученные результаты свидетельствуют о том, что для воздействий, распространяющихся со скоростью c_1, притягивающий центр радиусом $R \le R_g$, т.е. "черная дыра", втягивает вещество более слабо, чем классический притягивающий центр, воздействие которого распространяется мгновенно.

В приведенных случаях анализировались взаимодействия при неизменном параметре траектории α_1. При вариации β_p параметры взаимодействующих объектов изменяются. Рассмотрим влияние скорости при постоянных характеристиках взаимодействующих объектов. На рис. 5.6 представлены траектории при неизменном параметре α. С увеличением скорости в перицентрии у эллипсовидных траекторий (*1 – 3*) эксцентриситет увеличивается, а затем они размыкаются и переходят в гиперболовидные траектории (*4-7*), у которых угол между асимптотами растет. При еще большей скорости на бесконечности $\beta_{r\infty}$ (траектория *8*) достигается световая скорость в перицентрии, угол φ_a увеличивается и стремится к $\pi/2$ для световой траектории *9*. Следует отметить, что для $\beta_p = \beta_{pc}$ (траектория *7*) угол между асимптотами меньше, так как интегрирование выполнено до $\overline{R} = 1.001$.

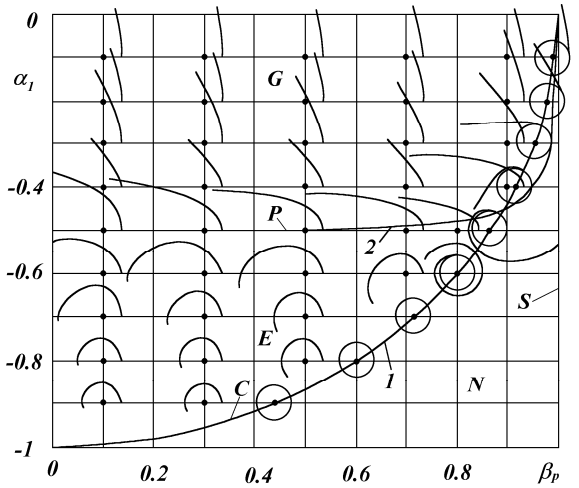


Рис. 5.7. Виды траекторий взаимодействия двух тел в зависимости от параметров α_1 и β_p.

1 – формула (5.43); *2* – формула (5.50). Виды траекторий: *G* – гиперболовидные; *P* – параболовидные; *E* – эллипсовидные; *C* – переходящие в окружность предельные траектории; *S* – со скоростью света в перицентрии; *N* – отсутствие траекторий.

Вариации траекторий при разных α_1 и β_p показаны на рис. 5.7. Зависимость (5.43) в виде кривой *1* ограничивает снизу и справа область существования траекторий с досветовой скоростью в перицентрии. На этой кривой находятся параметры траекторий, переходящих в круговую орбиту. Кривая *2*, представляющая зависимость (5.50), разделяет гиперболовидные траектории от эллипсовидных. На ней расположены параметры параболовидных траекторий. Кривые *1* и *2* пересекаются в точке α_1 = -0.450764 и β_p = 0.892643.

5.6. ТРАЕКТОРИИ ПРИ ОТТАЛКИВАНИИ И ПОЛНЫЙ ПЕРИОД ТРАЕКТОРИЙ

На рис. 5.8 приведены гиперболовидные траектории при отталкивании взаимодействующих объектов. Отталкивающий центр находится в начале координат. Расчеты проводились при трех значениях α_1 и вариации β_p. С увеличением β_p полуугол между асимптотами φ_a возрастает и стремится к $\pi/2$ для световой траектории. Для траекторий параметр взаимодействия α положительный и может быть больше единицы. Скорость частицы с удалением от отталкивающего центра возрастает.

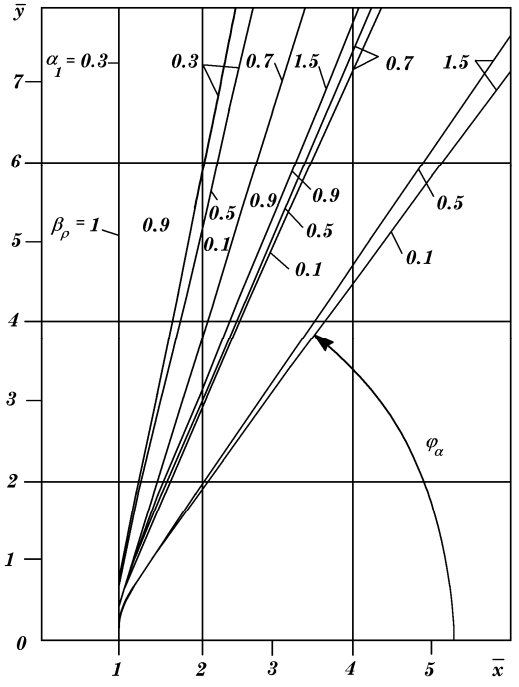


Рис. 5.8. Траектории отталкивания.

Ранее были рассмотрены траектории за полупериод. На рис. 5.9 представлены траектории за полный период. Циклические траектории *1* и *4* являются незамкнутыми. При этом траектория с подскоками *1* имеет три периода за один

α_1	0.3	0.3	0.3	0.3	0.7	0.7	0.7	1.5	1.5	1.5
β_p	0.1	0.5	0.9	1.0	0.1	0.5	0.9	0.1	0.5	0.9
α	0.006	0.15	0.486	0.6	0.014	0.35	1.134	0.03	0.75	2.43
$\beta_{r\infty}$	0.126	0.61	0.968	1.0	0.1543	0.707	0.993	0.198	0.827	0.9999
φ_a°	76.7	76.9	79.1	90	65.7	66.6	73.2	53.2	55.6	69.0

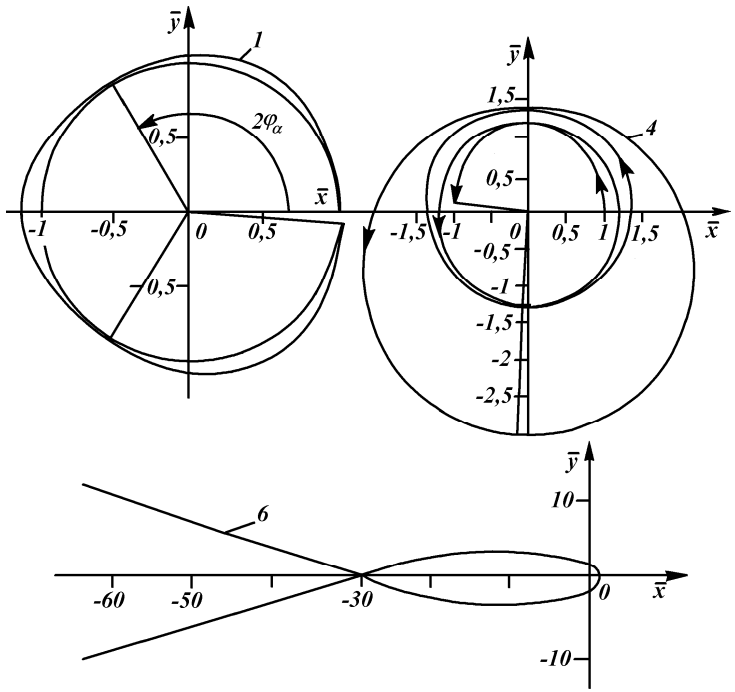


Рис. 5.9. Траектории за полный период при световой скорости в перицентрии. Номера траекторий *1, 4, 6* соответствуют рис. 5.3.

оборот на 360°, а траектория *4* на один период имеет несколько оборотов.

Употребляемое здесь понятие период применимо к расстоянию между взаимодействующими частицами, так как оно увеличивается от минимального $\overline{R}_p = 1$ до максимального $\overline{R}_a$ и затем уменьшается до $\overline{R}_p$ при изменении угла на $\varphi_P = 2\varphi_a$, где φ_P – период функции $\overline{R}(\varphi)$. В отличие от классического случая здесь частица через угол φ_P не возвращается в исходную точку пространства, т.е. векторные функции $\vec{R}(\varphi)$ и $\vec{v}(\varphi)$ не являются периодическими. Поэтому в общем случае движение по конечным траекториям не является периодическим. Однако если φ_a кратно числу π, движение будет периодическим. Из рис. 5.9 видно, что для траекторий *1* и *4* угловое расстояние до апоцентрия можно представить в виде:

$$\varphi_a = \pi n + \pi/k\,, \qquad (5.54)$$

где $n = 0,1,2,...$, $k = 1, 2, 3...$, т.е. частица будет приходить в ту же точку пространства с полным периодом

$$\varphi_P = 2k\varphi_a = 2\pi kn + 2\pi\,. \qquad (5.55)$$

Например, если у траектории *1* было бы точное равенство $\varphi_a = \pi/3$, а не $\varphi_a = 59{,}8^\circ$, что, согласно (5.54) выражается коэффициентами $n = 0$ и $k = 3$, то по (5.55) полный период $\varphi_P = 2\pi$. То есть три периода изменения $\overline{R}(\varphi)$ приводили бы частицу в исходную точку пространства. Для траектории *4*, если бы $\varphi_a = (3\pi + \pi/2)57.3^\circ = 630^\circ$, а не $626{,}8^\circ$, что соответствует коэффициентам $n = 3$; $k = 2$ и полному периоду, согласно (5.55), $\varphi_P = 14\pi$. Здесь частица приходит в исходную точку пространства после двух периодов изменения $\overline{R}(\varphi)$.

Приведенные примеры траекторий *1* и *4* показывают, что период движения двух взаимодействующих частиц может изменяться в широких пределах: от 2π до 14π, т.е. в 7 раз. При этом периодические движения характеризуются целыми значениями чисел n и k. Так как траектории и угол φ_a определяются параметрами α_1 и β, то значениям n и k соответствуют дискретные значения α_1 и β. Эти результаты о дискретных (квантовых) параметрах периодических движений могут иметь важное значение для физики атома и явления радиоактивности.

Рассмотрим еще одну необычную траекторию на рис. 5.9 – траекторию *6*. Она пересекает саму себя на значительном удалении от притягивающего центра. При определении параметров притягивающего центра по характеристикам траектории в случае использования классического закона взаимодействия могут быть допущены ошибки. Например, завышен размер притягивающего центра или взаимодействие притяжения воспринимается как отталкивание: и в первом, и втором случае частица отражается от центра.

Полученные результаты требуют всестороннего осмысления и сопоставления. Уже сейчас видно, что они могут свидетельствовать о новых механизмах явлений. Возможно, эти траектории объяснят наличие устойчивых орбит электронов в атоме, переход электрона с одной орбиты на другую, захват ядром или атомом частицы при определенных ее кинематических параметрах и т.д.

Применительно к тяготению результаты говорят о том, что многие явления имеют противоположную направленность по сравнению с принятой в ОТО. Например, при световой скорости распространения тяготения «черных дыр» не должно быть. Если они будут открыты астрономами, то это будет означать, что скорость гравитации бесконечна или значительно выше скорости света в вакууме.

5.7. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

1. Решение вблизи $\overline{R} = 1$. Подкоренное выражение в (5.39) обозначим через $f\left(\overline{R}^2\right)$. Видно, что $f(1) = 0$. Разложим $f\left(\overline{R}^2\right)$ в окрестности $\overline{R}^2 = 1$ в ряд Тейлора

$$f\left(\overline{R}^2\right) \approx f(1) + f'(1)\left(\overline{R}^2 - 1\right) + f''(1)\frac{\left(\overline{R}^2 - 1\right)^2}{2} + \ldots \qquad (5.56)$$

и ввиду малого отличия $\overline{R}^2$ от 1 ограничимся двумя первыми слагаемыми.

Согласно (5.39), производная имеет вид

$$\frac{\mathbf{d}f}{\mathbf{d}(\overline{R}^2)} = \frac{\beta_p^2}{\overline{R}^4} + \left(1-\beta_p^2\right)\exp\left[2\alpha_1\beta_p^2\left(\frac{1}{\sqrt{\overline{R}^2-\beta_p^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta_p^2}}\right)\right]\times$$

$$\times\frac{\alpha_1\beta_p^2}{\left(\overline{R}^2-\beta_p^2\right)^{3/2}}\Bigg|_{\overline{R}=1} = \beta_p^2\left(\frac{\sqrt{1-\beta_p^2}+\alpha_1}{\sqrt{1-\beta_p^2}}\right).$$

После подстановки производной в (5.56), а $f\left(\overline{R}^2\right)$ в (5.39) радиальная скорость будет

$$\overline{v}_r = \sqrt{\left(1+\alpha_1\Big/\sqrt{1-\beta_p^2}\right)\sqrt{\overline{R}^2-1}}\,. \qquad (5.57)$$

С учетом (5.57) уравнение траектории (5.2) запишется

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_1\Big/\sqrt{1-\beta_p^2}}}\int_1^{\overline{R}}\frac{\mathbf{d}\overline{R}}{\overline{R}\sqrt{\overline{R}^2-1}}\,.$$

В результате интегрирования получено выражение (5.40). Так как точное решение при $\beta_p = 0$ представлено соотношением (5.3), то они были сопоставлены при разных α_1. В результате установлено, что при $\overline{R} = 1.001$ отличия между ними нет до третьего знака после запятой включительно.

В предельном случае, при $\beta_p \to \beta_{pc}$, производная $f'(1) \to 0$. Для уточнения (5.40) необходимо рассмотреть вторую производную. После дифференцирования первой производной получаем

$$\frac{\mathbf{d}^2 f}{\mathbf{d}(\overline{R}^2)^2} = \frac{-2\beta_p^2}{\overline{R}^6} - \frac{\left(1-\beta_p^2\right)\alpha_1\beta_p^2\left(\alpha_1\beta_p^2 + 1.5\sqrt{\overline{R}^2-\beta_p^2}\right)}{\left(1-\beta_p^2\right)^3\exp\left[2\alpha_1\beta_p^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta_p^2}} - \frac{1}{\sqrt{\overline{R}^2-\beta_p^2}}\right)\right]}. \qquad (5.58)$$

В особой точке $\beta_p = \beta_{pc}$ при $\overline{R} = 1$ вторая производная

$$f''(1) = -\beta_{pc}^2\left(0.25 + 0.5\beta_{pc}^2\right),$$

т.е. она конечна. Таким образом, ввиду более высокого порядка малости по отношению к $\left(\overline{R}^2 - 1\right)$ третьим слагаемым в (5.56) можно пренебречь и выражение (5.40) остается справедливым при $\beta_p = \beta_{pc}$.

Теперь определим аппроксимацию вблизи перицентрия для времени. В безразмерном виде интеграл для времени (5.16) запишется

$$\bar{t} = \int\frac{\mathbf{d}\overline{R}}{\overline{v}_r}\,. \qquad (5.59)$$

Подставляя радиальную скорость (5.57) в (5.59) и интегрируя, получаем аппроксимацию для времени вблизи $\overline{R} = 1$ в следующем виде:

$$\bar{t} = \frac{\ln\left(\sqrt{\overline{R}^2-1}+\overline{R}\right)}{\sqrt{1+\alpha_1\Big/\sqrt{1-\beta_p^2}}}\,. \qquad (5.60)$$

2. <u>Аппроксимация при световой скорости.</u> При β_p = 1 выражение (5.40) имеет особенность, поэтому для нахождения приращений φ в области $1 \le \overline{R} \le 1.001$ воспользуемся уравнением прямой, которое при α_1 = 0 определяется соотношением (5.11), которое можно переписать так:

$$\varphi = \arccos\left(1/\overline{R}\right). \qquad (5.61)$$

При $\overline{R} = 1.001$ величина $\varphi = 4.47\cdot10^{-2}$ или φ° = 2.56°, т.е. для световой частицы при изменении $\overline{R}$ от 1 до 1.001 полярный угол изменяется на 2.56°.

3. <u>Аппроксимация для апоцентрия.</u> При численном интегрировании (5.2) для эллипсовидных траекторий расчет ведется до малых величин $\overline{v}_{r\,min}$, которые имеют порядок $1\cdot10^{-3}$ и меньше. Необходимо оценить, какому приращению φ соответствует изменение радиальной скорости от $\overline{v}_{r\,min}$ до нуля. С этой целью относительный радиус $\overline{R}$ выразим из (5.1) через скорость $\overline{v}_{r\,min}$:

$$\overline{R} = \frac{1}{-\alpha_1 - \sqrt{(\alpha_1+1)^2 - \overline{v}_r^2}}\,.$$

Здесь при решении квадратного уравнения выбран знак, соответствующий апоцентрию. Радиус $\vec{R}$ подставим в классическое уравнение траектории (5.3), откуда получаем

$$\Delta\varphi = \arccos\frac{\sqrt{(\alpha_1+1)^2 - \bar{v}_r^2}}{\alpha_1+1}. \qquad (5.62)$$

Для того чтобы учесть влияние относительной скорости β_p, воспользуемся асимптотикой (5.40) для перицентрия. Введем коэффициент влияния k как отношение угла φ, согласно (5.40), к этому же выражению при $\beta_p = 0$. В итоге имеем

$$k = \sqrt{\frac{1+\alpha_1}{1+\alpha_1\Big/\sqrt{1-\beta_p^2}}}. \qquad (5.63)$$

После умножения (5.62) на (5.63) аппроксимация для апоцентрия запишется в виде

$$\Delta\varphi \approx \sqrt{\frac{1+\alpha_1}{1+\alpha_1\Big/\sqrt{1-\beta_p^2}}}\arccos\frac{\sqrt{(\alpha_1+1)^2 - \bar{v}_r^2}}{\alpha_1+1}. \qquad (5.64)$$

Из-за приближенного характера (5.64) для предельной траектории $\beta_p \to \beta_{pc}$ были выполнены численные расчеты при последовательном уменьшении $\bar{v}_{r\,min}$. Они показали, что частица приходит в апоцентрий при конечном угле φ.

Теперь определим аппроксимацию для времени в апоцентрии. Из интегральных соотношений для φ (5.2) и времени t (5.59) следует, что $\mathbf{d}t = \bar{R}_a^2\,\mathbf{d}\varphi$. Следовательно, в апоцентрии при малых изменениях φ можно записать аппроксимацию для времени

$$\Delta\bar{t} = \bar{R}_a^2\Delta\varphi, \qquad (5.65)$$

где $\Delta\varphi$ задается выражением (5.64).

ГЛАВА 6

СИЛЫ ВОЗДЕЙСТВИЯ РАЗЛИЧНЫХ ТЕЛ НА ДВИЖУЩУЮСЯ ЗАРЯЖЕННУЮ ЧАСТИЦУ

6.1. ВОЗДЕЙСТВИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ НА ЧАСТИЦУ

Рассмотрим воздействие заряженной пластины с зарядом q_2 на движущуюся заряженную частицу q_1 (рис. 6.1). Стороны пластины $2a$ и $2b$. Начало координат системы x,z,y взято в центре пластины; плоскость yOz совпадает с

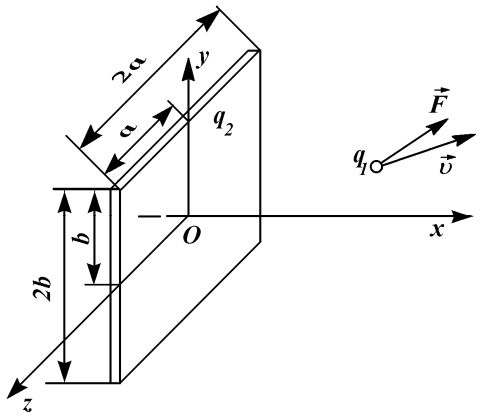


Рис. 6.1. Воздействие заряженной прямоугольной пластины на движущуюся частицу с зарядом q_1.

плоскостью пластины; ось Oy параллельна стороне $2b$, а ось Oz – стороне $2a$. Координаты частицы x_q, y_q, z_q, и она движется со скоростью $\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z$.

Элемент пластины $\mathbf{d}y_s$ $\mathbf{d}z_s$ имеет заряд

$$dq = \sigma\, dy_s dz_s, \qquad (6.1)$$

где $\sigma = q_2/S$ – поверхностная плотность заряда; $S = 4ab$ – площадь пластины.

В соответствии с (4.58) запишем выражение для силы воздействия элемента $\mathbf{d}q$ и просуммируем его по всей поверхности пластины:

$$\vec{F} = F_p\left(1-\beta^2\right)\int_{-a}^{a}\mathbf{d}z_s\int_{-b}^{b}\frac{\vec{R}\mathbf{d}y_s}{\left\{R^2 - \left[\vec{\beta}\times\vec{R}\right]^2\right\}^{3/2}}, \qquad (6.2)$$

где

$$F_p = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon S}, \qquad (6.3)$$

$$\vec{R} = \vec{i}x_q + \vec{j}\eta + \vec{k}\zeta, \qquad (6.4)$$

$$\eta = y_q - y_s, \quad \zeta = z_q - z_s, \qquad (6.5)$$

$x = x_q$, y_q, z_q – координаты движущейся частицы q_1. Так как для пластины координаты $x = 0$, то величина x однозначно характеризует частицу. Вводя замены

$$a_1 = x^2 {y_x}^2 + 2x\zeta\beta_x\beta_z + \zeta^2{\gamma_z}^2 > 0, \qquad (6.6)$$

$$b_1 = 2\beta_y(x\beta_x + \zeta\beta_z); \quad c_1 = {\gamma_y}^2 > 0, \qquad (6.7)$$

$$\gamma_x = \sqrt{1-\beta_y^2-\beta_z^2}, \quad \gamma_y = \sqrt{1-\beta_x^2-\beta_z^2}, \quad \gamma_z = \sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2}, \qquad (6.8)$$

перепишем уравнение для силы (6.2) в проекциях на оси координат:

$$F_x = F_p(1-\beta^2)x\int_{z+a}^{z-a} J_1\mathbf{d}\zeta, \qquad (6.9)$$

$$F_y = F_p(1-\beta^2)x\int_{z+a}^{z-a} J_2\,\mathbf{d}\zeta\,, \tag{6.10}$$

$$F_z = F_p(1-\beta^2)x\int_{z+a}^{z-a} J_1\,\mathbf{d}\zeta\,, \tag{6.11}$$

где

$$J_1 = \int_{y+b}^{y-b}\frac{\mathbf{d}\eta}{(a_1+b_1\eta+c_1\eta^2)^{3/2}}\,,\quad J_2 = \int_{y+b}^{y-b}\frac{\eta\,\mathbf{d}\eta}{(a_1+b_1\eta+c_1\eta^2)^{3/2}}. \tag{6.12}$$

После интегрирования первого интеграла в (6.12) получаем

$$J_1 = \frac{1}{\gamma_z(1-\beta_x^2)(1-\beta^2)}\left\{\frac{\zeta M+N}{(a_2+b_2\zeta+\zeta^2)\sqrt{a_3+b_3\zeta+\zeta^2}}\right|^{\eta=y-b} - \\ -\frac{\zeta M+N}{(a_2+b_2\zeta+\zeta^2)\sqrt{a_3+b_3\zeta+\zeta^2}}\Bigg|^{\eta=y+b}\Bigg\}, \tag{6.13}$$

где

$$a_2 = \frac{x^2(1-\beta_z^2)}{1-\beta_x^2} > 0\,,\quad b_2 = \frac{2x\beta_x\beta_z}{1-\beta_x^2}\,, \tag{6.14}$$

$$a_3 = \frac{x^2\gamma_x^2+2x\eta\beta_x\beta_y+\eta^2\gamma_y^2}{\gamma_z^2} > 0\,,\quad b_3 = \frac{2\beta_z(x\beta_x+\eta\beta_y)}{\gamma_z^2}\,, \tag{6.15}$$

$$N = \eta\gamma_y^2 + x\beta_x\beta_y\,,\qquad M = \beta_y\beta_z\,. \tag{6.16}$$

После подстановки интеграла (6.13) в выражения для F_x (6.9) и F_z (6.11), соответственно имеем (индексы "q" при координатах далее опускаем)

$$F_x = \frac{F_p x}{\gamma_z(1-\beta_x^2)}J_3\Big|_{\eta=y+b}^{\eta=y-b}\,, \tag{6.17}$$

$$F_z = \frac{F_p}{\gamma_z(1-\beta_x^2)}\int_{z+a}^{z-a}\zeta\,\mathbf{d}J_3\Big|_{\eta=y+b}^{\eta=y-b}\,, \tag{6.18}$$

где

$$J_3 = \int_{z+a}^{z-a}\frac{(\zeta M+N)\mathbf{d}\zeta}{(a_2+b_2\zeta+\zeta^2)\sqrt{a_3+b_3\zeta+\zeta^2}^{\,2}}\,. \tag{6.19}$$

Коэффициенты интеграла (6.19) N, a_3 и b_3 зависят от η, поэтому в соотношениях (6.17) и (6.18) приведены значения интеграла и подынтегрального выражения $\mathbf{d}J_3$ при разных значениях η.

Подынтегральный числитель интегралов, входящих в F_z, можно преобразовать следующим образом:

$$(M\zeta+N)\zeta = M[(a^2+b_2\zeta+\zeta^{\,2})+M_2\zeta+N_2]\,,$$

где

$$N_2 = -a_2 = -x^2\frac{1-\beta_z^2}{1-\beta_x^2}\,, \tag{6.20}$$

$$M_2 = \frac{N}{M}-b_2 = \frac{\eta(1-\beta_x^2)\gamma_y^2+x\beta_x\beta_y(\gamma_y^2-\beta_x^2)}{\beta_y\beta_z(1-\beta_x^2)}. \tag{6.21}$$

Тогда интегралы в (6.19) упрощаются и сводятся к интегралам типа J_3 следующим образом:

$$F_z = \frac{F_p\beta_y\beta_z}{\gamma_z(1-\beta_x^2)}\left[\ln\gamma_z\left(R_v+x\beta_x\beta_z+\eta\beta_y\beta_z+\zeta\gamma_z^2\right)+J_3(M_{2.},N_2)\right]\Bigg|_{\eta=y+b}^{\eta=y-b}\Bigg|_{\zeta=z+a}^{\zeta=z-a}\,, \tag{6.22}$$

где

$$R_v = \sqrt{R^2-[\vec{\beta}\times\vec{R}]^2} = \sqrt{R^2(1-\beta^{\,2})+(\vec{\beta}\vec{R})^2}\,. \tag{6.23}$$

Здесь в интеграле $J_3\,(M_2\,,N_2\,)$ коэффициенты M и N в соотношении (6.19) замещены параметрами M_2 и N_2 соответственно.

Как видим, выражения (6.17) и (6.22) для сил F_x и F_z определяются интегралом (6.19). Этот интеграл не встречается в справочниках и был вычислен:

$$J_3 = \frac{M(a_3-a_2-A)-N(b_3-b_2)}{A\sqrt{2A-B}}\operatorname{arctg}\frac{Z^-}{\sqrt{2A-B}\sqrt{a_3+b_3\zeta+\zeta^2}} - \\ -\frac{M(a_3-a_2+A)-N(b_3-b_2)}{2A\sqrt{2A+B}}\ln\frac{\sqrt{2A+B}\sqrt{a_3+b_3\xi+\xi^2}+Z^+}{\sqrt{2A+B}\sqrt{a_3+b_3\xi+\xi^2}-Z^+}, \tag{6.24}$$

где

$$A = \sqrt{(a_3-a_2)^{\,2}-(a_3b_2-a_2b_3)(b_3-b_2)}\,, \tag{6.25}$$

$$B = 2(a_3-a_2)-b_2(b_3-b_2)\,, \tag{6.26}$$

$$Z^{\pm} = A\pm[(a_3-a_2)+\zeta(b_3-b_2)]\,. \tag{6.27}$$

После подстановки интеграла в соотношения (6.17) и (6.22) и выполнения достаточно трудоемких преобразований получено выражение для со-

ставляющих силы воздействия заряженной плоскости на движущуюся частицу в следующем виде:

$$F_x = F_p \operatorname{arctg} \frac{x^2\beta_y\beta_z - x\eta\beta_x\beta_z - \zeta\eta(1-\beta_x^2) - x\zeta\beta_x\beta_y}{xR_v}\Bigg|_{\eta=y+b}^{\eta=y-b}\Bigg|_{\zeta=z-a}^{\zeta=z+a}, \quad (6.28)$$

$$F_z = \frac{F_p}{1-\beta_x^2}\Big[\gamma_y \ln\left(\gamma_y R_v + x\beta_x\beta_y + \eta\gamma_y^2 + \zeta\beta_y\beta_z\right) - \quad (6.29)$$

$$-\frac{\beta_y\beta_z}{\gamma_z}\ln\left(\gamma_z R_v + x\beta_x\beta_z + \eta\beta_y\beta_z + \zeta\gamma_z^2\right)\Big]\Bigg|_{\eta=y+b}^{\eta=y-b}\Bigg|_{\zeta=z-a}^{\zeta=z+a} - \frac{\beta_x\beta_z}{1-\beta_x^2}F_x,$$

$$F_y = \frac{F_p}{1-\beta_x^2}\Big[\gamma_z \ln\left(\gamma_z R_v + x\beta_x\beta_z + \eta\beta_y\beta_z + \zeta\gamma_z^2\right) - \quad (6.30)$$

$$-\frac{\beta_y\beta_z}{\gamma_y}\ln\left(\gamma_y R_v + x\beta_x\beta_y + \eta\gamma_y^2 + \zeta\beta_y\beta_z\right)\Big]\Bigg|_{\eta=y+b}^{\eta=y-b}\Bigg|_{\zeta=z-a}^{\zeta=z+a} - \frac{\beta_x\beta_y}{1-\beta_x^2}F_x,$$

где

$$R_v = \sqrt{R^2 - [\vec{\beta}\times\vec{R}]^2} = \sqrt{\gamma_x^2x^2 + \gamma_y^2\eta^2 + \gamma_z^2\zeta^2 + 2\beta_x\beta_y x\eta + 2\beta_x\beta_z x\zeta + 2\beta_y\beta_z\eta\zeta}; \quad (6.31)$$

x, y, z – координаты частицы. Здесь выражение для силы F_y записано по аналогии с F_z, так как оси y и z идентичны для пластины (см. рис. 6.1).

При приближении скорости движения v точечного тела к величине c_1, т.е. при $\beta\to1$, выражения (6.28)-(6.30), как и выражение (4.58), стремятся к нулю. Это означает, что при достижении движущимся заряженным телом скорости, равной скорости распространения электрического воздействия, заряженная пластина прекращает свое влияние на тело, и оно будет двигаться без ускорения. Данный вывод относится к наэлектризованным телам любой формы, так как выражение для силы воздействия от них может быть получено суммированием выражений (4.58) по всем элементам этих тел.

Выражения (6.28)-(6.30) описывают величину силы воздействия одной пластины на движущееся тело. Если есть несколько пластин, то можно написать выражение для силы от каждой пластины и просуммировать их. В случае двух параллельных одинаковых пластин (рис. 6.2), расположенных на расстоянии $2d$ друг от друга, полученное выражение будет описывать силу воздействия от плоского конденсатора. Центр пластины с зарядом $(-q_2)$ находится на оси x при $x = -d$. Относительно этой пластины расстояние до частицы q_1 вдоль оси x будет $(x + d)$. Аналогично пластина с зарядом q_2 отдалена от частицы на расстояние $(x - d)$. Поэтому, используя выражения для сил

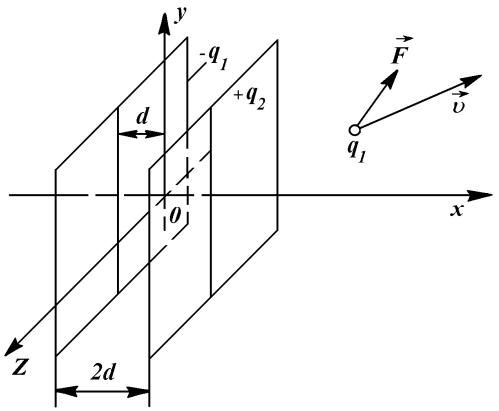


Рис. 6.2. Воздействие плоского прямоугольного конденсатора на движущуюся заряженную частицу q_1.

(6.28)-(6.30), но заменяя в них координату x на соответствующие расстояния, с учетом знака заряда пластин получаем выражение для силы воздействия плоского конденсатора на движущуюся частицу

$$\vec{F}_k = \vec{F}(x-d) - \vec{F}(x+d), \quad (6.32)$$

где составляющие векторов в правой части определяются (6.28)-(6.30) при x равном $(x - d)$ и $(x + d)$, соответственно.

Если устремить размеры конденсатора a и b к бесконечности при условии, что $\beta < 1$, то для неподвижной частицы с зарядом q_1 сохранится лишь выражение для силы внутри конденсатора, которое имеет вид

$$F_x = -\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}q_1, \quad (6.33)$$

где $\sigma = q_2/S$ – плотность заряда на пластинах конденсатора. Этот предел соответствует конденсатору, у которого расстояние между пластинами значительно меньше их размеров. Как следует из соотношения, сила направлена перпендикулярно к пластинам ($F_y = F_z = 0$). Выражение (6.33) широко применяется в электростатике. Им можно пользоваться при малой скорости движения заряженных частиц и при малом расстоянии между пластинами конденсатора по сравнению с их размерами. Но если указанные условия не сохраняются, то воздействие конденсатора на частицу необходимо определять согласно (6.32).

6.2. СКОРОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В КОНДЕНСАТОРЕ

Рассмотрим движение заряженной частицы в частном случае, когда она движется вдоль оси x перпендикулярно к пластине и по ее центру, т.е. $y = z = \beta_y = \beta_z = 0$. В этом случае на частицу не будут действовать боковые силы и ее движение будет прямолинейным. При массе m и заряде q_1 ускорение частицы, согласно выражениям (6.28)-(6.30) и второму закону Ньютона (2.4), будет следующим:

$$w = w_p \operatorname{arctg} \frac{(1-\beta^2)ab}{x\sqrt{x^2 + (1-\beta^2)(a^2+b^2)}}, \quad (6.34)$$

где $w_p = 4\dfrac{q_1 q_2}{\varepsilon m S}$.

Полученное дифференциальное уравнение рассмотрим в двух приближениях. В первом случае берем малую скорость υ движения частицы, т.е. $\beta = \upsilon/c_1 \to 0$. Так как ускорение $w = \dfrac{\mathbf{d}\upsilon}{\mathbf{d}t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathbf{d}\upsilon^2}{\mathbf{d}x}$, то (6.34) при граничном условии $\upsilon(x_0) = \upsilon_0$ может быть записано в виде интеграла

$$\upsilon^2 - \upsilon_0^2 = 2w_p \int \operatorname{arctg} \frac{ab}{x\sqrt{x^2 + a^2 + b^2}} \mathbf{d}x. \qquad (6.35)$$

В результате интегрирования по частям соотношение (6.35) сводится к выражению

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2w_p \left\{ x \operatorname{arctg} \frac{ab}{x\sqrt{x^2 + a^2 + b^2}} + ab \int \frac{(2z^2 - (a^2 + b^2))\mathbf{d}x}{z^4 - (a^2 + b^2)z^2 + a^2 b^2} \right\}\Bigg|_{x_0}^{x}$$

где $z = \sqrt{x^2 + a^2 + b^2}$.

Поскольку знаменатель интеграла раскладывается на сомножители

$$z^4 - (a^2 + b^2)z^2 + a^2 b^2 = (z - b)(z + b)(z - a)(z + a),$$

то после интегрирования запишем выражение для скорости частицы, движущейся под воздействием заряженной плоскости (см. рис. 6.1) вдоль оси x:

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2w_p \left(x \operatorname{arctg} \frac{ab}{xR_s} + \frac{b}{2} \ln \frac{R_s - a}{R_s + a} + \frac{a}{2} \ln \frac{R_s - b}{R_s + b} \right)\Bigg|_{x_0}^{x}, \qquad (6.36)$$

где $R_s = \sqrt{x^2 + (a^2 + b^2)}$, υ_0- скорость частицы в точке $x = x_0$.

Выражение (6.36) описывает движение частицы, при котором воздействие на нее со стороны пластинки выражалось бы электростатическими силами, не зависящими от скорости. Это приближение в случае двух точечных тел соответствует закону Кулона.

Во втором случае возьмем частицу со скоростью, близкой к величине c_1.

Введем обозначение $u = \dfrac{(1 - \beta^2)}{x^2}$, тогда ускорение запишется

$$w = 0{,}5c_1^2 \frac{\mathbf{d}\beta^2}{\mathbf{d}x} = -0{,}5c_1^2 \left(x^2 \frac{\mathbf{d}u}{\mathbf{d}x} + 2xu \right).$$

В этих обозначениях уравнение (6.34) будет

$$x^2 \frac{\mathbf{d}u}{\mathbf{d}x} + 2xu + 2w_p c_1^2 \operatorname{arctg} \frac{uab\,\mathrm{sign}(x)}{\sqrt{1 + u(a^2 + b^2)}} = 0.$$

При $\beta \to 1$ переменная $u \to 0$, поэтому, разлагая arctg в ряд Тейлора и ограничиваясь членами первого порядка, получаем

$$x^2 \frac{\mathbf{d}u}{\mathbf{d}x} + 2xu + \nu abu = 0, \qquad (6.37)$$

где

$$\nu = \frac{8q_1 q_2 \mathrm{siqn}(x)}{\varepsilon c_1^2 m S}, \qquad (6.38)$$

sign $x = x/|x|$ – знак x.

Дифференциальное уравнение (6.37) является уравнением с разделяющимися переменными. После его интегрирования при граничном условии $\beta(x_0) = \beta_0$ находим

$$\beta^2 = 1 - (1 - \beta_0^2)\exp\left[\nu ab \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right) \right]. \qquad (6.39)$$

Здесь интегрирование ведется при одном знаке x во всем диапазоне его изменения. При смене знака x соотношение (6.39) должно применяться отдельно на отрицательном и положительном участках x и состыковываться на их границе. В дальнейшем введем обозначение

$$\frac{\mathrm{sign}(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x^2}}. \qquad (6.40)$$

После подстановки в (6.39) соответствующих обозначений скорость движения частицы вдоль оси пластины запишется в виде:

$$\upsilon^2 = c_1^2 - (c_1^2 - \upsilon_0^2)\exp\left[\frac{2q_1 q_2}{\varepsilon m c_1^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_0{}^2}} \right\} \right]. \qquad (6.41)$$

Для конденсатора, расстояние между пластинами которого равно $2d$ и центр системы координат помещен в центр конденсатора (см. рис. 6.2), сила воздействия на частицу определится согласно (6.32) и (6.34). Уравнение движения в том же приближении сведется к дифференциальному уравнению, аналогичному (6.37). В результате его решения скорость движения частицы в приближении для $\beta \to 1$ определится следующим выражением:

$$\upsilon^2 = c_1^2 - (c_1^2 - \upsilon_0^2)\exp\left[\frac{2q_1 q_2}{\varepsilon m c_1^2} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x_0+d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_0-d)^2}} \right) \right]. \qquad (6.42)$$

Соотношение (6.42), как и (6.41), можно использовать при неизменных знаках $(x-d)$ и $(x+d)$. Основное отличие выражений (6.41) и (6.42) от выражения (6.36) – зависимость приращений квадрата скорости частицы от ее на-

чальной скорости. К этому свойству мы еще вернемся, когда будем рассматривать энергию движения частицы.

Другим отличием этих выражений является то, что из соотношений (6.41) и (6.42) следует вывод о невозможности ни при каких условиях достижения частицей скорости, большей c_1. Причем ее движение не зависит от соотношения размеров пластины или конденсатора, а соотношение (6.36) не накладывает никаких ограничений на величину скорости частицы: она может быть настолько большой, насколько большим будет коэффициент w_p.

И последним отличием служит то, что в выражении (6.36) квадрат приращения скорости зависит от величины заряда и массы в линейном соотношении, в то время как в выражениях (6.41) и (6.42) данная зависимость представлена более сложной функцией.

Все указанные отличия обусловлены зависимостью силы (ускорения) от скорости и необычны для классической механики. Из-за них невозможно применение ее энергетических методов. Так, приращение квадрата скорости тела в механике является приращением энергии его единицы массы. Однако из выражений (6.41) и (6.42) видно, что при электрическом взаимодействии приращение квадрата скорости зависит от массы всего тела, например в случае (6.41)

$$\Delta v^2 = v^2 - v_0^2 = c_1^2(1-\beta_0^2)exp\left[\frac{2q_1q_2}{\varepsilon m c_1^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x_0{}^2}}\right\}\right]. \qquad (6.43)$$

6.3. СИЛА ВОЗДЕЙСТВИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ НИТИ И СКОРОСТЬ ЧАСТИЦЫ

Эта задача может возникнуть при рассмотрении взаимодействия заряженной нити или заряженного провода с частицей, когда расстояние между ними значительно больше диаметра провода. В данном случае провод можно описать в виде отрезка прямой (рис. 6.3), расположенного вдоль оси *z*. Если длина отрезка 2*a*, а центр системы координат *xyz* расположен посередине отрезка, то подстановкой $в \to 0$ в соотношения (6.28)-(6.30), описывающие воздействие от плоскости шириной 2*b* и длиной 2*a*, мы получим выражения для сил от отрезка прямой.

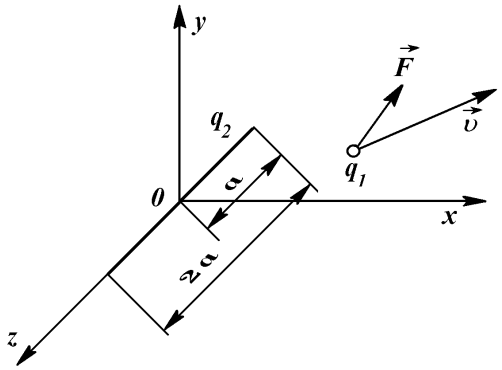


Рис. 6.3. Воздействие заряженного отрезка на движущуюся заряженную частицу q_1.

После преобразования выражений сила на движущуюся частицу с зарядом q_1 запишется в векторном виде:

$$\vec{F} = \frac{Qq_1}{\varepsilon R_v}\frac{\vec{R}(x\beta_x\beta_z + y\beta_y\beta_z + \gamma_z^2\zeta) - \vec{k}R_v^2}{(1-\beta_y^2)x^2 + 2\beta_x\beta_y xy + (1-\beta_x^2)y^2}\Bigg|_{\zeta=z-a}^{\zeta=z+a}, \qquad (6.44)$$

где

$$R_v = \sqrt{R^2 - [\vec{\beta}\times\vec{R}]^2} = \sqrt{\gamma_x^2x^2 + \gamma_y^2y^2 + \gamma_z^2\zeta^2 + 2\beta_x\beta_y xy + 2\beta_x\beta_z x\zeta + 2\beta_y\beta_z y\zeta};$$

$\vec{R} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,\zeta$;

$Q = q_2/2a$ – погонная плотность заряда отрезка, а q_2 – его заряд.

Из выражения (6.44) видно, что размер отрезка *a* и расположение частицы по отношению к отрезку могут значительно изменять направление силы на частицу при том же расстоянии между ними. При большой длине отрезка это влияние уменьшается. Рассмотрим силу (6.44) в пределе при $a \to \infty$ и скорости частицы $\beta < 1$. В этом случае, характерном при длине заряженного провода значительно превышающей расстояние до частицы, выражения для проекций силы на частицу имеют вид:

$$F_x = \frac{2Qq_1\gamma_z}{\varepsilon}\frac{x}{(1-\beta_y^2)x^2 + 2\beta_x\beta_y xy + (1-\beta_x^2)y^2}, \qquad (6.45)$$

$$F_y = \frac{2Qq_1\gamma_z}{\varepsilon}\frac{y}{(1-\beta_y^2)x^2 + 2\beta_x\beta_y xy + (1-\beta_x^2)y^2}, \qquad (6.46)$$

$$F_z = \frac{2Qq_1\beta_z}{\varepsilon}\frac{-x\beta_x - y\beta_y}{(1-\beta_y^2)x^2 + 2\beta_x\beta_y xy + (1-\beta_x^2)y^2}. \qquad (6.47)$$

В формулах (6.45) – (6.47), как и в выражении силы (6.33) в плоском конденсаторе с бесконечно большими пластинами, предельный переход по размерам осуществляется при $\beta \neq 1$, поэтому их можно применять при небольших скоростях движения частицы, т.е. $\beta < 1$. В частном случае радиального движения ($y = z = \beta_y = \beta_z = 0$), согласно (6.45)–(6.47), действует только сила вдоль оси *x*:

$$F_x = \frac{2Qq_1\sqrt{1-\beta_x^2}}{\varepsilon x}. \qquad (6.48)$$

В этом случае при приближении частицы к скорости c_1 сила стремится к нулю как $\sqrt{1-\beta^2}$, т.е. слабее, чем при взаимодействии двух точечных частиц. Однако это может быть обусловлено погрешностью предельного перехода при $a \to \infty$.

При очень малых скоростях частицы $\beta << 1$ проекции величины силы от длинного заряженного провода на движущуюся с малой скоростью частицу, согласно выражениям (6.45)-(6.47), запишутся в виде

$$F_x = \frac{2Qq_1}{\varepsilon}\frac{x}{x^2+y^2}; \tag{6.49}$$

$$F_y = \frac{2Qq_1}{\varepsilon}\frac{y}{x^2+y^2}. \tag{6.50}$$

Приведенными выражениями, как известно, пользуются в электростатике.

Теперь рассмотрим движение заряженной частицы вдоль оси x, которая расположена перпендикулярно заряженному отрезку и начинается на его середине (см. рис. 6.3). При условиях $y = z = \beta_y = \beta_z = 0$ и в соответствии с (6.44) величина силы на частицу будет

$$F_x = \frac{2Qq_1 a}{\varepsilon}(1-\beta_x^2)\Big/\left(x\sqrt{x^2+(1-\beta_x^2)a^2}\right) \tag{6.51}$$

Точное выражение (6.51) отличается от приближенного (6.48), полученного для бесконечного отрезка.

Если m – масса частицы, то по второму закону Ньютона (2.4) ее ускорение

$$w = q_1q_2(1-\beta_x^2)\Big/\left(\varepsilon m x\sqrt{x^2+(1-\beta_x^2)a^2}\right) \tag{6.52}$$

Для определения скорости решим приближенно это дифференциальное уравнение. Рассмотрим случай скорости частицы, близкой к величине c_1, т.е. $\beta_x \sim 1$. Пренебрегая $(1-\beta_x^2)$ в знаменателе (6.52), перепишем таким образом

$$\frac{\mathbf{d}v^2}{\mathbf{d}x} = \frac{2q_1q_2\,sign(x)}{\varepsilon m c_1^2}\frac{c_1^2-v^2}{x^2}.$$

Полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными при граничном условии $v(x_0) = v_0$ дает выражение для скорости частицы, находящейся под воздействием отрезка, в виде

$$v^2 = c_1^2 - (c_1^2 - v_0^2)\exp\frac{2q_1q_2}{\varepsilon m c_1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_0^2}}\right). \tag{6.53}$$

Как видим, последнее выражение полностью совпадает с (6.41) для плоскости. Справедливы для отрезка и те выводы, которые вытекают из выражения (6.41).

Мы вычислили силу воздействия на движущуюся заряженную частицу, а также скорость ее движения в случае влияния на нее другой частицы, пластины или провода. Предложенным методом можно определить влияние от заряженных тел любой формы, а также от совокупности таких тел. Полученные выражения при малых скоростях частицы совпадают с известными в физике. С другой стороны, из полученных выражений при больших скоростях следует, что в результате ускорения заряженной частицы любыми телами она не может превысить скорости c_1.

6.4. СИЛА ВОЗДЕЙСТВИЯ ДВИЖУЩЕЙСЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ НА МАГНИТ

Неподвижное заряженное тело не взаимодействует с магнитом или с проводником, по которому течет ток. Но при его движении такое взаимодействие наблюдается. Мы вычислим в отдельных случаях его силу.

Воздействие точечного заряженного тела на магнит определяется дифференциальным уравнением Даламбера (3.34). В проекциях по осям координат оно запишется так:

$$H_x = -\frac{4\pi}{c}\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}v_z - \frac{\partial\rho}{\partial z}v_y\right);$$

$$H_y = -\frac{4\pi}{c}\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}v_x - \frac{\partial\rho}{\partial x}v_z\right); \tag{6.54}$$

$$H_z = -\frac{4\pi}{c}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}v_y - \frac{\partial\rho}{\partial y}v_x\right).$$

Сопоставим правые части уравнений Даламбера (6.54) и (4.6) для E. Если мы умножим правые части уравнений (4.6) на компоненты скорости и составим разности типа

$$\Box E_y v_z - \Box E_z v_y = \frac{4\pi}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}v_z - \frac{\partial\rho}{\partial z}v_y\right) = -c_1\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\Box H_x,$$

то получим

$$\Box\left[H_x + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,(\beta_z E_y - \beta_y E_z)\right] = 0.$$

Так как это выражение справедливо при любых значениях переменных, то

$$H_x = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,(\beta_z E_y - \beta_y E_z). \tag{6.55}$$

Аналогичные выражения получим для остальных составляющих $\vec{H}$, поэтому в векторном виде можем записать

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}[\vec{\beta} \times \vec{E}]. \qquad (6.56)$$

Итак, решение уравнений (4.6) и (3.34) или (6.54) связаны соотношением (6.56). Отсюда, подставляя в (6.56) решения уравнения (4.6) для электрического воздействия движущегося заряда (4.55), находим силу воздействия его на единичный магнитный полюс

$$\vec{H} = \frac{q_1(1-\beta^2)[\vec{\beta} \times \vec{R}]}{\sqrt{\mu\varepsilon}\left\{R^2 - [\vec{\beta} \times \vec{R}]^2\right\}^{3/2}}, \qquad (6.57)$$

где $\vec{R}$ – радиус-вектор от движущегося тела с зарядом q_1 до единичного магнитного полюса, а $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c_1}$ – приведенная скорость относительно этого полюса. Как следует из выражения (6.57), заряженное тело не влияет на магнит при покое ($\beta = 0$) и при скорости движения, равной c_1.

Зная магнитную напряженность $\vec{H}$ и используя соотношение $\vec{F} = \mu M\vec{H}$, легко можно определить силу на любой малый магнитный полюс с магнитным зарядом M. Если же магнитный полюс нельзя принять за точечный, то его можно разбить на элементарные участки с магнитным зарядом ΔM и, просуммировав силу по всем участкам, вычислить ее на все намагниченное тело.

6.5. СИЛА ВОЗДЕЙСТВИЯ ТОЧЕЧНОГО МАГНИТА НА ЗАРЯЖЕННУЮ ЧАСТИЦУ

Сила воздействия точечного полюса M на частицу противоположна по направлению силе воздействия этой частицы на точечный полюс и, согласно (6.57), при $\vec{R}_{Mq} = -\vec{R}$ будет иметь вид

$$\vec{F}_q = \frac{\mu M q_1(1-\beta^2)[\vec{\beta} \times \vec{R}_{Mq}]}{\sqrt{\mu\varepsilon}\left\{R_{Mq}{}^2 - \left[\vec{\beta} \times \vec{R}_{Mq}\right]^2\right\}^{3/2}}, \qquad (6.58)$$

где $\vec{R}_{Mq}$ – радиус-вектор от магнита M до частицы q_1.

Но если бы в месте нахождения частицы q_1 находился другой точечный полюс M_1, сила воздействия полюса M на него выражалась бы в виде закона Кулона:

$$\vec{F}_M = \frac{\mu M M_1 \vec{R}_{Mq}}{R_{Mq}{}^3} = \vec{H}M_1, \qquad (6.59)$$

где

$$\vec{H} = \frac{M\vec{R}_{Mq}}{R_{Mq}{}^3}; \qquad (6.60)$$

$\vec{H}$ – сила воздействия точечного магнита M на единичный магнитный полюс, расположенный в месте нахождения частицы. Величину $\vec{H}$ назовем магнитной напряженностью. Подставляя $M\vec{R}_{Mq}$ из (6.60) в (6.58), получаем выражение для силы воздействия точечного магнитного полюса на движущуюся частицу q_1:

$$\vec{F}_q = \frac{\mu q_1(1-\beta^2)R_{Mq}^3[\vec{\beta} \times \vec{H}]}{\sqrt{\mu\varepsilon}\left\{R_{Mq}^2 - [\vec{\beta} \times \vec{R}_{Mq}]^2\right\}^{3/2}}. \qquad (6.61)$$

6.6. СИЛА ВОЗДЕЙСТВИЯ ПРОВОДНИКА С ТОКОМ НА ЗАРЯЖЕННУЮ ЧАСТИЦУ

Как известно, проводник с током воздействует на магнит, например, на намагниченную стрелку. Мы уже пользовались соотношением (3.3), которое выражает силу воздействия участка проводника Δl с током I на единичный магнитный полюс. Формула (3.3) характеризует магнитную напряженность. Если вместо магнита в той же точке по отношению к проводнику Δl будет находиться движущаяся заряженная частица q_1, то сила воздействия на нее, обусловленная напряженностью H, определяется выражением (6.61). Исключая H из этих двух выражений, получаем силу воздействия участка Δl проводника с током I на заряженную частицу q_1 в виде:

$$\Delta\vec{F}_q = \frac{\mu I q_1(1-\beta^2)[\vec{v} \times [\Delta\vec{l} \times \vec{R}]]}{c^2\{R^2 - [\vec{\beta} \times \vec{R}]^2\}^{3/2}} \qquad (6.62)$$

Здесь $\vec{v} = \vec{\beta} \cdot c_1$ – скорость частицы относительно проводника, а $\vec{R}$ - радиус-вектор от проводника $\Delta\vec{l}$ до частицы. Выражение (6.62) позволяет установить силу воздействия прямого проводника с током на движущуюся частицу. С этой целью рассмотрим проводник длиной $2a$, по середине которого выбран центр координат, а ось z направлена вдоль проводника в направлении тока I. Если координаты частицы – x, y, z, то расстояние от элемента Δl до частицы q_1 будет

$$\vec{R} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}\xi, \qquad (6.63)$$

где $\zeta = z - l$ – длина l отсчитывается от нуля в направлении оси z.
Двойное векторное произведение в (6.62) можно записать так:

$$\left[\vec{\beta}\times\left[\mathbf{d}\vec{l}\times\vec{R}\right]\right] = \mathbf{d}\vec{l}\,(\vec{\beta}\vec{R}) - \vec{R}(\vec{\beta}\mathbf{d}\vec{l}) = \mathbf{d}l\left[\vec{k}(x\beta_x + y\beta_y) - \beta_z(\vec{i}\,x + \vec{j}y)\right].$$

Просуммировав силу (6.62) по всем участкам проводника, можем записать

$$\vec{F} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{Iq_1(1-\beta^2)\left[\vec{k}(x\beta_x + y\beta_y) - \beta_z(\vec{i}\,x + \vec{j}y)\right]}{c}\int_{-a}^{a}\frac{\mathbf{d}l}{(a + b\zeta + \zeta^2)^{3\backslash 2}}, \quad (6.64)$$

где

$$a = \gamma_x^2 x^2 + \gamma_y^2 y^2 + 2\beta_x\beta_y xy, \quad b = 2(\beta_x\beta_y x + \beta_y\beta_z y), \quad c = \gamma_z^2. \quad (6.65)$$

Так как $\mathbf{d}l = -\,\mathbf{d}\zeta$, а интеграл, согласно [24], легко разрешается, то сила (6.64) будет

$$\vec{F} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{Iq_1\left[\vec{k}(x\beta_x + y\beta_y) - \beta_z(\vec{i}\,x + \vec{j}y)\right](\beta_x\beta_z + y\beta_y\beta_z + \gamma_z^2\zeta)}{c[(1-\beta_y^2)x^2 + 2\beta_x\beta_y xy + (1-\beta_x^2)y^2]R_\upsilon}\Bigg|_{\zeta=z+a}^{\zeta=z-a}, \quad (6.66)$$

где $R_\upsilon = \sqrt{R^2 - [\vec{\beta}\times\vec{R}]^2}$, $\quad R = \vec{i}\,x + \vec{j}y + \vec{k}\zeta$.

После введения вектора тока $\vec{I} = I\vec{k}$ и выполнения обратных векторных преобразований силу воздействия прямого тока на движущуюся заряженную частицу получаем в следующем виде:

$$\vec{F} = \frac{\mu q_1}{c^2 R_\upsilon}\,\frac{(x\beta_x\beta_z + y\beta_y\beta_z + \gamma_z^2\zeta)[\vec{\upsilon}\times[\vec{I}\times\vec{R}]]}{(1-\beta_y^2)x^2 + 2\beta_x\beta_y xy + (1-\beta_x^2)y^2}\Bigg|_{\zeta=z-a}^{\zeta=z+a}. \quad (6.67)$$

Из этого выражения следует, что сила воздействия на частицу отсутствует, когда частица покоится ($\beta = 0$) и когда она движется со скоростью c_1, т.е. $\beta = 1$.

В случае движения частицы q_1 перпендикулярно проводнику ($y = \beta_y = \beta_z = 0$) на нее, согласно (6.66), будет действовать поперечная сила

$$F_z = \frac{\mu I q_1 \upsilon_x(1-\beta_x^2)}{c^2 x}\left(\frac{z+a}{\sqrt{x^2 + (1-\beta_x^2)(z+a)^2}} - \frac{z-a}{\sqrt{x^2 + (1-\beta_x^2)(z-a)^2}}\right). \quad (6.68)$$

При нахождении частицы в средней плоскости ($z = 0$) сила воздействия на нее, согласно (6.68), направлена в ту же сторону, что и ток, т. е. положительно заряженная частица как бы увлекается током.

Если скорость частицы касается окружности, в центре которой и перпендикулярно к ее плоскости расположен ток, то двойное векторное произведение в (6.67) равно нулю, т.е. на вращающуюся вокруг проводника частицу ток не оказывает воздействия.

При движении частицы параллельно проводнику ($y = \beta_y = \beta_x = 0$) сила на нее направлена перпендикулярно к проводнику и имеет вид

$$F_x = -\frac{\mu I q_1 \upsilon_z}{c^2 x}\left(\frac{z+a}{\sqrt{x^2(1-\beta_z^2) + (z+a)^2}} - \frac{z-a}{\sqrt{x^2(1-\beta_z^2) + (z-a)^2}}\right) \quad (6.69)$$

В средней плоскости ($z = 0$) сила (6.69) запишется так:

$$F_x = -\frac{2\mu I q_1 a \upsilon_z}{c^2 x\sqrt{(1-\beta_z^2)x^2 + a^2}}, \quad (6.70)$$

т.е. положительно заряженная частица, движущаяся в направлении тока, притягивается к проводнику. При приближении к скорости c_1 (при $\beta_z \to 1$) сила притяжения растет. Такой эффект наблюдается также при взаимодействии двух частиц, когда относительная скорость частицы $\bar{\upsilon}$ перпендикулярна расстоянию $\vec{R}$ между ними (см. формулу (4.58)).

Если проводник длинный ($a >> x$) и частица движется на расстоянии $x = d$ от него, то выражение для силы, согласно (6.70), будет

$$F_x = -\frac{2\mu I q_1 \upsilon_z}{c^2 d}. \quad (6.71)$$

Это соотношение напоминает выражение для силы воздействия проводника с током I на другой проводник с током I_1, расположенный параллельно первому:

$$F_x = -\frac{2II_1\mu l}{c^2 d}, \quad (6.72)$$

где l – длина проводника с током I_1, на который действует сила F_x. В выражениях (6.71) и (6.72) силы совпадают по направлению, а также по величине, если $q_1\upsilon_z = I_1 l$.

Воздействие проводника с током на частицу отличается от воздействия заряженного проводника. Так, при движении частицы параллельно заряженному проводнику ($y = \beta_y = \beta_x = 0$) на нее, согласно (6.44), проводник воздействует поперечной силой

$$F_x = \frac{Qq_1}{\varepsilon x}\left(\frac{z+a}{\sqrt{x^2(1-\beta_z^2) + (z+a)^2}} - \frac{z-a}{\sqrt{x^2(1-\beta_z^2) + (z-a)^2}}\right) \quad (6.73)$$

и продольной

$$F_z = -\frac{Qq_1}{\varepsilon}\left(\frac{1-\beta_z^2}{\sqrt{x^2(1-\beta_z^2)+(z+a)^2}} - \frac{1-\beta_z^2}{\sqrt{x^2(1-\beta_z^2)+(z-a)^2}}\right). \quad (6.74)$$

В средней плоскости ($z = 0$) или при большей длине проводника ($a \to \infty$) продольная сила исчезает, в то время как для тока она существует (см. (6.68)). Выражение для поперечной силы при $x = d$ и небольших скоростях

$$F_x = \frac{2Qq_1}{\varepsilon x} \quad (6.75)$$

подобно выражению (6.71) для поперечной силы воздействия проводника с током, но имеется существенное отличие: заряженный проводник отталкивает одноименно заряженную частицу.

Наибольшее применение находят соленоидальные магниты, в которых катушка образована многими слоями кольцевого проводника. Исследуем силу воздействия кольцевого проводника с током I на движущуюся частицу. Ввиду математической сложности этой задачи, рассмотрим частный случай, когда частица расположена в центре кольца. Если ось z направить перпендикулярно к плоскости кольца, центр системы координат поместить в центре кольца так, чтобы ток был направлен от оси x к оси y, то интегрирование выражения (6.62) приведет к величине силы воздействия на частицу в виде

$$\vec{F} = \frac{\mu I q_1}{c^2 R}\frac{[\vec{\upsilon}\times\vec{k}]}{\sqrt{1-\beta_z^2}}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-n^2\sin^2\gamma}\,\mathbf{d}\gamma, \quad (6.76)$$

где $\vec{k}$ – орт оси z; R – радиус кольца,

$$n^2 = \frac{\beta_x^2+\beta_y^2}{1-\beta_z^2}.$$

Как видно из выражения (6.76), в центре кольцевого проводника сила направлена перпендикулярно к скорости частицы. Соотношение (6.62) можно переписать следующим образом

$$\vec{F} = 2p\frac{\mu I q_1}{c^2 R}\frac{[\vec{\upsilon}\times\vec{k}]}{\sqrt{1-\beta_z^2}}, \quad (6.77)$$

где p изменяется в пределах от $p = \pi$ при $n^2 = 0$ до $p = 2$ при $n^2 = 1$, т.е. коэффициент p изменяется незначительно во всем интервале изменения β от 0 до 1 (именно так соответствует изменение n изменению β).

Для малых скоростей ($\beta << 1$; $1-\beta_z{}^2 \approx 1$; $p = \pi$) выражение (6.77) дает такой же результат, которым пользуются в физике и технике при определении силы воздействия витка с током на движущуюся частицу. Действительно, так как для кругового витка магнитная напряженность

$$\vec{H} = \frac{2\pi I\vec{k}}{cR}, \quad (6.78)$$

а сила Лоренца

$$\vec{F} = \frac{\mu q_1[\vec{\upsilon}\times\vec{H}]}{c} \quad (6.79)$$

определяет магнитное воздействие на частицу, то исключая $\vec{H}$, получаем силу воздействия кольцевого проводника на частицу

$$\vec{F} = 2\pi\frac{\mu I q_1}{c^2 R}[\vec{\upsilon}\times\vec{k}]. \quad (6.80)$$

Это выражение справедливо при малой скорости частиц. При околосветовых скоростях вместо коэффициента 2π необходимо, согласно (6.77), использовать коэффициент $2p = 4$, а также зависимость от осевой скорости β_z. Для частиц, находящихся не на оси кольцевого тока, необходимо интегрировать (6.76) численными методами.

6.7. УПРОЩЕННЫЕ СИЛЫ БЕЗ УЧЕТА ФОРМЫ ВОЗДЕЙСТВУЮЩИХ ТЕЛ

В настоящее время в электродинамике применяется метод расчета воздействий на движущуюся частицу, который не зависит от формы воздействующего тела. Рассматривают величины $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в точке нахождения частицы и в зависимости от них определяют силу воздействия на частицу. Считают, что электрическое поле $\vec{E}$ и магнитное $\vec{H}$ созданы наэлектризованными и намагниченными телами, а эти поля воздействуют на движущуюся частицу. Поэтому при одних и тех же величинах $\vec{E}$ и $\vec{H}$, обусловленных телами разной формы, воздействие на движущуюся частицу остается одним и тем же.

Исследуем полученные нами соотношения, например при воздействии точечного магнита. Сила, согласно (6.61), запишется

$$\vec{F} = k_\upsilon\frac{\mu q_1(1-\beta^2)}{c}[\vec{\upsilon}\times\vec{H}], \quad (6.81)$$

где

$$k_\upsilon = \frac{R^3}{R_\upsilon^3} = \frac{1}{\{1-[\vec{\beta}\times\vec{R}/R]^2\}^{3/2}}. \quad (6.82)$$

Здесь k_υ определяется направлениями расположения и движения частицы относительно точечного магнита.

В случае воздействия кольцевого проводника с током I сила воздействия на частицу (6.77) с учетом (6.78) будет

$$\vec{F} = k_{\upsilon 1} \frac{\mu q_1}{c\sqrt{1-\beta_z^2}} [\vec{\upsilon} \times \vec{H}], \qquad (6.83)$$

где $k_{\upsilon 1} = P/\pi$ определяется направлениями расположения и движения частицы относительно кольцевого проводника с током. Несмотря на то что в точке нахождения частицы этими телами создаются одинаковые магнитные напряженности $\vec{H}$, силы воздействия их на движущуюся частицу (6.81) и (6.83) различаются.

Аналогичная ситуация наблюдается для воздействия заряженных тел на движущуюся частицу. Например, силу воздействия частицы q_2 на движущуюся относительно нее частицу q_1, согласно (4.55), можно записать в виде

$$\vec{F} = k_\upsilon q_1 (1-\beta^2)\vec{E}, \qquad (6.84)$$

где

$$\vec{E} = \frac{q_2 \vec{R}}{\varepsilon R^3}. \qquad (6.85)$$

Здесь $\vec{E}$ – электрическая напряженность, создаваемая частицей q_2 в месте нахождения частицы q_1. При воздействии на частицу заряженных тел другой формы, например заряженной нити, согласно (6.44), выражение для силы в зависимости от напряженности $\vec{E}$ будет отличаться от (6.84) другим значением геометрического коэффициента k_υ и, возможно, дополнительными сомножителями.

Приведенные примеры (6.81), (6.83), (6.84) показывают, что в случае воздействия тела произвольной формы для точного расчета сил необходимо проводить суммирование воздействий всех его элементов по закону взаимодействия двух точечных тел. При магнитном воздействии сила, согласно (6.81) и (6.82), запишется так:

$$\vec{F} = \mu \frac{q_1(1-\beta^2)}{c} \left[\vec{\upsilon} \times \int_M \frac{R^3}{R_\upsilon^3} \mathbf{d}\vec{H} \right], \qquad (6.86)$$

где M показывает интегрирование по всей величине параметра воздействия M. В случае воздействия заряженного тела q_2 , в соответствии с (6.84) и (6.82), сила

$$\vec{F} = q_1(1-\beta^2) \int_E \frac{R^3 \mathbf{d}\vec{E}}{R_\upsilon^3}. \qquad (6.87)$$

Величина $k_\upsilon = (R/R_\upsilon)^3$, входящая в интегралы, при малой скорости равна единице. Параметр k_υ может существенно отличаться от единицы при большой скорости ($\beta \to 1$), если она перпендикулярна линии соединения взаимодействующих частиц. При интегрировании воздействия от всех элементов тела такая ситуация возникает только для ограниченного числа элементов $\mathbf{d}\vec{E}$ или $\mathbf{d}\vec{H}$. Поэтому на суммарное воздействие тела это не окажет существенного влияния. Следовательно, интегралы в (6.86) и (6.87) можно заменить приближенными выражениями

$$\int_M k_\upsilon \mathbf{d}\vec{H} \approx \vec{H} \quad \text{и} \quad \int_E k_\upsilon \mathbf{d}\vec{E} \approx \vec{E}, \qquad (6.88)$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ - магнитная и электрическая напряженности, создаваемые соответственно магнитом и заряженным телом в точке нахождения движущейся частицы. Тогда приближенные выражения для магнитного и электрического воздействий на движущуюся частицу вне зависимости от формы воздействующих тел в соответствии с (6.86) и (6.87) примут вид

$$\vec{F} \approx \frac{\mu q_1(1-\beta^2)}{c} [\vec{\upsilon} \times \vec{H}], \qquad (6.89)$$

$$\vec{F} \approx q_1(1-\beta^2)\vec{E}. \qquad (6.90)$$

Эти выражения могут давать большие погрешности при $\beta \to 1$, если скорость частицы перпендикулярна большей части точек воздействующего тела. В таком случае должны быть проинтегрированы точные выражения (6.86) и (6.87). Соотношения (6.89) и (6.90) отличаются от применяемых в электродинамике наличием сомножителя $(1 - \beta^2)$. При скорости частицы, приближающейся к скорости света ($\beta \to 1$), полученные выражения показывают, что сила воздействия на частицу стремится к нулю.

Выведенные нами выражения для сил воздействия на движущееся заряженное тело основываются на результатах двух групп измерений. Первые измерения относятся к определению силы между наэлектризованными неподвижными телами. Их обобщением является закон Кулона (3.1) для электрических зарядов.

Вторая группа измерений относится к определению взаимодействия между проводником с током и магнитом. При выражении их результатов в виде силы воздействия проводника на магнит вытекает соотношение Био – Савара – Лапласа (3.3). Опыты по вращению заряженного диска (опыты Эйхенвальда и других) используются для обоснования того, что движущееся заряженное тело по воздействию на магнит эквивалентно проводнику с током. Учитывая это в выражении (3.3), приходим к силе воздействия движущегося заряженного тела на магнит, описываемой вторым уравнением Максвелла (3.22). Если выразить результаты второй группы измерений через силу воздействия магнита на ток, а ток – через движение заряженного тела, то получим соотношение для воздействия магнита на движущееся относительно него заряженное тело в виде 1-го уравнения Максвелла (3.24) и в виде закона

индукции Фарадея (3.5). Необходимо отметить, что первоначально уравнение (3.5) было рассчитано путем измерения ЭДС, наводимой в замкнутом контуре при движении магнита.

Таким образом, выражения для силы воздействия на движущуюся частицу выведены из опытных фактов. Причем от результатов измерения до конечного выражения проходит длинный путь преобразования одних соотношений в другие, перехода от одних величин к другим. Не исключено, что в ходе промежуточных действий были сделаны какие-либо произвольные допущения. В связи с этим абсолютно верными мы могли бы назвать такие зависимости для сил воздействия на движущуюся частицу, которые были бы установлены на основании прямых измерений сил воздействия магнита и заряженного тела на частицу или измерения ее ускорения.

ГЛАВА 7

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СИЛ ДЛЯ РАСЧЕТА РАЗНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

7.1. ЭНЕРГИЯ ЗАВИСЯЩЕГО ОТ СКОРОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Характерной особенностью сил воздействия заряженных и магниченных тел на движущуюся частицу является зависимость их от скорости частицы. Рассчитанные скорости движения частицы, как видно из соотношений (4.80), (6.41), (6.42), (6.53), могут быть записаны так:

$$\upsilon^2 = c_1^2 - (c_1^2 - \upsilon_0^2)\exp\frac{2q_1q_2}{\varepsilon m_{re}c_1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_0^2}}\right), \qquad (7.1)$$

где m_{re} и r имеют определенный вид для конкретного воздействующего тела. Например, в случае воздействия точечного тела с зарядом q_2 и массой m_2

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{c_1^2}}, \qquad m_{re} = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (7.2)$$

Кинетическая энергия движущейся частицы в точке r_0 равна $E_{c0} = m_1\upsilon_0^2/2$, а в точке r $E_c = m_1\upsilon^2/2$. Согласно (2.24), работа A силы воздействия по приращению кинетической энергии частицы равна убыли потенциальной энергии U в точке r по отношению к точке r_0:

$$A = \Delta E_c = E_c - E_{co} = -U = -\frac{m_1c_1^2}{2}(1-\beta_0^2)\left[\exp\frac{2q_1q_2}{\varepsilon m_{re}c_1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_0^2}}\right) - 1\right]. \qquad (7.3)$$

Отсюда следует, что потенциальная энергия частицы зависит от ее начальной скорости. Таким образом, каждая точка в окрестности воздействующего тела r_0 не обладает способностью сообщить помещенному туда телу одну и ту же энергию, как это принято рассматривать в физике. При движении из этой точки частице будет сообщаться разная энергия в зависимости от скорости β_0 приходящей в точку r_0 частицы. Кроме того, необычна зависимость энергии от массы и величины заряда. Полная энергия частицы, согласно (7.1) и (7.3), будет

$$E_f = E_c + U = \frac{m\upsilon_0^2}{2} = \text{const}, \qquad (7.4)$$

т.е. полная энергия частицы по отношению к точке r_0 равна кинетической энергии в этой точке и остается неизменной во время движения частицы.

Для сил, зависящих только от расстояния между взаимодействующими телами, потенциальная энергия в соответствии с выражением (4.83) при h = 0, запишется так:

$$U = -A = -\Delta E_c = \frac{m_1q_1q_2}{\varepsilon m_{re}}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right), \qquad (7.5)$$

т.е. потенциальная энергия характеризуется только положением частицы. В силу отличий потенциальной энергии (7.3) движущегося заряженного тела от потенциальной энергии тела (7.5), на которое оказывается воздействие кулоновской силой, энергетические методы механики для расчета взаимодействий заряженных тел необходимо проводить с осторожностью. Упущение этих особенностей в теории относительности и некоторых других разделах современной физики привело к появлению противоречивых выводов, в том числе и таких представлений, как бесконечные массы и энергии, мнимые энергии и массы и т.п.

В современной физике энергетический метод рассмотрения взаимодействий практически полностью вытеснил силовой. В немалой степени этому способствовало представление об энергии вещества. В теории относительности используется выражение для энергии объекта с массой m и скоростью υ

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

откуда при β = 0 следует энергия покоящегося объекта

$$E_0 = mc^2. \qquad (7.6)$$

Это выражение не имеет физического объяснения. Покажем, что оно вытекает из основных положений классической механики.

Считают, что зависимость (7.6) экспериментально подтверждается при исследовании ядерных превращений и процессов аннигиляции. Предполагается, что столкновение электрона и позитрона, протона и антипротона приводит к излучению фотонов со скоростью c. Если бы существовало антивещество, то соприкосновение его с веществом привело бы к столкновению частиц и античастиц и, следовательно, к превращению двух таких объектов в поток фотонов, движущихся со скоростью c. Поэтому внутреннюю энергию $E_0 = mc^2$ объекта можно понимать как его способность излучать свое вещество со скоростью света.

Пусть объект с начальной массой m_0 может выбрасывать свое вещество с постоянной по величине и направлению скоростью u относительно остающейся части с массой m. Если расход выбрасываемой массы $\mathbf{d}m/\mathbf{d}t$, то на остающуюся часть m вытекающая струя воздействует реактивной силой

$$R=u\frac{\mathbf{d}m}{\mathbf{d}t}. \qquad (7.7)$$

Тогда уравнение движения остающейся части объекта m, согласно второму закону Ньютона (2.4), запишется

$$m\frac{\mathbf{d}\upsilon}{\mathbf{d}t} = R. \qquad (7.8)$$

После подстановки реактивной силы R следует дифференциальное уравнение:

$$m\mathbf{d}\upsilon = u\mathbf{d}m, \qquad (7.9)$$

известное как уравнение Мещерского. Решая (7.9) при начальных условиях $m = m_0$ при $\upsilon = 0$, получим формулу Циолковского

$$\upsilon = u\ln\frac{m_0}{m}, \qquad (7.10)$$

которая определяет скорость неразложившейся части объекта.

Теперь рассмотрим, какой энергией обладает объект m_0, если он полностью распадется со скоростью u. В процессе распада на каждый элемент будет действовать сила R, которая совершает работу

$$\mathbf{d}A=R\mathbf{d}s.$$

Энергия объекта будет равна работе по всему пути распада:

$$E_0 = A = \int R\mathbf{d}s = \int R\upsilon\mathbf{d}t.$$

После подстановки реактивной силы R (7.7) получаем

$$E_0 = u\int_0^{m_0}\upsilon\mathbf{d}m.$$

Теперь с учетом (7.10) можем записать

$$E_0 = u^2\int_0^{m_0} ln\frac{m_0}{m}\mathbf{d}m = m_0u^2.$$

Если распад совершается со скоростью света $u = c$, то энергия

$$E_0 = m_0c^2. \qquad (7.11)$$

7.2. НОВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

Выражение для скорости (7.1) с учетом (7.2) можно переписать в виде

$$(c_1^2-\upsilon_0^2)\exp\left(\frac{-2q_1q_2}{\varepsilon m_{re}c_1^2\sqrt{R_0^2-(h/c_1)^2}}\right) = (c_1^2-\upsilon^2)\exp\left(\frac{-2q_1q_2}{\varepsilon m_{re}c_1^2\sqrt{R^2-(h/c_1)^2}}\right). \qquad (7.12)$$

В левой и правой частях равенства выражения одинаковы, но относятся к разным точкам траектории тела, т.е. численная величина этого выражения одинакова для всех точек траектории и сохраняется во время движения тела, т.е. параметр движения

$$S = (c_1^2-\upsilon^2)\exp\left(-\frac{2\mu_1}{c_1^2\sqrt{R^2-(h/c_1)^2}}\right) = \text{const}. \qquad (7.13)$$

Для кулоновских сил , согласно (4.83), можно также записать тождество

$$\upsilon_r^2+\frac{2\mu_1}{R}+\frac{h^2}{R^2} = \upsilon_{r0}^2+\frac{2\mu_1}{R_0}+\frac{h^2}{R_0^2},$$

которое после введения полной скорости $\upsilon^2 = \upsilon^2_r + \upsilon^2_t$ принимает следующую форму:

$$\upsilon_r^2+\frac{2\mu_1}{R} = \upsilon_0^2+\frac{2\mu_1}{R_0}. \qquad (7.14)$$

Так как в правой и левой частях (7.14) выражения одинаковы, но относятся к разным точкам траектории тела, то аналогично (7.13) можно ввести параметр движения для кулоновских сил

$$S_k = \upsilon^2+\frac{2\mu_1}{R} = \text{const}. \qquad (7.15)$$

Рассмотрим связь интегрального параметра S_k с традиционными параметрами движения. Согласно (7.5), потенциальная энергия частицы m_1 по отношению к бесконечно удаленной точке ($R_0 \to \infty$) будет

$$U_\infty = \frac{m_1\mu_1}{R}. \qquad (7.16)$$

Тогда полная энергия частицы запишется

$$E_{f\infty} = E_c + U_\infty = \frac{m_1\upsilon^2}{2}+\frac{m_1\mu_1}{R} = \frac{S_km_1}{2}.$$

Отсюда получаем

$$S_k = \frac{2E_{f\infty}}{m_1}, \qquad (7.17)$$

т.е. интеграл движения частицы S_k является удвоенной удельной энергией частицы по отношению к бесконечно удаленной точке. Эта величина, как и полная энергия частицы остается неизменной во время движения. В случае сил воздействия, зависящих от скорости согласно (4.58), параметр движения S, определяемый соотношением (7.8), не может быть выражен через энергию в виде (7.17). Тем не менее по физическому смыслу для него можно проводить аналогию с параметром S_k.

В ряде случаев воздействие на заряженное тело можно описать с помощью силы, не зависящей от его скорости в рассматриваемой точке [54]. С этой целью исследуем воздействие точечного тела. Создаваемое им ускорение заряженной частицы описывается выражением (4.61). В результате его решения была определена радиальная скорость частицы (4.80) и трансверсальная $\upsilon_t = h/R$ в зависимости от ее расстояния до воздействующего тела и скорости в начальной точке. Продифференцируем (4.80) по времени и, учитывая, что $\mathbf{d}R/\mathbf{d}t = \upsilon_r$, получим

$$\frac{\mathbf{d}\upsilon_r}{\mathbf{d}t} = \frac{\mathbf{d}^2R}{\mathbf{d}t^2} = \frac{h^2}{R^3} + \frac{\mu_1 R(1-\beta_0^2)}{(R^2-(h/c_1)^2)^{3/2}} \exp\frac{2\mu_1}{c_1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2-(h/c_1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_0^2-(h/c_1)^2}}\right).$$

Тогда радиальное ускорение в полярной системе координат запишется

$$\vec{w}_r = \frac{\vec{R}}{R}\left(\frac{\mathbf{d}^2R}{\mathbf{d}t^2} - R\omega^2\right) = \frac{\mu_1(1-\beta_0^2)\vec{R}}{(R^2-(h^2/c_1^2))^{3/2}} \exp\frac{2\mu_1}{c_1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2-(h/c_1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_0{}^2-(h/c_1)^2}}\right), \qquad (7.18)$$

а трансверсальное в связи с тем, что $\omega R^2 = h$, будет

$$w_t = \frac{1}{R}\frac{\mathbf{d}(\omega R^2)}{\mathbf{d}t} = 0.$$

Следовательно, полное ускорение частицы направлено по радиусу, выходящему из притягивающего центра, и равно $\vec{w} = \vec{w}_r$. Умножая (7.18) на массу частицы m_1, получим новое выражение для силы в виде

$$\vec{F} = \frac{\mu_1 m_1(1-\beta_0^2)\vec{R}}{(R^2-(h^2/c_1^2))^{3/2}} \exp\frac{2\mu_1}{c_1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2-(h^2/c_1^2)}} - \frac{1}{\sqrt{R_0{}^2-(h^2/c_1^2)}}\right). \qquad (7.19)$$

Соотношение (7.19) представляет собой силу воздействия точечного тела с зарядом q_2 на другое точечное тело с зарядом q_1 и массой m_1, которое движется относительно первого и на каком-то начальном расстоянии R_0 от него

имеет полную скорость $\upsilon_0 = \beta_0 c_1$ и перпендикулярную к R_0 трансверсальную скорость, равную $\upsilon_t = h/R_0$.

В выражение (7.19) входит лишь начальная скорость движения частицы, которая является постоянной. Поэтому данное выражение можно считать зависящим лишь от расстояния. Как и всяким силам, зависящим от расстояния, силе (7.19) должна соответствовать потенциальная энергия в соотношении

$$\vec{F} = -\text{grad}\, U. \qquad (7.20)$$

И действительно, операция (-grad) от выражения (7.3) для потенциальной энергии частицы приводит к соотношению (7.19) для силы.

Сила в виде (7.19) облегчает задачу расчета движений тем, что решение сложных дифференциальных уравнений заменяется интегрированием. Однако в выражение (7.19) входит кинематический момент движущейся частицы $h = \upsilon_t R$ =const, который имеет отношение только к взаимодействию двух точечных тел. При воздействии других объектов необходимо рассматривать h к каждому элементу такого объекта. Так как при угле φ между υ и R трансверсальная скорость $\upsilon_t = \upsilon \cdot \sin(\varphi) = \upsilon\left|[\vec{v}\times\vec{R}]\right|/\upsilon R$, то

$$R^2 - (h^2/c_1^2) = R^2 - [\vec{\beta}\times\vec{R}]^2. \qquad (7.21)$$

С учетом (7.21) выражение для силы (7.19) становится более универсальным:

$$\vec{F} = \frac{\mu_1 m_1(1-\beta_0^2)\vec{R}}{\left\{R^2-[\vec{\beta}\times\vec{R}]^2\right\}^{3/2}} \exp\frac{2\mu_1}{c_1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2-[\vec{\beta}\times\vec{R}]^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_0{}^2-[\vec{\beta}\times\vec{R}_0]^2}}\right), \qquad (7.22)$$

однако оно зависит от скорости движения частицы.

7.3. МЕТОД СУММИРОВАНИЯ СКОРОСТЕЙ

Рассмотрим метод расчета скорости движения частицы, при котором не будет использоваться сила. Он позволяет при известном выражении для скорости, которую одно точечное тело в результате воздействия сообщает другому, определить скорость тела, сообщаемую ему любым устройством с аналогичным характером воздействия. Этот метод продемонстрируем на примере взаимодействия двух заряженных тел. Согласно выражениям (4.14) и (7.2), центральное тело сообщает другому точечному телу с массой m_1 и электрическим зарядом q_1 скорость, которая описывается выражением

$$\upsilon^2 = c_1^2 - (c_1^2 - \upsilon_0^2)\exp\frac{2\mu_1}{c_1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2-(h^2/c_1^2)}} - \frac{1}{\sqrt{R_0{}^2-(h^2/c_1^2)}}\right). \qquad (7.23)$$

Если обозначить

$$\lambda = \frac{2\mu_1}{c_1^2}\frac{1}{\sqrt{R^2 - (h^2/c_1^2)}}, \qquad (7.24)$$

то величина скорости будет выражаться соотношением

$$v^2 = c_1^2 - (c_1^2 - v_0^2)\exp(\lambda - \lambda_0). \qquad (7.25)$$

Чтобы величина λ не зависела от кинематического момента *h*, используем замену (7.21)

$$\lambda = \frac{2\mu_1}{c_1^2}\frac{1}{\sqrt{R^2 - [\vec{\beta}\times\vec{R}]^2}}. \qquad (7.26)$$

Выражение (7.25) определяет скорость движения частицы в зависимости от разности значений функции λ в конечной и начальной точках траектории. По-видимому, если рассчитать величины λ, создаваемые произвольным телом, то с помощью (7.25) можно найти, какую скорость оно сообщит частице при перемещении из одной точки в другую.

В качестве примера рассчитаем скорость заряженной частицы, на которую воздействует прямоугольная заряженная пластина. Величину λ, согласно выражению (7.26), для элементарного участка пластинки с зарядом $\mathbf{d}q_2$ можно записать так:

$$\mathbf{d}\lambda = \frac{2q_1}{\varepsilon c_1^2 m_1}\frac{\mathbf{d}q_2}{\sqrt{R^2 - [\vec{\beta}\times\vec{R}]^2}}, \qquad (7.27)$$

где R – расстояние от элемента с зарядом $\mathbf{d}q_2$ до частицы с зарядом q_1, скорость которой мы вычисляем. Здесь рассматривается движение частицы с массой m_1 относительно пластины массой m_2 , поэтому $m_1 << m_2$. Выбираем оси координат таким же образом, как при вычислении выражений (6.28)-(6.30) для сил (см. рис. 6.1): начало координат в центре пластины, ось *x* перпендикулярна ей, а остальные параметры обозначим:

$\eta = y - y_s$; $\zeta = z - z_s$; y_s , z_s – координаты элемента пластины $\mathbf{d}q_2$; *x*, *y*, *z* – координаты частицы q_1 ; $\vec{R} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,\eta + \vec{k}\,\zeta$.

Заряд элемента пластины $\mathbf{d}q_2 = \sigma\,\mathbf{d}\eta\mathbf{d}\zeta$, где $(-\mathbf{d}\eta)$ и $(-\mathbf{d}\zeta)$ – элементы площади в направлении осей *y* и *z* соответственно; $\sigma = q_2/4ab$ – поверхностная плотность заряда пластины. Тогда величина λ, создаваемая всей пластиной, будет равна

$$\lambda = \frac{2q_1\sigma}{\varepsilon c_1^2 m_1}\int_{\eta=y+b}^{\eta=y-b}\int_{\zeta=z-a}^{\zeta=z+a}\frac{\mathbf{d}\eta\mathbf{d}\zeta}{\sqrt{R^2 - [\vec{\beta}\times\vec{R}]^2}}. \qquad (7.28)$$

После раскрытия знаменателя интегральный сомножитель в (7.28) примет вид

$$I = \int_{z+a}^{z-a}\mathbf{d}\zeta\int_{y+a}^{y-a}\frac{\mathbf{d}\eta}{\sqrt{\gamma_x^2 x^2 + \gamma_z^2\zeta^2 + 2\beta_x\beta_z\zeta + 2\beta_y(\beta_x x + \beta_z\zeta)\eta + \gamma_y^2\eta^2}}.$$

Интеграл по η является табличным интегралом. После преобразований и подстановки в (7.28) имеем

$$\lambda = \frac{2q_1\sigma}{\varepsilon c_1^2 m_1\gamma_y\gamma_z}\int ln\left[A + BZ + \sqrt{C + Z^2}\right]\mathbf{d}Z\Bigg|_{\eta=y+a}^{\eta=y-a}, \qquad (7.29)$$

где

$$Z = \left[\zeta + \frac{\beta_z}{\gamma_z^2}(\beta_x x + \beta_y\eta)\right]\gamma_z,$$

$$C = \gamma_x^2 x^2 + \gamma_y^2\eta^2 + 2\beta_x\beta_y x\eta - \left[\frac{\beta_z}{\gamma_z}(\beta_x x + \beta_y\eta)\right]^2,$$

$$A = \gamma_y\left[\eta + \frac{\beta_x\beta_y}{\gamma_y^2}x - \frac{\beta_y\beta_z^2(\beta_x x + \beta_y\eta)}{\gamma_y^2\gamma_z^2}\right],$$

$$B = \frac{\beta_y\beta_z}{\gamma_y\gamma_z}.$$

Интеграл по *z*, входящий в (7.29), после интегрирования по частям сводится к интегралу (6.19). После выполнения преобразований решение его запишется в виде

$$\int ln\left[A + BZ + \sqrt{C + Z^2}\right]\mathbf{d}Z = -Z - \frac{A}{B^2 - 1}ln\left[Z + \sqrt{C + Z^2}\right]$$
$$+ Z ln\left[A + BZ + \sqrt{C + Z^2}\right] - \frac{BA}{1 - B^2}ln\left[A + BZ + \sqrt{C + Z^2}\right] + \qquad (7.30)$$
$$+ \frac{\sqrt{C(1 - B^2) - A^2}}{1 - B^2}\left\{\text{arctg}\frac{CB - AZ}{\sqrt{C(1 - B^2) - A^2}\sqrt{C + Z^2}} - \text{arctg}\frac{AB + (B^2 - 1)Z}{\sqrt{C(1 - B^2) - A^2}}\right\}.$$

После подстановки значения интеграла (7.30) в (7.29) и замены переменных получаем следующее выражение для λ:

$$\lambda = \frac{2q_1\sigma}{\varepsilon c_1^2 m_1(1 - \beta_x^2)}\left[\frac{x\beta_x\beta_y + \eta(1 - \beta_x^2)}{\gamma_z}\ln\left(\gamma_z R_v + x\beta_x\beta_z + \eta\beta_y\beta_z + \zeta\gamma_z^2\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{x\beta_x\beta_z + \zeta(1 - \beta_x^2)}{\gamma_y}\ln\left(\gamma_y R_v + x\beta_x\beta_y + \eta\gamma_y^2 + \zeta\beta_y\beta_z\right) + \right. \qquad (7.31)$$

$$+ x\,\mathrm{arctg}\frac{x^2\beta_y\beta_z - x\eta\beta_x\beta_z - \zeta\eta(1-\beta_x^2) - x\beta_x\beta_y}{xR_\upsilon}\Bigg]\Bigg|_{\eta=y-b}^{\eta=y+b}\Bigg|_{\zeta=z-a}^{\zeta=z+a},$$

где $R_\upsilon = \sqrt{R^2 - [\vec{\beta}\times\vec{R}]^2}$.

Выражениями (7.25) и (7.31) определяется скорость заряженной частицы, на которую оказывает воздействие заряженная пластина. При этом λ_0 рассчитывается по (7.31) в начальной точке x_0, y_0, z_0 и при начальной скорости υ_{x0}, υ_{y0}, υ_{z0}. Однако здесь имеется ряд трудностей. Во-первых, выражением (7.25) определяется только модуль скорости в точке x, y, z, а направление скорости неизвестно. Во-вторых, соотношением (7.25) скорость выражается не в явном виде, поскольку входящая в правую часть величина λ сама зависит от скорости в точке x, y, z, как это видно из (7.31). Кроме того, требуется знание компонент скорости, которые неизвестны. Итак, в общем случае этим методом скорость частицы не определяется.

Рассмотрим частный случай движения частицы перпендикулярно пластине вдоль оси x: $y = z = \beta_y = \beta_z = 0$ и $\beta = \beta_x$. При таких условиях параметр λ, согласно (7.31), после подстановки пределов по η и ζ примет вид

$$\lambda = -\frac{8q_1\sigma}{\varepsilon c_1^2 m_1(1-\beta^2)}\left[x\,\mathrm{arctg}\frac{ab(1-\beta^2)}{xR_\upsilon} + \right.$$
$$\left. + \frac{b\sqrt{1-\beta^2}}{2}\ln\frac{R_\nu - a\sqrt{1-\beta^2}}{R_\nu + a\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{a\sqrt{1-\beta^2}}{2}\ln\frac{R_\nu - b\sqrt{1-\beta^2}}{R_\nu + b\sqrt{1-\beta^2}}\right], \qquad (7.32)$$

где $R_\nu = \sqrt{x^2 + (1-\beta^2)(a^2+b^2)}$.

При малой скорости движения или при $c_1 \to \infty$, как нетрудно убедиться, соотношения для скорости (7.25) и (7.32) дают выражение (6.36), которое получено в результате решения дифференциального уравнения движения частицы (6.34) при воздействии на нее пластины при малой скорости движения частицы. При больших скоростях $\beta \to 1$ предел выражения (7.32) дает $\lambda = \frac{2q_1q_2}{\varepsilon c_1^2 m_1\sqrt{x^2}}$. Тогда соотношение (7.25) превращается в (6.41), которое является решением уравнения движения (6.34) при $\beta \to 1$. Таким образом, соотношения (7.25) и (7.32) – решения уравнения (6.34) в двух предельных случаях. Отсюда можно предполагать, что они будут решениями (6.34) и при других значениях β. Рассмотренным методом решение получено не в явном виде: искомая величина – скорость υ – входит в левую и правую части соотношения (7.25). Тем не менее другим методом решить уравнение (6.34) не представляется возможным.

Рассмотрим теперь некоторые новые результаты. Пусть частица движется из бесконечности ($x_0 \to \infty$) к пластине ($x \to 0$). Тогда из соотношения (7.32) при $x = x_0$ следует, что $\lim\limits_{x_0\to\infty}\lambda_0 = 0$. Предельный переход при $x \to 0$ для λ необходимо рассматривать при условии, что $x < (1\text{-}\beta^2)(a^2+b^2)$, т.е. он, возможно, будет несправедлив при $\beta \to 1$. Тогда из (7.32) получаем

$$\lim_{x\to 0}\lambda = -\frac{q_1q_2}{\varepsilon c_1^2 m_1 ab\sqrt{1-\beta^2}}\left[b\ln\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{\sqrt{a^2+b^2}+a} + a\ln\frac{\sqrt{a^2+b^2}-b}{\sqrt{a^2+b^2}+b}\right]. \qquad (7.33)$$

Для квадратной пластины ($a = b$) с учетом (7.33) выражение для скорости частицы, согласно (7.31), запишется

$$\upsilon^2 = c_1^2 - (c_1^2 - \upsilon_0^2)\exp\frac{2q_1q_2\ln(3+2\sqrt{2})}{\varepsilon m_1 c_1^2 a\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (7.34)$$

При притяжении $q_1q_2 < 0$, поэтому при $\beta \to 1$ второе слагаемое стремится к нулю, т.е $\upsilon^2 \to c_1^2$. Введем обозначение для параметра взаимодействия

$$B_1 = -\frac{2q_1q_2\ln(3+2\sqrt{2})}{\varepsilon c_1^2 m_1 a}. \qquad (7.35)$$

Тогда приведенная скорость частицы, движущейся к пластине из бесконечности, в соответствии с (7.34) может быть записана в виде

$$\beta^2 = 1 - (1-\beta_0^2)\exp\left(-\frac{B_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right). \qquad (7.36)$$

В этих обозначениях для кулоновского взаимодействия, как вытекает из (6.36) при $x_0 \to \infty$ и $x \to 0$, скорость частицы у пластины будет

$$\beta^2 = \beta_0^2 + B_1, \qquad (7.37)$$

т.е. отсюда следует еще один физический смысл: B_1 – это квадрат приращения приведенной скорости частицы при кулоновском взаимодействии. Из (7.37) видно, что при $\beta_0 = 0$ величина $\beta = \sqrt{B_1}$. Значит при $B_1 = 1$ частица, движущаяся из бесконечности с начальной нулевой скоростью, при приближении к пластине приобретет световую скорость.

Кроме неявного выражения (7.36) для воздействия заряженной пластины на частицу было получено асимптотическое решение (6.39) при $\beta \to 1$. Выражение (6.39) имеет особенность при $x = 0$ и дает световую скорость частицы при касании ее с пластиной при любом заряде q_2 пластины. Это связано с

особенностями предельного перехода слагаемого $x^2/(1-\beta^2)$ при одновременном стремлении $x \to 1$ и $\beta \to 1$. Чтобы сопоставить результаты уравнения (7.36) с результатами (6.39), рассмотрим в последнем случае движение частицы из бесконечности до расстояния

$$x_a = \frac{a}{\ln(3+2\sqrt{2})} = 0{,}567a\,. \qquad (7.38)$$

Тогда, согласно (6.39), с учетом (7.35) по достижении расстояния x_a приведенная скорость частицы запишется в виде

$$\beta_{xa}^2 = 1-\left(1-\beta_0^2\right)\exp\left(-B_1\right). \qquad (7.39)$$

На рис. 7.1,*а* представлены результаты решения уравнения (7.36) при разных значениях приведенной скорости. Видно, что с увеличением начальной скорости β_0 одна и та же величина параметра взаимодействия B_1 приводит к уменьшающимся приращениям скорости. При $\beta_0 = 1$ график представлен горизонтальной прямой, т.е. скорость частицы не увеличивается.

Все кривые на рис. 7.1,*а* не доведены до значения $\beta = 1$. В области от некоторого значения β до $\beta = 1$ решения уравнения (7.36) имеют особенности: может быть несколько решений или их вовсе может не быть. Однако все кривые имеют общее решение $\beta = 1$ при $B_1 = 1$. То есть при этом значении параметра взаимодействия частицы, достигнувшие пластины, будут иметь световую скорость.

На рис. 7.1,*б* показаны скорости частицы, приблизившейся из бесконечности к пластине на расстояние x_a. Скорости рассчитаны по формуле (7.39) в зависимости от параметра взаимодействия B_1 при разных β_0. По сравнению с рис. 7.1,*а* здесь приращения скорости меньше при тех же величинах B_1, а световая скорость достигается при $B_1 \to \infty$. Следует отметить, что скорости в точке x_a могут быть вычислены также первым методом, но для этого необходимо воспользоваться более сложным выражением (7.32) для λ.

Мы рассчитали скорость частицы при воздействии одной пластины. Складывая величины λ, можно найти скорость и при воздействии любого числа пластин. Так, в случае двух пластин, расположенных на расстоянии $2d$ друг от друга (см. рис. 6.2), выражение для скорости частицы будет

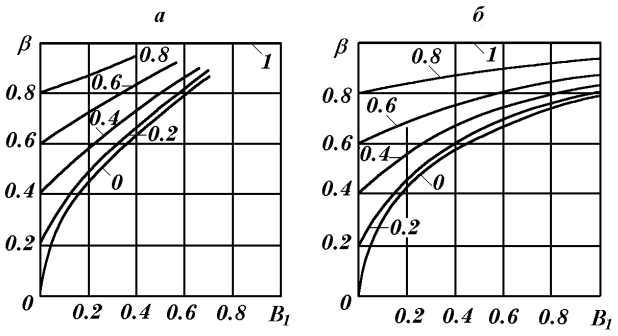


Рис. 7.1. Приведенные скорости частицы, движущейся из бесконечности с разными начальными скоростями β_0 (даны на графиках) и находящейся под воздействием заряженной пластины. *а* – результаты решения уравнения (7.36) при касании пластины; *б* – асимптотическое решение (7.39) при приближении к пластине на расстояние $x_0 = 0.567a$.

$$v^2 = c_1^2 - (c_1^2 - v_0^2)\exp\left[\lambda(x+d) - \lambda(x-d) - \lambda_0(x_0+d) + \lambda_0(x_0-d)\right]. \qquad (7.40)$$

Здесь центр координат расположен в центре конденсатора, ось x – перпендикулярно пластинам, а величина λ определяется из выражения (7.31) или (7.32) подстановкой $x \pm d$ и $x_0 \pm d$ вместо x и x_0, соответственно.

Рассмотрим частный случай движения частицы в таком плоском прямоугольном конденсаторе, когда частица движется вдоль оси от одной пластины ($x_0 = -d$) с зарядом q_2 к другой ($x = d$) с зарядом ($-q_2$). Тогда с учетом (7.32) выражение (7.40) принимает вид

$$v^2 = c_1^2 - (c_1^2 - v_0^2)\exp\left[\lambda(2d) - \lambda(0)\right], \qquad (7.41)$$

где $\lambda(2d)$ определяется из (7.32) при $x = 2d$, а $\lambda(0)$ – при x=0.

Так как расстояние между пластинами конденсатора $2d$ значительно меньше его размеров, то выражение (7.41), совместно с (7.32), упростится при устремлении $2d/\sqrt{(1-\beta^2)(a^2+b^2)} \to 0$ и примет вид

$$v^2 = c_1^2 - (c_1^2 - v_0^2)\exp\left[-\frac{2q_1u}{c_1^2 m_1(1-\beta^2)}\right]. \qquad (7.42)$$

где $u = 4\pi(2d)\sigma/\varepsilon$ – разность потенциалов между пластинами конденсатора. При $u \to \infty$ из (7.42) следует $v \to c_1$. То есть даже при очень большом напряжении на пластинах конденсатора скорость ускоренных частиц не превзойдет световую скорость. При малых скоростях, т.е. при $c_1 \to \infty$ ` из (7.42) вытекает известное в физике соотношение

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_0^2}{2} + q_1 u\,, \qquad (7.43)$$

Из (7.43) следует, что первоначальная кинетическая энергия ($E = m_1 v_0^2/2$) частицы q_1 после прохождения ею ускоряющего потенциала u возрастает на величину $q_1 u$. На основании (7.43) в физике введена единица энергии частиц – электрон-вольт. Она равна энергии частицы с зарядом электрона, равным e, которую она приобретет при прохождении разности потенциалов u = 1В. Так, при $u = 10^6$В эту энергию называют 1 МэВ, при $u = 10^9$В = 1 ГэВ.

Но в действительности, как видно из (7.43), при ускорении заряженная частица приобретает энергию $e{\cdot}u$ только при малой скорости частицы. С увеличением скорости приобретаемая энергия в конденсаторе уменьшается. В результате ускорения такой частицы, как электрон, его энергия не превысит $m_e c^2/2$=0.256 МэВ ($m_e = 9.108{\cdot}10^{-31}$кг, $c = 3{\cdot}10^8$м/сек, 1эВ = $1.602{\cdot}10^{-19}$Дж)

при напряжении на пластинах $u \to \infty$. Поэтому приписываемые частице энергии в 1 МэВ, в 1 ГэВ и т.д. являются фиктивными.

Запишем выражение для λ в случае воздействия заряженного отрезка, направленного вдоль оси z (см. рис. 6.3). Путем предельного перехода $b \to 0$ из выражения (7.31) получаем

$$\lambda = -\frac{2q_1 Q}{\varepsilon c_1^2 m_1 \gamma_z} \ln\left(\gamma_z R_V + x\beta_x\beta_z + y\beta_y\beta_z + \zeta\gamma_z^2\right)\Bigg|_{\zeta=z+a}^{\zeta=z-a} \qquad (7.44)$$

Для выражения (7.44) справедливы все выводы, которые были приведены для выражения (7.31).

7.4 РАСЧЕТ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ В УСКОРИТЕЛЯХ

В большинстве современных ускорителей ускорение заряженных частиц осуществляется воздействием на них заряженных тел. При этом устройство создается таким, чтобы ускоряющая сила была направлена вдоль скорости частицы. В случае воздействия точечного объекта с массой $m_2 >> m_1$ ускорение в соответствии с выражением (4.58) и законом Ньютона (2.4) будет

$$w = \frac{q_1 q_2 (1-\beta^2)}{\varepsilon m_1 x^2} c\,, \qquad (7.45)$$

где x – расстояние от объекта до частицы. Решая дифференциальное уравнение (7.45), получим выражение для скорости частицы

$$\upsilon^2 = c_1^2 - (c_1^2 - \upsilon_0^2)\exp\frac{2q_1}{m_1 c_1^2}\left(\frac{q_2}{\varepsilon x} - \frac{q_2}{\varepsilon x_0}\right) \qquad (7.46)$$

в зависимости от расстояния от объекта, если на начальном расстоянии x_0 частица имела скорость υ_0. Входящая в это выражение величина $q_2/\varepsilon x = V$ представляет электрический потенциал конечной точки, а $q_2/\varepsilon x_0 = V_0$ – потенциал начальной. Тогда разность потенциалов этих двух точек можно записать

$$U = V - V_0 = \frac{q_2}{\varepsilon x} - \frac{q_2}{\varepsilon x_0}\,.$$

И выражение для скорости примет вид

$$\upsilon^2 = c_1^2 - (c_1^2 - \upsilon_0^2)\exp\frac{2q_1 U}{m_1 c_1^2}\,. \qquad (7.47)$$

В это выражение входит лишь разность потенциалов воздействующего объекта, которую проходит частица. В случае не точечных воздействующих объектов с помощью выражения (7.47) можно также определить приобретенную скорость частицы по разности потенциалов U, которую она пройдет. Как показывают расчеты, вычисленная так скорость незначительно отличается от той, которую получили бы определением силы от этого объекта. Следовательно, выражение (7.47) с достаточной точностью можно применять для расчета воздействия на частицу любых объектов.

Рассмотрим некоторые особенности выражения (7.47). В случае притяжения q_1 величина $U < 0$. При $U \to \infty$ скорость частицы $\upsilon \to c_1$, т.е. какую бы большую разность потенциалов U частица не прошла, скорость ее все равно не будет больше c_1. Энергией частицы после ускорения является ее кинетическая энергия $E = E_c = m\,\upsilon^2/2$. Если определить энергию частицы как произведение ее заряда q на пройденную разность потенциалов U, т.е. $E_{rel} = qU$, то эта величина не соответствует действительной энергии частицы. Например, при бесконечно большой разности потенциалов ($U \to \infty$), энергия частицы, согласно (7.47), не будет бесконечной, а лишь приблизится к величине $E \to m c_1^2/2$.

Для электрона величина $m\,\upsilon^2/2$ равна 0.256 Мэв. Так как электрон в существующих ускорителях не сможет приобрести скорости большей c, то и энергию $m\,\upsilon^2/2$ он не сможет превысить. Поскольку присваиваемая электрону энергия в 1 МэВ, 100 МэВ, 1 ГэВ характеризует лишь сумму разностей потенциалов 10^6, 10^8, 10^9 В, соответственно, которую прошла частица, в дальнейшем будем называть ее, в отличие от действительной энергии, релятивистской.

Вторая особенность выражения (7.47) заключается в том, что частица, проходя одну и ту же разность потенциалов, будет получать разное приращение скорости, а также приращение энергии. Величина приращения зависит от того, с какой начальной скоростью ускоряется частица. Лучше будет ускоряться частица, когда ее начальная скорость равна нулю, и совсем не ускоряется, когда начальная скорость приближается к c_1. Таким образом, релятивистская энергия не соответствует действительной еще и потому, что при разных начальных скоростях частица получает разные приращения скорости.

Исследуем движение частицы при воздействии на нее магнита. Если скорость частицы $\vec{\upsilon}$ перпендикулярна магнитной напряженности $\vec{H}$, однородно распределенной в пространстве, и на частицу не оказывают воздействия другие тела, то частица будет двигаться по окружности. Действительно, подставив силу (6.81) в уравнение (2.4), получаем ускорение частицы

$$\vec{w} = \frac{\mu q}{m_1 c}(1-\beta^2)[\vec{\upsilon}\times\vec{H}]\,, \qquad (7.48)$$

из которого видно, что оно перпендикулярно скорости и магнитной напряженности. Запишем ускорение (7.48) в полярной системе координат в виде двух составляющих: тангенциальной в направлении скорости

$$\frac{1}{R}\frac{\mathbf{d}(\upsilon R)}{\mathbf{d}t} = 0, \qquad \upsilon R = h = \text{const} \qquad (7.49)$$

и радиальной, перпендикулярной скорости,

$$\frac{\mathbf{d}^2R}{\mathbf{d}t^2} - \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\mu q(1-\beta^2)\upsilon H}{m_1 c}. \qquad (7.50)$$

В установившемся случае $\mathbf{d}^2R/\mathbf{d}t^2 = 0$, и отсюда следует, что движение частицы будет происходить по окружности радиусом

$$R = \frac{m_1 \upsilon c}{\mu q H(1-\beta^2)}. \qquad (7.51)$$

Здесь знак минус опускаем, рассматривая модули величин. Так как скорость движения частицы по окружности есть $\upsilon = \omega R$, то угловая скорость обращения частицы вокруг оси, отстоящей от нее на расстояние R, будет

$$\omega = \frac{\mu q H(1-\beta^2)}{m_1 c}. \qquad (7.52)$$

Если в (2.4) подставить силу Лоренца (6.79), то получим угловую скорость вращения частицы

$$\omega_L = \frac{\mu q H}{m_1 c}. \qquad (7.53)$$

Как видно из (7.52), угловая скорость, в отличие от вычисленной по силе Лоренца, уменьшается с увеличением скорости частицы и при достижении скорости распространения электромагнитного воздействия ($\beta \to 1$) стремится к нулю, т.е. при какой угодно большой напряженности $\vec{H}$ магнит не в состоянии искривить траекторию частицы.

Угловая скорость (7.52) представлена в неявном виде. Выражая β через $\omega R/c$ и решая квадратное уравнение, запишем угловую скорость движения частицы по круговой траектории в явном виде:

$$\omega = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\omega_L^2 R^2 / c_1^2}}{2\omega_L R^2 / c_1^2}. \qquad (7.54)$$

Используя знак плюс, видим, что при малых значениях напряженностей H, а следовательно, и ω_L угловая скорость $\omega = \omega_L$. При больших значениях напряженностей H, т. е. при $\omega_L^2 R^2 / c_1^2 >> 1$, пренебрегая единицей в числителе, получаем, что угловая скорость стремится к пределу $\omega = c_1/R$. В этом случае скорость частицы равна скорости света и согласно (7.51) радиус орбиты стремится к бесконечности, т.е. траектория частицы будет прямолинейной.

Располагая описанием движения частицы, в случае воздействия на нее электромагнитных устройств в виде (7.47) и в случае магнитных в виде (7.52) или (7.54) мы можем рассмотреть процессы в ускорителях частиц.

В высоковольтном электростатическом ускорителе ускорение заряженных частиц производится наэлектризованными частями установки. Обычно используется последовательный ряд электродов, пластин с отверстиями или трубок, потенциал которых повышается от предыдущего к последующему.

Проходя расстояние между первыми электродами, частица ускоряется под действием разности потенциалов U_1 между ними. Если начальная скорость частицы υ_0, то после прохождения второго электрода ее скорость, согласно (7.47), будет

$$\upsilon_1 = \sqrt{c_1^2 - (c_1^2 - \upsilon_0^2)\exp\frac{2q_1U_1}{m_1c_1^2}}. \qquad (7.55)$$

После прохождения расстояния между вторым и третьим электродом с разностью потенциалов U_2 частица имеет скорость

$$\upsilon_2 = \sqrt{c_1^2 - (c_1^2 - \upsilon_1^2)\exp\frac{2q_1U_2}{m_1c_1^2}}. \qquad (7.56)$$

Подставляя υ_1 в (7.56) из (7.55), получим

$$\upsilon_2 = \sqrt{c_1^2 - (c_1^2 - \upsilon_0^2)\exp\frac{2q_1U}{m_1c_1^2}}, \qquad (7.57)$$

где $U = U_1 + U_2$.

Таким образом, мы видим, что в выражение для скорости ускоряемой частицы входит лишь разность потенциалов между начальным и конечным электродами или суммарное напряжение, пройденное частицей. Если частица пройдет n+1 электрод и полное напряжение будет $U = \sum_{i=1}^{n} U_i$, то ее скорость выразится соотношением (7.47). Поэтому даже после прохождения бесконечного числа электродов скорость частицы не превысит величины c_1.

В циклотроне частица движется по окружности или по другой циклической кривой под действием магнитов с перпендикулярной к скорости магнитной напряженностью $\vec{H}$. По окружности расположены пары электродов, под действием разности потенциалов которых происходит ускорение частицы. Обычно в циклотронах имеется два электрода – дуанта, представляющие собой две части разрезанной по диаметру цилиндрической коробки с малой высотой. Частицы вращаются внутри дуантов и проходят щели между ними. К дуантам подведено высокочастотное напряжение так, чтобы в момент прохождения щели частица ускорялась. При фазе φ в этот момент ускорение будет осуществляться напряжением $\upsilon = U_m \cos\varphi$, где U_m – амплитуда напряжения.

В таком циклотроне фаза напряжения в щели меняется с каждым оборотом. С ростом скорости частицы ее угловая скорость, согласно (7.52), уменьшается, поэтому при каждом последующем обороте частица запаздывает по отношению к предыдущей фазе напряжения. За n оборотов частица пройдет суммарное напряжение $U = \sum_{i=1}^{n} u = U_m \sum_{i=1}^{n} \cos\varphi_i$. Конечная скорость частицы определится выражением (7.47). Так как фаза растет, то обычно на-

чинают ускорение при отрицательной фазе $\varphi > -\pi/2$, а заканчивают при положительной $\varphi < \pi/2$. Конечную скорость частицы можно точно определить, проводя последовательные расчеты после каждого прохождения частицей щели. Зная начальную скорость v_0 частицы ввода в ускоритель и начальную фазу φ_0 напряжения, можем по (7.47) найти скорость v_1 частицы после первой щели. По v_1 с помощью (7.53) можно рассчитать угловую скорость частицы ω_p. По разности ω_p и циклической частоты напряжения $\omega = 2\pi f$ определяется фаза напряжения φ_2 во второй щели. По φ_2 и v_1 снова с помощью (7.47) находится скорость после второй щели. Продолжая так расчет дальше, можем вычислить конечную скорость частицы. Эти вычисления удобно проводить на ЭВМ. Отметим, что в этом процессе радиус траектории будет изменяться, поэтому для более точного расчета процесса ускорения в циклотроне необходимо использовать точное решение уравнения (7.50).

Синхроциклотрон, или фазотрон, отличается от циклотрона тем, что в нем меняют частоту ускоряющего напряжения в соответствии с изменением угловой скорости частицы. С учетом (7.52) частоту необходимо изменять так:

$$f = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{\mu q_1 H}{2\pi m_1 c}(1-\beta^2)\,. \qquad (7.58)$$

В существующих ускорителях ввиду неконтролируемого изменения ω_P ускорение частицы происходит с колебанием фазы.

В циклотроне и фазотроне, как видно из (7.51), с ускорением частицы растет радиус траектории. В синхротроне и синхрофазотроне для того, чтобы не создавать магнит на всем интервале изменения радиуса траектории, поддерживают радиус траектории постоянным. С этой целью необходимо, как видно из (7.51), с ростом скорости частицы увеличивать магнитную напряженность по закону

$$H = \frac{m_1 c}{\mu q_1 R_a}\frac{v}{(1-\beta^2)}\,, \qquad (7.59)$$

где R_a – радиус ускорителя. Но так как скорость частицы растет, а радиус ее траектории не изменяется, то угловая скорость частицы начинает возрастать, а фаза ускоряющего напряжения уменьшаться. Чтобы избежать это в синхрофазотроне в отличии от синхротрона еще меняют частоту ускоряющего напряжения.

Из перечисленных циклических ускорителей все, кроме циклотрона, работают в импульсном режиме. В линейном ускорителе ускорение частиц производится по прямой линии. Разность потенциалов на трубчатых электродах (дрейфовых трубках) или в волноводе создается электромагнитным высокочастотным полем. Конечная скорость определяется выражением (7.47), где U представляет суммарную разность потенциалов, пройденную частицей.

7.5. РАСЧЕТ РЕЗУЛЬТАТОВ ОПЫТА БУХЕРЕРА

Прямые измерения сил между движущимися заряженными частицами не проводились. По-видимому, впервые по результатам отклонения частиц при воздействии на них заряженных и намагниченных тел в 1902 г. В. Кауфманом было установлено, что отношение заряда к массе движущегося электрона зависит от его скорости, т.е. взаимодействие между движущимися заряженными объектами отличается от закона Кулона. В дальнейшем в теории относительности это трактовалось как увеличение массы частицы при ее движении. В 1908 г. А.Г. Бухерер [86] провел более точные эксперименты по воздействию на электрон заряженными и намагниченными телами, в которых подтвердил зависимость отношения заряда к массе электрона от его скорости. Эксперименты были выполнены при изменении скорости электрона в большом диапазоне, в том числе при скоростях, приближающихся к скорости света. Это давало возможность проверить различные теоретические объяснения. Скорее всего, полученные результаты широко обсуждались, но нам известна лишь одна публикация 1919 г. [74].

Обратимся к описанию опытов А.Г. Бухерера профессором К.Н. Шапошниковым [74]. Крупинка радия, расположенная в центре плоского кругового конденсатора (рис. 7.2), испускала β-лучи по всем возможным направлениям. Конденсатор помещался между полюсами магнита с однородной магнитной напряженностью $\vec{H}$, находящейся в плоскости конденсатора. Соосно конденсатору по цилиндрической поверхности расположилась фотопленка (см. рис. 7.2,*б*). Сквозь узкую щель конденсатора проходили главным образом те электроны, для которых взаимно компенсировались электрическое действие конденсатора и перпендикулярное к нему воздействие магнита. "Компенсированные электроны" по выходе из конденсатора оказывались под воздействием одного лишь магнита и отклонялись им от средней плоскости конденсатора (рис. 7.2,*б*). Затем они достигали фотографической пленки, наклеенной на внутреннюю сторону соосного с конденсатором цилиндра и производили ее почернение.

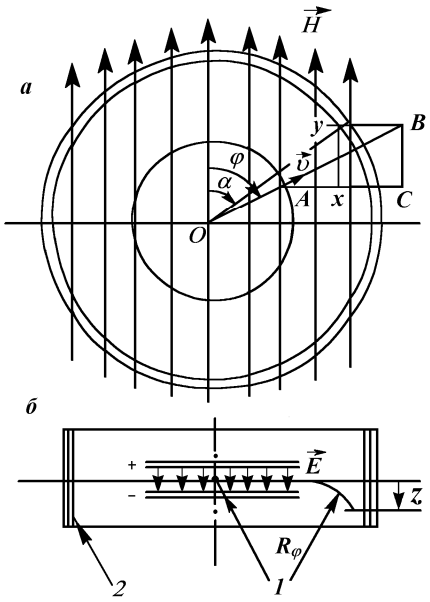


Рис. 7.2. Схема опыта Бухерера.
а – вид вдоль оси конденсатора;
б – вид в диаметральном сечении конденсатора.
1 – источник β-лучей; *2* – фотопленка.

На электрон внутри конденсатора (см. рис. 7.2,*б*) воздействует сила от конденсатора вверх, а от магнитной системы – вниз. Поэтому из расположенного в

центре радиоактивного источника будут вылетать лишь те частицы, для которых магнитная и электрическая силы будут уравновешены. Электрическая сила $\vec{F}_E$ на движущуюся частицу достаточно точно описывается соотношением (6.90). В соответствии с выражением (6.89) магнитная сила при $\mu = 1$ имеет вид

$$\vec{F}_M = \frac{\vec{z}}{z} q\beta(1-\beta^2)H\sin\varphi, \qquad (7.60)$$

где ось z и полярный угол φ определены на рис. 7.2. Тогда условие компенсации сил на электрон $\vec{F}_E = \vec{F}_M$ будет

$$qE(1-\beta^2) = q\beta(1-\beta^2)H\sin\varphi$$

или

$$\beta\sin\varphi = \frac{E}{H} = \text{const}. \qquad (7.61)$$

Если в установке выбрано какое-то постоянное отношение E/H, то при $\varphi = \pi/2$ величина β наименьшая, т.е. по горизонтальной оси (см. рис. 7.2,*а*) из конденсатора будут выходить частицы с наименьшей скоростью. С уменьшением угла φ от $\pi/2$ скорость частиц будет увеличиваться и при приближении к углу $\varphi = \arcsin(E/H)$ из конденсатора будут выходить частицы со скоростью близкой, к скорости света. Вне конденсатора частицы, находясь лишь под магнитным воздействием, и двигаясь по винтовым линиям вокруг вектора магнитной напряженности $\vec{H}$, будут отклоняться от средней плоскости конденсатора (см. рис. 7.2,*б*) и попадать на фотопленку. Так как с ростом скорости частицы воздействие на нее уменьшается, то наибольшее отклонение получат частицы по горизонтальной оси, т.е. при $\varphi = \pi/2$ и наименьшее при угле $\varphi = \arcsin(E/H)$. Согласно К.Н. Шапошникову, все

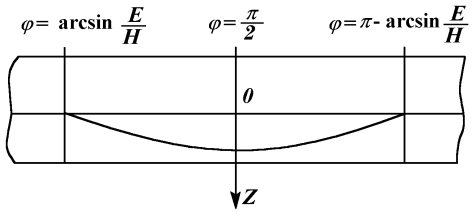


Рис. 7.3. Кривая отклонения электронов разных скоростей на фотопленке в опыте А.Г. Бухерера.

опыты Бухерера дали примерно одинаковую картину, представленную на рис. 7.3. Основное отличие теории относительности от эксперимента заключается в том, что рассчитанная согласно теории относительности кривая отклонения, приближаясь к углам $|\varphi| = \arcsin(E/H)$, должна идти вертикально, как показано на рис. 7.4.

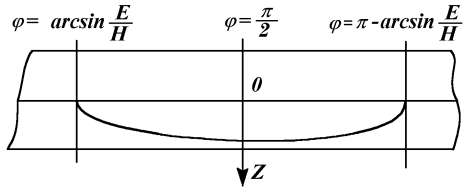


Рис. 7.4. Рассчитанный К.Н. Шапошниковым, согласно теории относительности, характер отклонения электронов разных скоростей.

Повторяя методику расчета, изложенную К.Н. Шапошниковым, представим, что вышедший из конденсатора в т. *A* (см.рис. 7.2,*а*) электрон со скоростью υ будет двигаться по винтовой траектории до соприкосновения с фотопленкой. Траекторию можно получить, если согнуть треугольник *ABC* по цилиндрической поверхности радиусом R_φ траектории движения электрона (см.рис. 7.2,*б*). Тогда гипотенуза *AB* будет являться траекторией электрона, а радиус кривизны определится из равенства магнитной и центробежной сил $\vec{F}_M = \vec{F}_R$:

$$q\beta(1-\beta^2)H\sin\varphi = m\upsilon^2\sin^2\varphi / R_\varphi,$$

откуда

$$R_\varphi = \frac{mc^2}{q\beta\cdot\sin\varphi}\frac{\beta^2\sin\varphi}{H(1-\beta^2)} = \frac{mc^2\beta\sin\varphi}{qH}\frac{1}{1-\beta^2}. \qquad (7.62)$$

Но так как для данного опыта в соответствии с (7.61) $\beta\sin\varphi = \text{const}$, то радиус кривизны (7.62) можно записать

$$R_\varphi = \frac{A}{1-\beta^2}, \qquad (7.63)$$

где

$$\frac{mc^2\beta\sin\varphi}{qH} = A = \text{const}. \qquad (7.64)$$

После изгиба треугольника *ABC* т. *B* попадает в т. *y* фотопленки, которая будет отстоять на z от срединной плоскости и находиться под углом α к напряженности $\vec{H}$. Обозначив $Ax = x$, величину z можно выразить через R_φ и x, если учесть, что отклонение точки *C* при искривлении треугольника тоже равно z. Тогда $z = R_\varphi - \sqrt{R_\varphi^2 - x^2}$. Продифференцировав это выражение по углу α, после преобразования получим

$$\frac{\mathbf{d}z}{\mathbf{d}\alpha} = -\frac{z}{R_\varphi - z}\frac{\mathbf{d}R_\varphi}{\mathbf{d}\alpha} + \frac{x}{R_\varphi - z}\frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}\alpha}. \qquad (7.65)$$

Из выражения (7.63) после дифференцирования имеем

$$\frac{\mathbf{d}R_\varphi}{\mathbf{d}\alpha} = \frac{2A\beta}{(1-\beta^2)^2}\frac{\mathbf{d}\beta}{\mathbf{d}\alpha} = \frac{2\beta R_\varphi^2}{A}\frac{\mathbf{d}\beta}{\mathbf{d}\alpha}. \qquad (7.66)$$

Производную от β определяем, дифференцируя (7.61):

$$\frac{\mathbf{d}\beta}{\mathbf{d}\alpha} = -\frac{\beta}{\text{tg}\varphi}\cdot\frac{\mathbf{d}\varphi}{\mathbf{d}\alpha}. \qquad (7.67)$$

После подстановки (7.66) и (7.67) выражение (7.65) запишется в виде

$$\frac{\mathbf{d}z}{\mathbf{d}\alpha} = \frac{2\beta^2 z R_\varphi^2\,\text{ctg}\varphi}{A(R_\varphi - z)}\frac{\mathbf{d}\varphi}{\mathbf{d}\alpha} + \frac{x}{R_\varphi - z}\frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}\alpha}. \qquad (7.68)$$

Рассмотрим поведение касательной к кривой при $\beta \to 1$. Как видно из (7.63), при $\beta \to 1$ радиус $R_\varphi \to \infty$, поэтому из выражения $z = R_\varphi - \sqrt{R_\varphi^2 - x^2} \approx R_\varphi - R_\varphi(1 - 0.5x^2 / R^2\varphi)$ следует $zR_\varphi = x^2 / 2$. Подставляя значение z в правую часть (7.68), рассмотрим поведение касательной к кривой при больших скоростях частиц

$$\lim_{\beta\to 1} \frac{\mathbf{d}z}{\mathbf{d}\alpha} = \lim_{R_\varphi\to\infty} \left(\frac{x^2 \beta \mathrm{ctg}\varphi}{A} \frac{R_\varphi}{R_\varphi - z} \frac{\mathbf{d}\varphi}{\mathbf{d}\alpha} + \frac{x}{R_\varphi - z} \frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}\alpha} \right) = \frac{x^2 \beta \mathrm{ctg}\varphi}{A} \frac{\mathbf{d}\varphi}{\mathbf{d}\alpha}. \quad (7.69)$$

Как видим, предел этого выражения есть конечная величина. Так как $\mathbf{d}z/\mathbf{d}\alpha$ является тангенсом наклона кривой, то она будет приближаться к горизонтальной прямой под каким-то острым углом, как показано на рис. 7.3.

К.Н. Шапошников и Кастерин рассмотрели опыт Бухерера на основании теории относительности. Согласно К.Н. Шапошникову [74], условие компенсации по теории относительности выражается тем же соотношением (7.61). Для радиуса кривизны он получил [56] следующее выражение:

$$R_\varphi^{'} = \frac{C_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad (7.70)$$

где $C_0 = A = \mathrm{const}$. Зависимость для касательной получена К.Н. Шапошниковым в следующем виде:

$$\frac{\mathbf{d}z}{\mathbf{d}\alpha} = \frac{x^2 \beta \ \mathbf{ctg}\varphi}{A} \frac{R_\varphi^2}{R_\varphi - z} \frac{\mathbf{d}\varphi}{\mathbf{d}\alpha} + \frac{x}{R_\varphi - z} \frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}\alpha}. \quad (7.71)$$

Первый член в (7.71), а следовательно, и $\mathbf{d}z/\mathbf{d}\alpha$ стремится к бесконечности при $R_\varphi \to \infty$, т.е. кривая будет подходить к горизонтальной оси α под прямым углом (см. рис. 7.4). Можно убедиться, что лишний сомножитель R_φ в первом слагаемом выражения (7.71), который приводит к бесконечности тангенс наклона, обусловлен зависимостью радиуса кривизны (7.70) от $1/\sqrt{1-\beta^2}$ в отличие от $1/(1-\beta^2)$ в наших выражениях (7.63), (6.90) и (7.60). Таким образом, и соотношения теории относительности и наши дают при $\beta \to 1$ одинаковый качественный результат – воздействие заряженного тела и магнита на движущуюся заряженную частицу уменьшается и прекращается совсем при приближении к скорости света.

Однако количественные результаты различаются при скоростях, близких к скорости света, т.е. $\beta = 1$. Зависимость для радиуса кривизны (7.63) от $(1-\beta^2)$ выведена из экспериментальных законов электромагнетизма. Зависимость (7.70) от $\sqrt{1-\beta^2}$ получена в теории относительности в результате принятия ряда гипотез, в том числе гипотезы изменения массы частицы при ее движении.

В опыте Бухерера на фотопленке оставляют след частицы со скоростью, близкой к скорости света, что позволяет увидеть расхождение между теорией относительности и действительностью. А.Г. Бухерер проводил экспери-

менты при двух направлениях $\vec{E}$ и $\vec{H}$ [86], поэтому на фотоснимках имеются верхняя и нижняя ветви кривой. Они соединяются под острыми углами, образуя чечевицу. Однако соединение ветвей, как на рис. 7.4, согласно теории относительности должно происходить под прямыми углами, представляя фигуру в виде эллипса. Все результаты экспериментов Бухерера 1908 г. дают чечевицеобразную кривую, тем самым отвергая результаты теории относительности.

ГЛАВА 8

МЕТОД СИЛ И РЕЛЯТИВИСТСКИЙ МЕТОД

8.1. ЭФИР, ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

Познание мира человеком происходило так, что он среди бесчисленного множества движущихся объектов всегда стремился найти такой, который покоится, а все остальные движутся относительно него. До становления системы Коперника такой центральной системой была Земля.

Затем она была перенесена на Солнце. Но когда наблюдениями было установлено, что Солнце, как и остальные звезды, движется, такую абсолютную систему мира начали связывать с гипотетической мировой средой – эфиром. Представляли, что в эфире должен распространяться свет от дальних звезд, а так как он имеет электромагнитное происхождение, то и электромагнитное воздействие должно распространяться по отношению к этому эфиру. Вот как А. Эйнштейн в работе "Принцип относительности и его следствия в современной физике" [77] подытожил в начале XX в. представления его времени о необходимости эфира: "Когда обнаружилось, что между упругими колебаниями весомой материи и явлениями интерференции и дифракции световых лучей существует глубокая аналогия, явилась уверенность, что свет следует рассматривать как колебательное состояние какой-то особой материи. Так как свет может распространяться в пространстве, где весомая материя отсутствует, то чтобы объяснить это, пришлось допустить существование особенной субстанции, отличающейся от весомой материи; эту субстанцию назвали эфиром. А так как в телах, отличающихся малой плотностью, как, например, в газах, скорость распространения света приблизительно равна скорости в пустоте, то пришлось предположить, что и в этих телах эфир также является главным носителем световых явлений. Наконец, гипотеза, согласно которой эфир находится внутри жидких и твердых тел, в свою очередь сделалась необходимой, чтобы понять распространение света внутри этих тел, ибо при помощи одних только упругих свойств весомой мате-

рии невозможно было объяснить громадную скорость распространения световых лучей".

Следует подчеркнуть метод познания, который тогда казался безусловно верным. Все происходящее должно иметь объяснение. С этой целью необходимо выдвигать гипотезы и на их основе объяснять окружающий мир. Проследуем далее за объяснением мира, построенном на гипотезе эфира.

Поскольку Земля движется в предполагаемом эфире, свет у поверхности Земли, распространяясь с определенной скоростью по отношению к эфиру, должен иметь другую скорость относительно земной поверхности в направлении движения Земли, нежели в перпендикулярном направлении. Экспериментаторами во главе с А. Майкельсоном поставлено много опытов, но рассчитанная разность скорости опытно не подтвердилось.

Тогда появились попытки объяснить теоретически тот факт, что свет имеет одинаковую скорость как по отношению к эфиру, так и по отношению к Земле, которая движется в эфире. Г.А. Лоренц, а также независимо от него и другие исследователи, высказывают гипотезу, что при движении Земли в эфире происходит соответственное уменьшение ее в направлении движения, вследствие чего невозможно измерить изменение скорости света по отношению к Земле. Так как для электромагнитного воздействия существовали уравнения, описывающие его поведение при движении, то используются эти соотношения электродинамики. С их помощью выдвинутая гипотеза обосновывалась теми математическими преобразованиями координаты *x*, которые сводили поле движущейся системы зарядов к полю неподвижных зарядов [53].

Подчеркнем, что эти преобразования вытекают из условия: поле движущихся зарядов точно такое же, как и покоящихся. Оно основано на представлении о поле как некоторой сущности, которая не должна зависеть от движения. Это условие ошибочное, поскольку движущиеся заряды создают ток, который воздействует на магнит, а неподвижные заряды на магнит не действуют. То есть поле движущихся зарядов должно отличаться от поля неподвижных. Но так как гипотеза сокращения размеров принята, то с ее позиций преобразование $x = x'\sqrt{1-\beta^2}$ рассматривалось как сокращение размеров в движущейся системе зарядов в направлении движения. Предполагалось, что не должно обнаруживаться различий в распространении света в движущейся или покоящейся по отношению к эфиру среде. Позже Г.А. Лоренц отказывается от данной гипотезы, так как во введении все новых гипотез "может встретиться необходимость каждый раз, когда станут известны новые факты", – замечает он в работе "Электромагнитные явления в системе, движущейся с любой скоростью, меньше скорости света" [33]. В этой же работе он пишет: "Положение вещей было бы удовлетворительнее, если бы можно было с помощью определенных основных допущений показать, что многие электромагнитные явления строго, т.е. без какого-либо пренебрежения членами высших порядков, не зависят от движения системы". В этих словах, сказанных в 1904 г., выражены стремления физиков тех лет и

общее направление, в котором будет развиваться физика, а именно: электрическое поле движущейся системы будет выражаться такими же соотношениями, как и электрическое поле неподвижной системы. Физики больше не будут искать причин, объясняющих одновременное существование незыблемого эфира с одной и той же скоростью света в нем и в системе отсчета, которая движется с какой-то скоростью по отношению к эфиру.

Приведем слова А. Эйнштейна из его работы [77]: "Таким путем дошли до понимания этих полей в пустоте, как особых состояний эфира, не требующих для себя более глубокого анализа." И вот А. Эйнштейн, не разрешая этой противоречивой проблемы существования одинаковой скорости света в эфире и в движущейся в нем системе, а лишь принимая это за один из принципов, строит теорию относительности. Первоначально данный принцип в "Электродинамике движущихся тел" [33] был сформулирован так: "Каждый луч света движется в "покоящейся" системе координат с определенной скоростью v независимо от того, испускается ли этот луч света покоящимся или движущимся телом". Впоследствии эта еще осторожная формулировка будет заменена более прямой: "скорость распространения взаимодействия одинакова во всех инерциальных системах отсчета" [26]. А. Эйнштейн осуществляет принцип относительности с помощью преобразований Г.А. Лоренца, причем он записывает одинаково уравнения электродинамики для движущейся и покоящейся системы. Для этого дополнительно вводится преобразование времени. Смысл действий Эйнштейна следующий: если в вакууме существует какая-то электрическая система воздействий и она в данной системе координат x, y, z описывается уравнениями Максвелла (3.22) и (3.24) для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, то относительно движущейся со скоростью v системы координат x', y', z' эта же система электрических воздействий описывается (такое накладывается условие) теми же уравнениями Максвелла, но для других уже векторов $\vec{E}'$ и $\vec{H}'$. Из данного условия вытекают преобразования $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в $\vec{E}'$ и $\vec{H}'$, а также x, y, z, t в x', y', z', t'. Этот подход и составляет второй принцип теории относительности: "Законы, по которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к которой из двух координатных систем, находящихся относительно друг друга в равномерном поступательном движении, эти изменения состояния относятся" [33].

Итак, прослеживается следующая цепочка гипотез и вытекающих из них выводов.

1. Гипотеза об эфире как среде, относительно которой происходят все движения.

2. Эксперименты (Майкельсона и др.) не подтверждают наличие такого эфира.

3. Принимается вывод: движение относительно эфира нельзя определить, так как тела в направлении движения сокращаются.

4. Из него вытекают следствия. Законы механики не зависят от движения. Поля (которыми выражают воздействие тел) также не зависят от движения. Силы воздействия движущихся тел такие же, как и неподвижных.

5. Из условия неизменности полей при движении вытекают преобразования пространства и времени.

6. Эксперименты (Кауфмана, Бухерера) свидетельствуют, что воздействие на движущуюся частицу уменьшается с увеличением ее скорости.

7. Выдвигается объяснение: масса частицы растет с увеличением ее скорости.

Мы перечислили только часть гипотетических предположений и следующих из них выводов, на фоне которых развивалась теория относительности.

Далее, полученные преобразования координат принимаются за действительные связи окружающего мира. Скорость света отождествляется со скоростью распространения всякого воздействия, а так как преобразования Лоренца не существуют при скорости, большей скорости света, то она принимается за предельную скорость. Координаты и время начинают рассматривать как самостоятельный объект – четырехмерное пространство-время.

8.2 СУЩНОСТЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Анализу преобразований Лоренца [41.43,79,87,92,103,127] и принципа относительности [71, 93] посвящено много работ. При этом часто вместо одних гипотез вводятся другие. Если отбросить все гипотезы, на которых основана теория относительности, то суть ее метода описания воздействий заключается в том, что воздействие движущихся тел определяется через воз-

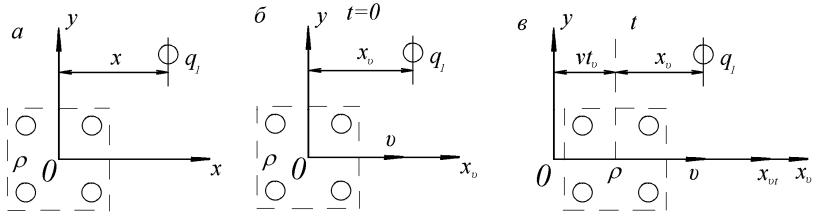


Рис. 8.1. Схемы воздействия неподвижных заряженных тел (*а*) и движущихся (*б*) и (*в*) на неподвижное тело с единичным зарядом ($q_1 = 1$).

действие неподвижных тел, параметры которого изменяются в соответствии с преобразованиями Лоренца. Однако воздействие движущихся тел отличается от воздействия неподвижных. По-разному они и описываются. Поэтому приравнивание заведомо неравных уравнений является формальным приемом, который может применяться, но эти преобразования не имеют физического смысла, т.е. параметры явлений и объектов не связаны этими соотношениями.

Рассмотрим такое формальное приравнивание соотношений, описывающих электрические воздействия движущихся и неподвижных заряженных тел. Пусть заряд тел (рис. 8.1,*а*) описывается плотностью заряда $\rho\,(x, y, z)$ и

они движутся со скоростью υ вдоль оси x_υ. В случае движения записываем все переменные с индексами "υ": плотность зарядов $\rho\,(x_\upsilon, y_\upsilon, z_\upsilon)$ в системе координат $x_\upsilon, y_\upsilon, z_\upsilon$ (см.рис. 8.1,*б*). Рассмотрим силу воздействия заряженных тел на единичный заряд, который покоится в этой системе, т.е. электрическую напряженность $\vec{E}$. Все дальнейшее не изменится, если единичный заряд движется со скоростью $(-\upsilon)$ относительно системы зарядов. Как установлено опытами, электрическое воздействие зависит только от относительной скорости взаимодействующих объектов, поэтому эти случаи равнозначны.

Сила воздействия движущейся системы заряженных тел с плотностью ρ_υ определяется уравнением Даламбера (4.6), которое в проекции на оси x_υ и y_υ запишется так:

$$\frac{\partial^2 E_{\upsilon x}}{\partial x_\upsilon^2}+\frac{\partial^2 E_{\upsilon x}}{\partial y_\upsilon^2}+\frac{\partial^2 E_{\upsilon x}}{\partial z_\upsilon^2}-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 E_{\upsilon x}}{\partial t_\upsilon^2}=\frac{4\pi}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_\upsilon}\rho_\upsilon+\frac{4\pi}{\varepsilon c_1^2}\frac{\partial}{\partial t_\upsilon}\rho_\upsilon, \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial^2 E_{\upsilon y}}{\partial x_\upsilon^2}+\frac{\partial^2 E_{\upsilon y}}{\partial y_\upsilon^2}+\frac{\partial^2 E_{\upsilon y}}{\partial z_\upsilon^2}-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 E_{\upsilon y}}{\partial t_\upsilon^2}=\frac{4\pi}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_\upsilon}\rho_\upsilon. \quad (8.2)$$

Ввиду того что проекция силы на ось z_υ аналогична проекции на ось y_υ, последняя не приводится.

Так как система зарядов неизменна, то ее воздействие в момент t_υ и в точке $x_{\upsilon t} = x_\upsilon + \upsilon t_\upsilon, y_\upsilon, z_\upsilon$ (см. рис. 8.1,*в*) будет равно воздействию в момент $t_\upsilon = 0$ в точке с координатами $x_\upsilon, y_\upsilon, z_\upsilon$, где t_υ – любой отрезок времени. Полные производные по времени от переменных систем уравнений (8.1) – (8.2) будут равны нулю:

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t_\upsilon}=\frac{\partial}{\partial x_\upsilon}\frac{\partial x_\upsilon}{\partial t_\upsilon}+\frac{\partial}{\partial t_\upsilon}=0. \quad (8.3)$$

Отметим, что Г.А. Лоренц использовал соотношение (8.3) при выводе преобразований координат и времени [26,32], названных впоследствии его именем. С учетом (8.3) частные производные

$$\frac{\partial}{\partial t_\upsilon}=-\upsilon\frac{\partial}{\partial x_\upsilon}, \quad (8.4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_\upsilon^2}=\upsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x_\upsilon^2}. \quad (8.5)$$

Тогда воздействие движущейся системы зарядов (8.1) и (8.2) после замены производных по времени, согласно (8.4) и (8.5), будет описываться так:

$$(1-\beta^2)\frac{\partial^2 E_{\upsilon x}}{\partial {x_\upsilon}^2}+\frac{\partial^2 E_{\upsilon x}}{\partial {y_\upsilon}^2}+\frac{\partial^2 E_{\upsilon x}}{\partial {z_\upsilon}^2}=\frac{4\pi}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_\upsilon}\rho_\upsilon(1-\beta^2), \quad (8.6)$$

$$(1-\beta^2)\frac{\partial^2 E_{\upsilon y}}{\partial {x_\upsilon}^2}+\frac{\partial^2 E_{\upsilon y}}{\partial {y_\upsilon}^2}+\frac{\partial^2 E_{\upsilon y}}{\partial {z_\upsilon}^2}=\frac{4\pi}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_\upsilon}\rho_\upsilon. \quad (8.7)$$

Выражения (8.6) и (8.7) определены в точке, которая в любой момент времени одинаково отстоит от центра движущийся системы зарядов, но в движении зарядов участия не принимает.

Сила воздействия, создаваемая этими же заряженными телами, определяется уравнением Лапласа (3.15), которое имеет вид

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}=\frac{4\pi}{\varepsilon}\frac{\partial \rho}{\partial x}, \tag{8.8}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}=\frac{4\pi}{\varepsilon}\frac{\partial \rho}{\partial y}. \tag{8.9}$$

Системами уравнений (8.6), (8.7) и (8.8), (8.9) описаны силы воздействия одной и той же заряженной системы ρ на единичный заряд, находящийся на одном и том же расстоянии. Несмотря на одинаковые параметры воздействия, уравнения (8.6), (8.7) отличаются от уравнений (8.8), (8.9). Отличие обусловлено тем, что силы воздействия при движении изменяются. Если мы пожелаем свести описание воздействия движущейся системы к описанию воздействия неподвижной системы, то должны осуществить замену величин, входящих в (8.6) и (8.7), через величины, входящие в (8.8) и (8.9). Так, сравнивая (8.6) и (8.8), видим, что достаточно двух замен:

$$x_\upsilon = x\sqrt{1-\beta^2}, \qquad \rho_\upsilon = \rho/\sqrt{1-\beta^2}, \tag{8.10}$$

а сравнивая (8.7) и (8.9), находим

$$E_{\upsilon y} = E_y/\sqrt{1-\beta^2}. \tag{8.11}$$

Аналогично получим и для проекции на ось z

$$E_{\upsilon z} = E_z/\sqrt{1-\beta^2}. \tag{8.12}$$

Таким образом, заменой переменных (8.10) – (8.12) мы можем свести уравнение Даламбера (4.6) к уравнению (3.15), несмотря на то, что уравнения определяют разные процессы. Возможность такой замены не означает, что эти процессы одинаковы. Поэтому преобразования величин (8.10) – (8.12) не отражают действительный характер их изменения.

Можно показать, что уравнение (4.6) сводится к (3.15) и другой системой преобразований, а именно

$$E_{\upsilon x} = E_x\sqrt{1-\beta^2}, \qquad x_\upsilon = x\sqrt{1-\beta^2}. \tag{8.13}$$

Первая система преобразований (8.10) – (8.12) оставляет неизменным заряд:

$$q_\upsilon = \iiint \rho_\upsilon \mathbf{d}x_\upsilon \mathbf{d}y_\upsilon \mathbf{d}z_\upsilon = \iiint \frac{\rho \mathbf{d}x\sqrt{1-\beta^2}\,\mathbf{d}y\mathbf{d}z}{\sqrt{1-\beta^2}} = q_\upsilon .$$

Другая система преобразований (8.13) преобразует и заряд:

$$q_\upsilon = \iiint \rho_\upsilon \mathbf{d}x'_\upsilon \mathbf{d}y_\upsilon \mathbf{d}z_\upsilon = \sqrt{1-\beta^2}\,q .$$

С помощью преобразований и исходя из их смысла мы можем из решения для воздействия неподвижных заряженных тел системы получить решение для воздействия от движущихся зарядов в таком порядке:

1. Находятся компоненты электрической напряженности от данной стационарной системы зарядов в точке x, y, z (начало координат – в центре системы) в виде

$$E_x(x, y, z), \quad E_y(x, y, z), \quad E_z(x, y, z).$$

2. Вместо координаты x везде пишется $(x_{\upsilon t} - \upsilon t_\upsilon)/\sqrt{1-\beta^2}$, где υt_υ определяет центр движущейся системы зарядов, а $x_{\upsilon t}$ – координата точки в системе координат x_υ, y_υ, z_υ в момент t_υ (в дальнейшем индекс t опускаем). Ось x при этом направлена по скорости системы зарядов. Тогда составляющие электрической напряженности будут:

$$E_x\left(\frac{x_\upsilon - \upsilon t_\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}, y_\upsilon, z_\upsilon\right), \qquad E_y\left(\frac{x_\upsilon - \upsilon t_\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}, y_\upsilon, z_\upsilon\right), \qquad E_z\left(\frac{x_\upsilon - \upsilon t_\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}, y_\upsilon, z_\upsilon\right).$$

Применяя вторую систему преобразований, необходимо еще величину заряда умножить на $1/\sqrt{1-\beta^2}$, т.е. заменить q на $q_\upsilon/\sqrt{1-\beta^2}$.

3. Записать компоненты электрической напряженности от движущейся системы зарядов для первой системы преобразований в соответствии с (8.11), (8.12), в виде:

$$E_{\upsilon x} = E_x\left(\frac{x_\upsilon - \upsilon t_\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}, y_\upsilon, z_\upsilon\right), \tag{8.14}$$

$$E_{\upsilon y} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot E_y\left(\frac{x_\upsilon - \upsilon t_\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}, y_\upsilon, z_\upsilon\right), \tag{8.15}$$

$$E_{\upsilon z} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot E_z\left(\frac{x_\upsilon - \upsilon t_\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}, y_\upsilon, z_\upsilon\right), \tag{8.16}$$

а для второй системы преобразований, согласно (8.13), так:

$$E_{\upsilon x} = \sqrt{1-\beta^2}\cdot E_x\left(\frac{q_\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{x_\upsilon - \upsilon t_\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}, y_\upsilon, z_\upsilon\right), \tag{8.17}$$

$$E_{\upsilon y} = E_y\left(\frac{q_\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{x_\upsilon - \upsilon t_\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}, y_\upsilon, z_\upsilon\right), \tag{8.18}$$

$$E_{\upsilon z} = E_z\left(\frac{q_\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{x_\upsilon - \upsilon t_\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}, y_\upsilon, z_\upsilon\right). \tag{8.19}$$

Нетрудно убедиться, что пользуясь этим методом, можно из выражения для электрической напряженности точечного заряда

$$E_x = \frac{xq}{\varepsilon(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad E_y = \frac{yq}{\varepsilon(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad E_z = \frac{zq}{\varepsilon(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

получить в проекциях на оси координат выражение для напряженности движущегося точечного заряда со скоростью υ:

$$E_{\upsilon x} = \frac{(1-\beta^2)(x_\upsilon - \upsilon t_\upsilon)q_\upsilon}{\varepsilon\left\{(x_\upsilon - \upsilon t_\upsilon)^2 + (1-\beta^2)(y_\upsilon{}^2 + z_\upsilon{}^2)\right\}^{3/2}}, \tag{8.20}$$

$$E_{\upsilon y} = \frac{(1-\beta^2)y_\upsilon q_\upsilon}{\varepsilon\left\{(x_\upsilon - \upsilon t_\upsilon)^2 + (1-\beta^2)(y_\upsilon{}^2 + z_\upsilon{}^2)\right\}^{3/2}}, \tag{8.21}$$

$$E_{\upsilon z} = \frac{(1-\beta^2)z_\upsilon q_\upsilon}{\varepsilon\left\{(x_\upsilon - \upsilon t_\upsilon)^2 + (1-\beta^2)(y_\upsilon{}^2 + z_\upsilon{}^2)\right\}^{3/2}}. \tag{8.22}$$

Выражения (8.20) – (8.22) представляют проекции электрической напряженности (4.54), создаваемой движущимся точечным зарядом.

Итак, обе полученные системы преобразований сводят выражение для неподвижной стационарной системы зарядов к выражению для воздействия таких же движущихся заряженных тел. Причем воздействия движущихся тел и неподвижных отличаются, и выражения дают разные результаты при одних и тех же исходных данных. Например, для первой системы преобразований (8.14)-(8.16) связь между силами следующая: если неподвижная система зарядов воздействует на единичный покоящийся заряд, отстоящий от ее центра на расстояниях $x = a$, $y = b$, $z = c$, силой с проекциями $E_x = A$, $E_y = B$, $E_z = C$, то при движении она будет воздействовать силой $E_{\upsilon x} = A, E_{\upsilon y} = B/\sqrt{1-\beta^2}, E_{\upsilon z} = C/\sqrt{1-\beta^2}$ на единичный заряд, отстоящий от центра уже на других расстояниях: $x_\upsilon = a\sqrt{1-\beta^2}, y_\upsilon = b, z_\upsilon = c$.

Аналогичный смысл выражают и преобразования второй системы (8.17), (8.18).

8.3. ОПИСАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ДВИЖУЩЕЙСЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛ

С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Предыдущие преобразования были получены для стационарной системы зарядов. Если же электрическая система изменяется со временем, то соотношение между координатами точек, в которых силы воздействия неподвижной системы и движущейся находятся в определенном соответствии, будут зависеть еще от момента времени t, в который рассматривается это соответствие. Поэтому и сам момент времени t будет определяться координатой вдоль движения x_υ, в который рассматривается воздействие движущейся системы, а также моментом t_υ, т.е. $t = t(t_\upsilon, x_\upsilon)$.

Итак, имеется переменная электромагнитная система с плотностью электричества ρ и плотностью токов $\rho\vec{u}$. Ее воздействие на неподвижный одиночный заряд определяется вектором $\vec{E}$, а на движущийся заряд, ток или магнит с единичными параметрами – вектором $\vec{H}$, которые находятся из уравнений Максвелла (3.22), (3.28), (3.19), (3.14). Перепишем эти уравнения

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\rho\vec{u} + \frac{\varepsilon}{c}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \tag{8.23}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \tag{8.24}$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho, \tag{8.25}$$

$$\mathrm{div}\vec{H} = 0. \tag{8.26}$$

В гл. 3 и 4 исключением $\vec{H}$ из системы уравнений (8.23), (8.24) мы получили уравнение Даламбера (3.26) для воздействия движущихся зарядов на неподвижный заряд, а исключением $\vec{E}$ – для воздействия движущегося магнита на неподвижные объекты.

Теперь мы рассмотрим метод описания воздействия движущейся электромагнитной системы с помощью преобразования переменных. Пусть она движется со скоростью υ вдоль оси x относительно покоящихся заряженного тела и магнита, имеющих единицы электрического и магнитного зарядов. Воздействие электромагнитной системы на эти тела будет определяться той же системой уравнений (8.23) – (8.26), но при другой плотности тока:

$$\vec{J} = \rho[(u_{\upsilon x} - \upsilon)\vec{i} + u_{\upsilon y}\vec{j} + u_{\upsilon z}\vec{k}]. \tag{8.27}$$

Перепишем эту систему уравнений, заменив в (8.23.) плотность тока $\rho\vec{u}$ на (8.27):

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_{\upsilon x}}{\partial t_\upsilon} + \frac{4\pi}{c}\rho_\upsilon(u_{\upsilon x} + \upsilon) = \frac{\partial H_{\upsilon z}}{\partial y_y} - \frac{\partial H_{\upsilon y}}{\partial z_\upsilon}, \tag{8.23а}$$

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_{\upsilon y}}{\partial t_\upsilon}+\frac{4\pi}{c}\rho_\upsilon u_{\upsilon y}=\frac{\partial H_{\upsilon x}}{\partial z_\upsilon}-\frac{\partial H_{\upsilon z}}{\partial x_\upsilon}, \qquad (8.23б)$$

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_{\upsilon z}}{\partial t_\upsilon}+\frac{4\pi}{c}\rho_\upsilon u_{\upsilon z}=\frac{\partial H_{\upsilon y}}{\partial x_\upsilon}-\frac{\partial H_{\upsilon x}}{\partial y_\upsilon}, \qquad (8.23в)$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_{\upsilon x}}{\partial t_\upsilon}=-\frac{\partial E_{\upsilon z}}{\partial y_\upsilon}+\frac{\partial E_{\upsilon y}}{\partial z_\upsilon}, \qquad (8.24а)$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_{\upsilon y}}{\partial t_\upsilon}=-\frac{\partial E_{\upsilon x}}{\partial z_\upsilon}+\frac{\partial E_{\upsilon z}}{\partial x_\upsilon}, \qquad (8.24б)$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_{\upsilon z}}{\partial t_\upsilon}=-\frac{\partial E_{\upsilon y}}{\partial x_\upsilon}+\frac{\partial E_{\upsilon x}}{\partial y_\upsilon}, \qquad (8.24в)$$

$$\frac{\partial E_{\upsilon x}}{\partial x_\upsilon}+\frac{\partial E_{\upsilon y}}{\partial y_\upsilon}+\frac{\partial E_{\upsilon z}}{\partial z_\upsilon}=\frac{4\pi}{c}\rho_\upsilon, \qquad (8.25а)$$

$$\frac{\partial H_{\upsilon x}}{\partial x_\upsilon}+\frac{\partial H_{\upsilon y}}{\partial y_\upsilon}+\frac{\partial H_{\upsilon z}}{\partial z_\upsilon}=0. \qquad (8.26а)$$

Так как данные уравнения описывают воздействие движущихся со скоростью υ электромагнитных тел, все величины записаны с индексом υ. Эта система уравнений отличается от системы уравнений (8.23), (8.24), (8.25), (8.26), которая описывает воздействие неподвижной электромагнитной системы, тем, что в уравнение (8.23а) входит слагаемое со скоростью υ. Будем искать преобразования переменных, которые приводили бы систему уравнений для случая движения (с индексом υ) к уравнениям для случая покоя. Поскольку связь между независимыми переменными известна:

$$x=\frac{x_\upsilon-\upsilon t_\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}},\ y=y_\upsilon,\ z=z_\upsilon \quad \text{и} \quad t=t(t_\upsilon,x_\upsilon,\upsilon), \qquad (8.28)$$

можно записать производные:

$$\frac{\partial}{\partial x_\upsilon}=\frac{\partial t}{\partial x_\upsilon}\cdot\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial}{\partial x};\quad \frac{\partial}{\partial y_\upsilon}=\frac{\partial}{\partial y};\quad \frac{\partial}{\partial z_\upsilon}=\frac{\partial}{\partial z};$$

$$\frac{\partial}{\partial t_\upsilon}=\frac{\partial t}{\partial t_\upsilon}\cdot\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}.$$

После их подстановки в уравнения (8.23а), (8.24а),(8.25а), (8.26а) система перепишется так:

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial t}{\partial t_\upsilon}\frac{\partial E_{\upsilon x}}{\partial t}-\frac{\varepsilon}{c}\frac{\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial E_{\upsilon x}}{\partial x}+\frac{4\pi}{c}\rho_\upsilon(u_{\upsilon x}+\upsilon)=\frac{\partial H_{\upsilon z}}{\partial y}-\frac{\partial H_{\upsilon y}}{\partial z}, \qquad (8.23'а)$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial t}{\partial t_\upsilon}\frac{\partial H_{\upsilon x}}{\partial t}-\frac{\mu}{c}\frac{\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial H_{\upsilon x}}{\partial x}=-\frac{\partial E_{\upsilon z}}{\partial y}+\frac{\partial E_{\upsilon y}}{\partial z}, \qquad (8.24'а)$$

$$\frac{\partial t}{\partial x_\upsilon}\frac{\partial E_{\upsilon x}}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial E_{\upsilon x}}{\partial x}+\frac{\partial E_{\upsilon y}}{\partial y}+\frac{\partial E_{\upsilon z}}{\partial z}=\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho_\upsilon, \qquad (8.25'а)$$

$$\frac{\partial t}{\partial x_\upsilon}\frac{\partial H_{\upsilon x}}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial H_{\upsilon x}}{\partial x}+\frac{\partial H_{\upsilon y}}{\partial y}+\frac{\partial H_{\upsilon z}}{\partial z}=0. \qquad (8.26'а)$$

Остальные уравнения записываются аналогично. Далее, уравнения (8.23а), (8.24а), (8.25а) и (8.26а) преобразуются с использованием зависимости между переменными, которые следуют из других уравнений. Сложение выражений (8.23'а) с (8.25'а), умноженным на $\upsilon\varepsilon/c$, дает

$$\frac{\varepsilon}{c}\cdot\left(\frac{\partial t}{\partial t_\upsilon}+\upsilon\frac{\partial t}{\partial x_\upsilon}\right)\cdot\frac{\partial E_{\upsilon x}}{\partial t}+4\pi\frac{\rho_\upsilon u_{\upsilon x}}{c}=\frac{\partial}{\partial y}\left(H_{\upsilon z}-\frac{\upsilon\varepsilon}{c}E_{\upsilon y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(H_{\upsilon y}+\frac{\upsilon\varepsilon}{c}E_{\upsilon z}\right). \qquad (8.23"а)$$

Сложение (8.25'а) с (8.23'а), умноженным на $\upsilon/(c\varepsilon)$, дает

$$\frac{\partial E_{\upsilon x}}{\partial t}\left(\frac{\upsilon}{c^2}\cdot\frac{\partial t}{\partial t_\upsilon}+\frac{\partial t}{\partial x_\upsilon}\right)+\frac{\partial E_{\upsilon x}}{\partial x}\cdot\frac{1-\beta_\circ^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(E_{\upsilon y}-\frac{\upsilon}{c\varepsilon}H_{\upsilon z}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(E_{\upsilon z}+\frac{\upsilon}{c\varepsilon}H_{\upsilon y}\right)=\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho_\upsilon\left(1-\frac{\upsilon u_{\upsilon x}+\upsilon^2}{c^2}\right). \qquad (8.25"а)$$

Сложение (8.24'а) с (8.26'а), умноженным на $\upsilon\mu/c$, дает

$$\frac{\mu}{c}\cdot\left(\upsilon\frac{\partial t}{\partial x_\upsilon}+\frac{\partial t}{\partial t_\upsilon}\right)\frac{\partial H_{\upsilon x}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(E_{\upsilon y}-\frac{\upsilon\mu}{c}H_{\upsilon z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(E_{\upsilon z}+\frac{\upsilon\mu}{c}H_{\upsilon y}\right). \qquad (8.24"а)$$

Сложение (8.26',а) с (8.24',а) умноженным на $\upsilon\mu/c$, дает

$$\left(\frac{\upsilon}{c^2}\cdot\frac{\partial t}{\partial x_\upsilon}+\frac{\partial t}{\partial t_\upsilon}\right)\cdot\frac{\partial H_{\upsilon x}}{\partial t}+\frac{1-\beta_\circ^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{\partial H_{\upsilon x}}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(H_{\upsilon y}+\frac{\upsilon}{c\mu}E_{\upsilon z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(H_{\upsilon z}-\frac{\upsilon}{c\mu}E_{\upsilon y}\right)=0. \qquad (8.26"а)$$

Здесь $\beta_\circ=\upsilon/c$. Так как свести эти уравнения к соответствующим уравнениям для неподвижной системы в случае произвольных ε и μ затруднительно, то сведем их сначала для $\varepsilon=1$; $\mu=1$. Тогда $\beta=\upsilon/c=\beta_\circ$.

Последовательно сравнивая (8.23"a), (8.25"a), (8.24"a), (8.26"a) с уравнениями (8.23), (8.25), (8.24) и (8.26), написанными для соответствующих проекций, придем к выводу, что уравнения будут одинаковы, если выполняются следующие равенства:

$$\frac{\partial t}{\partial t_\upsilon}+\upsilon\frac{\partial t}{\partial x_\upsilon}=\sqrt{1-\beta_\circ^{\,2}}\,;\quad \frac{\upsilon}{c^2}\cdot\frac{\partial t}{\partial t_\upsilon}+\frac{\partial t}{\partial x_\upsilon}=0\,. \tag{8.29}$$

Разрешая уравнения (8.29) относительно неизвестных производных, получаем:

$$\frac{\partial t}{\partial t_\upsilon}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta_\circ^{\,2}}}\,;\quad \frac{\partial t}{\partial x_\upsilon}=-\frac{\upsilon}{c^2\sqrt{1-\beta_\circ^{\,2}}}\,. \tag{8.30}$$

Интегрируя уравнения (8.30), запишем соответственно

$$t=\frac{t_\upsilon}{\sqrt{1-\beta_\circ^{\,2}}}+C(x_\upsilon);\quad t=-\frac{\upsilon x_\upsilon}{c^2\sqrt{1-\beta_\circ^{\,2}}}+C(t_\upsilon)\,, \tag{8.31}$$

где $C(x_\upsilon)$ – константа интегрирования по t_υ, а $C(t_\upsilon)$ – по x_υ. Равенства (8.31) возможны, если с точностью до константы зависимость t от t_υ и x_υ будет следующая:

$$t=\frac{t_\upsilon-(\upsilon/c^2)x_\upsilon}{\sqrt{1-\beta_\circ^{\,2}}}\,. \tag{8.32}$$

Соотношением (8.32) определяется преобразование времени, которое необходимо, чтобы описание воздействий неподвижной системы тел преобразовать в описание воздействия движущейся. Чтобы найти преобразования для остальных переменных, подставим значения производных (8.30) в уравнения (8.23"a), (8.25"a), (8.24"a) и (8.26"a) и сравним с соответствующими уравнениями (8.23), (8.25), (8.24) и (8.26). При этом определяются две системы преобразования переменных.

Первая система преобразований

$$x=\frac{x_\upsilon-\upsilon t_\upsilon}{\sqrt{1-\beta_\circ^{\,2}}};\quad t=\frac{t_\upsilon-(\upsilon/c^2)x_\upsilon}{\sqrt{1-\beta_\circ^{\,2}}}\,; \tag{8.33}$$

$$u_x=\frac{u_{\upsilon x}}{1-\dfrac{\upsilon u_{\upsilon x}+\upsilon^2}{c^2}};\quad \rho=\rho_\upsilon\frac{1-\dfrac{\upsilon u_{\upsilon x}+\upsilon^2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta_\circ^{\,2}}}\,; \tag{8.34}$$

$$u_y=\frac{u_{\upsilon y}\sqrt{1-\beta_\circ^{\,2}}}{1-\dfrac{\upsilon u_{\upsilon x}+\upsilon^2}{c^2}};\quad u_z=\frac{u_{\upsilon z}\sqrt{1-\beta_\circ^{\,2}}}{1-\dfrac{\upsilon u_{\upsilon x}+\upsilon^2}{c^2}}; \tag{8.35}$$

$$E_x=E_{\upsilon x}\,,\quad H_x=H_{\upsilon x}; \tag{8.36}$$

$$E_y=\frac{E_{\upsilon y}-\dfrac{\upsilon}{c}\cdot H_{\upsilon z}}{\sqrt{1-\beta_\circ^{\,2}}};\quad H_y=\frac{H_{\upsilon y}+\dfrac{\upsilon}{c}\cdot E_{\upsilon z}}{\sqrt{1-\beta_\circ^{\,2}}}; \tag{8.37}$$

$$E_z=\frac{E_{\upsilon z}+\dfrac{\upsilon}{c}\cdot H_{\upsilon y}}{\sqrt{1-\beta_\circ^{\,2}}};\quad H_z=\frac{H_{\upsilon z}-\dfrac{\upsilon}{c}\cdot E_{\upsilon y}}{\sqrt{1-\beta_\circ^{\,2}}}\,. \tag{8.38}$$

Вторая система преобразований.

Она включает преобразования первой системы для координаты x и времени t (8.33) и преобразования для компоненты скоростей. Плотность заряда и компоненты напряженностей преобразуются следующим образом:

$$\rho=\rho_\upsilon\left(1-\frac{\upsilon u_{\upsilon x}+\upsilon^2}{c^2}\right); \tag{8.39}$$

$$E_x=\sqrt{1-\beta_\circ^{\,2}}\,E_{\upsilon x};\quad H_x=\sqrt{1-\beta_\circ^{\,2}}\,H_{\upsilon x}\,; \tag{8.40}$$

$$E_y=E_{\upsilon y}-\frac{\upsilon}{c}\cdot H_{\upsilon z};\quad H_y=H_{\upsilon y}+\frac{\upsilon}{c}\cdot E_{\upsilon z}\,; \tag{8.41}$$

$$E_z=E_{\upsilon z}+\frac{\upsilon}{c}\cdot H_{\upsilon y};\quad H_z=H_{\upsilon z}-\frac{\upsilon}{c}\cdot E_{\upsilon y}\,. \tag{8.42}$$

Этими системами преобразований можно было бы преобразовать и уравнения электродинамики при ε и μ, отличными от единицы, если бы единицы измерения H и E выбирались не для вакуума при $\varepsilon=\mu=1$, а для среды с ε и μ отличными от единицы . Тогда соотношение между электромагнитной системой единиц и системой CGSE определялось бы не c, а $c_1=c/\sqrt{\varepsilon\mu}$; в уравнения электродинамики входила бы c_1, а в преобразованиях $\beta_\circ$ заменило бы β.

Подведем некоторые итоги.

1. Если есть система заряженных тел с плотностью распределения зарядов $\rho\,(x, y, z)$ и скоростью движения $\vec{u}\,(x, y, z)$, то ее воздействие E на неподвижный единичный заряд и воздействие H на неподвижный единичный магнит описываются уравнениями электродинамики (8.23), (8.24), (8.25) и

(8.26), которые установлены измерением сил (закон Кулона, закон Био – Савара – Лапласа, закон индукции Фарадея).

2. Если эта система тел движется со скоростью $\vec{v}$ относительно объекта, то скорость движущихся зарядов становится равной $\vec{u}_1(x,y,x) = \vec{u}\,(x,y,z) + \vec{v}$ и ее воздействие на тот же объект описывается теми же уравнениями электродинамики, в которых $\vec{u}$ заменено $\vec{u}_1\,(x, y, z)$.

3. Воздействие движущейся системы электромагнитных тел можно описать системой уравнений (8.23), (8.24), (8.25) и (8.26), заменив их переменные согласно преобразованиям (8.33)-(8.38).

4. При известном воздействии, создаваемом неподвижной системой тел, можно рассчитать с помощью преобразований воздействие от движущейся системы тел.

5. Преобразование параметров, например, расстояний, времени, скорости и т.д. показывает, как должны они быть изменены, чтобы воздействие движущейся заряженной системы описать теми же уравнениями, что и воздействие неподвижной.

8.4. О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Для стационарной системы зарядов был осуществлен переход от уравнений Даламбера (8.1) и (8.2), описывающих воздействие движущихся зарядов, к уравнениям Лапласа (8.8) и (8.9), описывающим воздействие неподвижных заряженных тел. Для нестационарной электрической системы такой переход уже будет между уравнениями Даламбера, отличающимися плотностями токов.

В этих двух случаях напряженностями $\vec{E}$ описывались силы, обусловленные телами, заряд которых определяется плотностью электризации. Рассмотрим, чем определяется напряженность, если в уравнения (8.1) и (8.2) плотность ρ явно не входит. Уравнение Даламбера без правой части называется волновым уравнением. Если правая часть равна нулю, то согласно (4.6), плотность заряда ρ определяется следующими уравнениями:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{u_x}{c_1^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\,, \tag{8.43}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{u_y}{c_1^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\,, \tag{8.44}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{u_z}{c_1^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\,, \tag{8.45}$$

где u_x, u_y, u_z – компоненты скоростей движения зарядов. Уравнение (8.43) возможно при любых значениях независимых переменных, если

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = A_x\,; \quad \frac{u_x}{c_1^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} = -A_x\,, \tag{8.46}$$

где $A_x = A_x\,(x, y, z, t)$. Рассмотрим частный случай A_x = const. Тогда уравнения (8.46) интегрируются и могут быть записаны соответственно

$$\rho = A_x x + B_x\,; \quad \rho = -A_x \frac{c_1^2}{u_x} t + C_x\,, \tag{8.47}$$

где константы интегрирования B_x – не зависит от x, а C_x – не зависит от t. Два решения (8.47) можно записать в виде одного соотношения

$$\rho = A_x\,(x - \frac{c_1^2}{u_x} t\,) + D_x\,, \tag{8.48}$$

здесь D_x – константа интегрирования, которая не зависящая от x и y. Аналогичные решения получаем для уравнений (8.44) и (8.45) соответственно:

$$\rho = A_y\,(y - \frac{c_1^2}{u_y} t\,) + D_y\,, \tag{8.49}$$

$$\rho = A_z\,(z - \frac{c_1^2}{u_z} t\,) + D_z\,. \tag{8.50}$$

Легко убедиться, что решения (8.48)-(8.50) при $A_x = ku_x$, $A_y = ku_y$ и $A_z = ku_z$ записываются в виде одного выражения

$$\rho = k(\vec{r}\vec{u} - c_1^2 t\,) + \rho_0\,, \tag{8.51}$$

где ρ_0 = const.

Если электрическая система характеризуется плотностью заряда (8.51), то сила ее воздействия на единичный заряд относительно нее описывается уравнением Даламбера без правой части:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0\,. \tag{8.52}$$

Если эта электрическая система движется относительно единичного заряда со скоростью υ вдоль оси x, либо он движется со скоростью $(-\upsilon)$ относительно электрической системы, то ее воздействие на заряд будет другим. С помощью преобразований (8.33) мы можем его найти. Перепишем их, дополняя зависимостями для осей y и z:

$$x = \frac{x_\upsilon - \upsilon t_\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t = \frac{t_\upsilon - (\upsilon / c_1^2)x_\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y_\upsilon, \quad z = z_\upsilon\,. \tag{8.53}$$

Преобразования (8.53) отличаются от преобразований Лоренца (8.33) тем, что они записаны для скорости распространения воздействия в среде c_1, а не для скорости света в вакууме c. Выразим переменные с индексом "υ" через неиндексированные переменные:

$$x_\upsilon = \frac{x+\upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_\upsilon = \frac{t+(\upsilon/c_1^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y_\upsilon = y, \quad z_\upsilon = z\,. \tag{8.54}$$

Перейдем в волновом уравнении (8.52) к индексированным переменным. Так как в соответствии с (8.53), $x = x(x_\upsilon, t_\upsilon)$, а $t = t(x_\upsilon, t_\upsilon)$, то от дифференцирования по сложной функции можем перейти к дифференцированию по аргументам:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_\upsilon}\cdot\frac{\partial x_\upsilon}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t_\upsilon}\cdot\frac{\partial t_\upsilon}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_\upsilon}\cdot\frac{\partial x_\upsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t_\upsilon}\cdot\frac{\partial t_\upsilon}{\partial t}\,. \tag{8.55}$$

Дифференцируя выражения (8.54) и подставив их в (8.55), получаем соотношения между производными:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial}{\partial x_\upsilon} + \frac{\upsilon}{c_1^2}\frac{\partial}{\partial t_\upsilon}\right), \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\upsilon\frac{\partial}{\partial x_\upsilon} + \frac{\partial}{\partial t_\upsilon}\right). \tag{8.56}$$

Повторно дифференцируя (8.56), находим соотношения между вторыми производными:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{1-\beta^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_\upsilon}^2} + 2\frac{\upsilon}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t_\upsilon \partial x_\upsilon} + \frac{\upsilon^2}{c_1^4}\frac{\partial^2}{\partial {t_\upsilon}^2}\right), \tag{8.57}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{1}{1-\beta^2}\left(\upsilon^2\frac{\partial^2}{\partial {x_\upsilon}^2} + 2\upsilon\frac{\upsilon}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t_\upsilon \partial x_\upsilon} + \frac{\partial^2}{\partial {t_\upsilon}^2}\right), \tag{8.58}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial {y_\upsilon}^2}; \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial {z_\upsilon}^2}\,. \tag{8.59}$$

После подставки вторых производных в уравнение (8.52) оно преобразуется в такое же волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_\upsilon}{\partial {x_\upsilon}^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_\upsilon}{\partial {y_\upsilon}^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_\upsilon}{\partial {z_\upsilon}^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 \vec{E}_\upsilon}{\partial {t_\upsilon}^2} = 0\,. \tag{8.60}$$

При этом соотношение между $\vec{E}$ и $\vec{E}_\upsilon$ может быть любым линейным, не зависящим от переменных дифференцирования. Согласно (8.60), воздействие $\vec{E}_\upsilon$ движущейся со скоростью υ заряженной системы, плотность заряда которой в частном случае определяется выражением (8.51), будет иметь место в точках x_υ, y_υ, z_υ и в момент времени, смещенный по сравнению с воздействием неподвижной системы в соответствии с выражением (8.54).

Волновое уравнение (8.52) как линейное дифференциальное уравнение может иметь решение [24] с разделяющимися переменными

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x,y,z)e^{\pm i\omega t}\,. \tag{8.61}$$

После подстановки в (8.52) получаем

$$\Delta\vec{E}_0(x,y,z) + \frac{\omega^2}{c_1^2}\vec{E}_0(x,y,z) = 0\,.$$

Это уравнение Гельмгольца, которое в зависимости от граничных условий может иметь разные решения. В частном случае оно может иметь решение

$$\vec{E}_0(x,y,z) = \vec{E}_0 e^{-ikr}\,, \tag{8.62}$$

где $\vec{E}_0$ = const; $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n}$ – волновой вектор; $\vec{n} = \hat{\alpha}\vec{i} + \hat{\beta}\vec{j} + \hat{\gamma}\vec{k}$ – нормаль к плоскости, направляющие косинуса которой с осями x, y, z равны: $\hat{\alpha} = \cos(n\hat{x})$; $\hat{\beta} = \cos(n\vec{y})$; $\hat{\gamma} = \cos(n\hat{z})$.

С учетом (8.61) и (8.62) решение волнового уравнения запишется в виде

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}_0\cos[\omega(\pm t - (\hat{\alpha}x + \hat{\beta}y + \hat{\gamma}z)/c_1)]\,. \tag{8.63}$$

Подстановка (8.63) в (8.52) дает соотношение для направляющих косинусов

$$\hat{\alpha}^2 + \hat{\beta}^2 + \hat{\gamma}^2 = 1\,. \tag{8.64}$$

Из (8.63) видно, что при

$$\pm t - (\hat{\alpha}x + \hat{\beta}y + \hat{\gamma}z)/c_1 = \text{const} \tag{8.65}$$

значения напряженности $\vec{E}$ одинаковы на плоскости в любой момент t_1

$$\hat{\alpha}x + \hat{\beta}y + \hat{\gamma}z = \text{const} \pm c_1 t_1\,. \tag{8.66}$$

Если плоскость перпендикулярна к оси x, т.е. при $\hat{\alpha} = 1$ и $\hat{\beta} = \hat{\gamma} = 0$, то в произвольный момент времени координата x ее будет

$$x = x_0 \pm c_1 t\,. \tag{8.67}$$

В случае знака "+" плоскость постоянной напряженности E перемещается в направлении оси x (прямая волна) со скоростью c_1 .При знаке "-" плоскость перемещается в обратном направлении (обратная волна). Такую движущуюся плоскость называют плоской волной, а выражение (8.63) – уравнением плоской волны.

Так как период косинуса равен 2π, то из (8.63) следует, что одновременно воздействие $\vec{E}$ будет одинаковым на плоскостях, отстоящих друг от друга на расстояниях

$$\Delta x = \lambda = 2\pi c_1 / \omega, \tag{8.68}$$

где λ – длина волны.

В фиксированной точке в соответствии с (8.63) напряженность

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\omega(\pm t - x/c_1) \tag{8.69}$$

изменяется во времени в пределах ($-E_0$) $\le E \le E_0$ с периодом $T = 2\pi/\omega$. При этом в начальный момент ($t = 0$) значение $E = E_0 \cos\varphi_0$, где $\varphi_0 = -\omega x/c_1$ называют начальной фазой волны. Как видим, фаза волны по оси x изменяется.

Следует отметить, что хотя уравнение (8.63) называют уравнением волны и говорят, что волны распространяются, из него это не следует. Мы видим, что, в момент $t = 0$ во всех точках пространства существует воздействие $\vec{E}$. Но это воздействие изменяется по гармоническому закону и в разных фазах φ, которые, как следует из (8.69), зависят от координаты x. В таком случае параметр c_1 представляет скорость распространения фазы. Поэтому то, что мы называем волной не является волновым движением какого-то вещества или субстанции, подобного волнам на воде. Электромагнитная волна – это переменное воздействие в каждой отдаленной от рассматриваемого тела точке, которое будет испытывать помещенное в нее другое заряженное или намагниченное тело.

Плоская волна (8.63) является одним из возможных решений волнового уравнения (8.52). На ее примере хорошо видны особенности и свойства волнового процесса. Возможны и другие решения волнового уравнения. Их легко получают, выражая (8.52) в цилиндрических и сферических координатах [24]. Например, в сферических координатах уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \vec{E}}{\partial r} \right). \tag{8.70}$$

При замене $\vec{E} = \vec{A}/r$ оно преобразуется в одномерное по пространственной координате r

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial r^2}, \tag{8.71}$$

решение которого

$$A = A\cos\left[\omega(t \pm \frac{r}{c_1}) \right], \tag{8.72}$$

где $\vec{A}_0$ – константа

Здесь векторы $\vec{E}$ и $\vec{A}$ выражены в сферических координатах. С учетом (8.72) получаем решение в виде сферических волн:

$$E_r = \frac{A_{ro}}{r}\cos\left[\omega(t \pm \frac{r}{c_1}) \right], E_\varphi = \frac{A_{\varphi o}}{r}\cos\left[\omega(t \pm \frac{r}{c_1}) \right], E_\Theta = \frac{A_{\Theta o}}{r}\cos\left[\omega(t \pm \frac{r}{c_1}) \right]. \tag{8.73}$$

Итак, в отличие от плоских волн напряженность уменьшается с увеличением расстояния r от центра координат. Длина волны λ в этом случае будет наименьшим расстоянием между точками, в которых напряженность находится в одинаковой фазе.

8.5. АБЕРРАЦИЯ И ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА

Мы рассмотрели возможные решения волнового уравнения. Электромагнитные волны создаются разными способами, например при быстром изменении заряда на пластинах конденсатора. Пластины конденсатора соединяют с антенной и земной поверхностью и таким образом генерируют радиоволны. Более короткие волны образуются излучателем меньшего размера. Электромагнитные волны с длиной волны λ = 0,3 – 0,8 мкм являются светом и создаются в результате изменения заряда в пределах размеров атома. Форма этих волн отличается от плоских (8.63) и сферических (8.73). В конкретном случае точное выражение для волн может быть получено в результате решения уравнения Даламбера (4.6), при задании закона изменения ρ или скорости движения зарядов $\vec{u}(t)$, начальных значений напряженности $\vec{E}(x,y,z)$ и скорости ее изменения $\partial\vec{E}/\partial t = f(x,y,z)$.

Созданное переменной электрической системой $\rho(x,y,z,t)$ воздействие $\vec{E}$, распространяясь во всем пространстве с одинаковой скоростью c_1, на больших расстояниях r_s от электрической системы будет иметь свой передний фронт в виде сферической поверхности. Поэтому здесь могут быть использованы решения (8.73) для сферической волны. На малых расстояниях от r_s сферическая поверхность практически не отличается от плоскости, следовательно, в таком случае может быть использовано решение (8.63) для плоской волны.

Выше мы рассматривали решение волнового уравнения для воздействия неподвижной электрической системы $\rho(x,y,z,t)$. Найдем ее воздействие на движущийся относительно нее приемник в направлении оси со скоростью υ. Рассмотрим это воздействие на примере решения для плоских волн (8.63) методом преобразований. Подставляя в (8.63) замены (8.53) и записывая электрическую напряженность с индексом "υ", получаем следующее выражение:

$$\vec{E}_\upsilon = \vec{E}_{o\upsilon}\cos\left\{ \frac{1+\hat{\alpha}\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\omega\left[\pm t_\upsilon - \frac{x_\upsilon(\hat{\alpha}+\beta) + y_\upsilon\hat{\beta}\sqrt{1-\beta^2} + z_\upsilon\hat{\gamma}\sqrt{1-\beta^2}}{c_1(1+\hat{\alpha}\beta)} \right] \right\}. \tag{8.74}$$

Введем обозначения:

$$\omega_\upsilon = \omega\frac{1+\hat{\alpha}\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{8.75}$$

$$\hat{\alpha}_\upsilon = \frac{\hat{\alpha}+\beta}{1+\hat{\alpha}\beta}, \tag{8.76}$$

$$\hat{\beta}_\upsilon = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\hat{\alpha}\beta}\hat{\beta}, \tag{8.77}$$

$$\hat{\gamma}_\upsilon = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\hat{\alpha}\beta}\hat{\gamma}. \tag{8.78}$$

Нетрудно убедиться, что $\hat{\alpha}_\upsilon^2+\hat{\beta}_\upsilon^2+\hat{\gamma}_\upsilon^2=1$, т.е. $\hat{\alpha}_\upsilon,\hat{\beta}_\upsilon,\hat{\gamma}_\upsilon$ представляют собой направляющие косинусы нормали к плоскости. Тогда уравнение для плоской волны (8.74), которое выражает воздействие источника на движущийся относительно него приемник, запишется в виде

$$\vec{E}_\upsilon(x_\upsilon,y_\upsilon,z_\upsilon,t_\upsilon)=\vec{E}_{o\upsilon}\cos\omega_\upsilon[\pm t_\upsilon-(\hat{\alpha}_\upsilon x_\upsilon+\hat{\beta}_\upsilon y_\upsilon+\hat{\gamma}_\upsilon z_\upsilon)/c_1], \tag{8.79}$$

где скорость υ положительна при сближении приемника и источника. Приемник будет воспринимать воздействие также в виде плоской волны, но другой частоты ω_υ углы наклона волновой плоскости $\hat{\alpha}_\upsilon,\hat{\beta}_\upsilon,\hat{\gamma}_\upsilon$ будут различаться. Выражение (8.75) описывает известный эффект Доплера, а соотношения (8.76) – (8.78) – явление аберрации. Величина воздействия $\vec{E}_{o\upsilon}$, как следует из преобразований (8.14) – (8.16) или (8.17) – (8.19), с учетом преобразований заряда будет изменяться следующим образом:

$$E_{ovx}=E_{ox},\ E_{ovy}=\frac{E_{oy}}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad E_{ovz}=\frac{E_{oz}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{8.80}$$

т.е. она будет усиливаться поперек движения приемника.

В литературе [44] известны попытки экспериментальной проверки эффекта Доплера (8.75). Однако этот вопрос до сих пор был неясен в теоретическом плане: имеется до десятка разных формул, некоторые из них дают взаимно противоположные результаты.

На примере соотношений для плоской волны рассмотрим воздействие движущегося источника сферических волн на неподвижный приемник (рис. 8.2). Как уже отмечалось, на больших расстояниях от источника можно воспользоваться результатами для плоской волны. При скорости источника, направленной на приемник (см. рис. 8.2,*а*), $\hat{\alpha}=1;\hat{\beta}=\hat{\gamma}=0$ и согласно (8.75) – (8.78) имеем

$$\omega_\upsilon=\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\omega,\ \hat{\alpha}_\upsilon=1,\ \hat{\beta}_\upsilon=\hat{\gamma}_\upsilon=0. \tag{8.81}$$

Как видим, направление наблюдения источника не изменяется, только увеличивается частота воспринимаемых волн. При приближении к скорости c_1 она стремится к бесконечности. В случае удаления источника от приемника $\hat{\alpha}=-1$ и частота уменьшается:

$$\omega_\upsilon=\sqrt{(1-\beta)/1+\beta}\,\omega, \tag{8.82}$$

а с приближением к скорости c_1 стремится к нулю.

При скорости источника, перпендикулярной направлению на приемник (см. рис. 8.2,*б*) $\hat{\alpha}=\hat{\gamma}=0,\ \hat{\beta}=1$ и согласно (8.75) – (8.76) имеем

$$\omega_\upsilon=\omega/\sqrt{1-\beta^2};\ \hat{\beta}_\upsilon=\sqrt{1-\beta^2}\,\hat{\beta}. \tag{8.83}$$

Здесь циклическая частота излучения увеличивается и с приближением υ к c_1 стремится к бесконечности. Это называют поперечным эффектом Доплера.

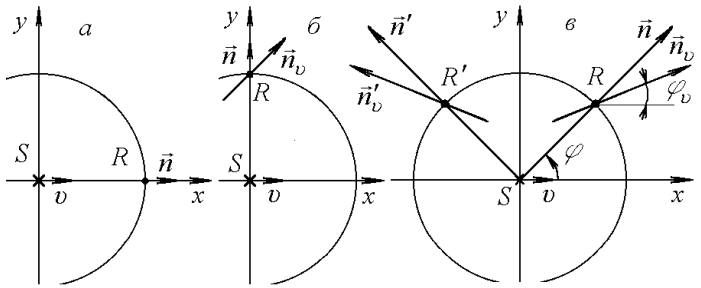


Рис. 8.2. Воздействие движущегося источника излучения *S* на неподвижный приемник *R*.
а – движение на приемник; *б* – движение перпендикулярно приемнику;
в – движение под углом к приемнику.

Так как $\hat{\beta}_\upsilon$ уменьшается с увеличением скорости, то угол наклона нормали $\vec{n}_\upsilon$ к оси *y* увеличивается, т.е. линия визирования на движущийся источник отклоняется от вертикали.

В наклонном случае движения выразим параметры излучения движущегося источника через угол φ между линией визирования на приемник и скоростью источника (см. рис. 8.2,*в*). Так как $\hat{\alpha}=\cos\varphi,\ \hat{\beta}=\sin\varphi$, а $\hat{\gamma}=0$, то в соответствии с (8.75) – (8.78) запишем

$$\omega_\upsilon=\omega\frac{1+\beta\cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{8.84}$$

$$\varphi_\upsilon=\arccos\hat{\alpha}_\upsilon=\arccos\frac{\beta+\cos\varphi}{1+\beta\cos\varphi}. \tag{8.85}$$

На рис. 8.2,*в* показаны углы наблюдения φ_υ движущегося источника и нормали n_υ к наблюдаемым поверхностям излучения при двух положениях приемника: R и R'. С приближением υ к c_1 нормаль наблюдаемого излучения n_υ отдаляется от вертикали.

8.6 СКОРОСТЬ СВЕТА МЕЖДУ ДВИЖУЩИМИСЯ ТЕЛАМИ

Из уравнения Даламбера и волнового уравнения мы получаем решения для воздействия, которые зависят от c_1 . Со скоростью c_1 перемещается по пространству фаза волны. Если произойдут изменения воздействующего тела, то они будут распространяться со скоростью c_1 . Поэтому ее называют скоростью распространения электромагнитного воздействия. Величина c_1 зависит от диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостей среды между взаимодействующими телами. Если между ними имеются разные среды, то в каждой из них будет скорость распространения, определяемая свойствами ε и μ .

При движении приемника и источника взаимодействие между ними зависит только от их относительной скорости, поэтому электромагнитные волны отличаются от акустических или волн на воде. Источник акустических волн, например гудок неподвижного локомотива, в т. S (рис. 8.3,*а*) в момент времени t издает звуковые колебания частотой f, которые распространяются в неподвижном воздухе со скоростью a = 340 м/с. Через $\Delta t = l/a$ звук достигает приемника R и за это время будет издано $n = f\,\Delta t$ колебаний. Расстояние между ними, т.е. длина волны, $\lambda = l/n = a/f$. Так как эти колебания распространяются со скоростью a, то в приемник они будут поступать с частотой $f_R = a/\lambda = f$.

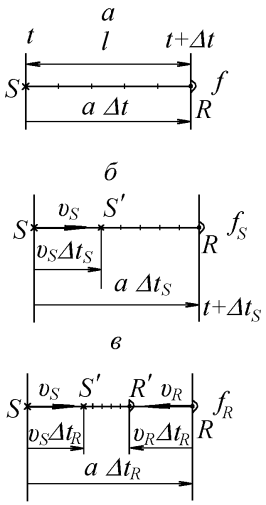


Рис. 8.3. Распространение акустических волн в среде, в которой источник S движется со скоростью υ_S, а приемник R со скоростью υ_R в направлении сближения.

Если локомотив S сближается с приемником со скоростью υ_R (см. рис. 8.3,б), то изданные гудком колебания, распространяясь со скоростью a в среде, будут также услышаны приемником через $\Delta t = l/a$. Подчеркнем, что скорость звука не изменилась, так как он распространяется в среде и от движения источника не зависит. За время Δt источник создает $n = \Delta t f$ колебаний, пройдет расстояние $\upsilon_S \Delta t$ и займет положение S'. Таким образом колебания распределятся на длине $l - \upsilon_S\,\Delta t = (a - \upsilon_S)\,\Delta t$. Тогда расстояние между ними $\lambda = (a - \upsilon_S)\,\Delta t/n = (a - \upsilon_S)/f$. Так как колебания распространяются со скоростью a относительно приемника, то частота звука, воспринимаемого приемником, будет

$$f_s = \frac{a}{\lambda} = \frac{a}{a - \upsilon_S} f \ . \qquad (8.86)$$

Если еще приемник (см.рис. 8.3,*в*) движется к источнику со скоростью υ_R относительно среды, то он приближается навстречу распространяющемуся звуку, т.е. скорость звука относительно приемника составит

$$a_R = a + \upsilon_R \ . \qquad (8.87)$$

Звук достигнет приемника за время $\Delta t_R = l/(a + \upsilon_R)$, за время Δt_R источник создаст $n_R = \Delta t_R\, f$ колебаний, пройдет расстояние $\upsilon_S\,\Delta t_R$ и займет положение R'. Колебания расположатся на длине $l - (\upsilon_S + \upsilon_R)\,\Delta t_R$ и расстояние между ними будет

$$\lambda_R = [l - (\upsilon_s + \upsilon_R)\Delta t_R]/(\Delta t_R\, f)\,,$$

т.е.

$$\lambda_R = \frac{a - \upsilon_S}{f} \ . \qquad (8.88)$$

Такие длины волн воспринимаются со скоростью a_R , поэтому частота воспринимаемого звука

$$f_R = \frac{a_R}{\lambda_R} = \frac{a + \upsilon_R}{a - \upsilon_s} f \ . \qquad (8.89)$$

Эти соотношения справедливы и при движении тел в воде, например при движении создающего волны корабля и воздействия их на движущуюся лодку. В соответствии с (8.89) воздействие волн на лодку зависит от скорости корабля υ_S и скорости лодки υ_R .

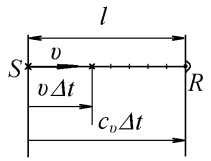


Рис. 8.4. Распространение электромагнитных колебаний между относительно движущимися источником S и приемником R.

Взаимодействие электромагнитных объектов зависит только от их относительной скорости. Если объекты неподвижны относительно друг друга, то электромагнитные волны распространяются между ними со скоростью c_1 независимо от того, движутся объекты относительно среды или нет. Об этом свидетельствуют эксперименты, из которых следует уравнение Даламбера (3.28). Во-первых: магнит наводит ЭДС в проводнике только при их относительном движении; во-вторых, движущийся заряд эквивалентен току и создает воздействие на магнит, которое зависит от их относительной скорости. Взаимодействие электромагнитных объектов, например катушки с магнитом, не зависит от того, что движется, а что покоится. Оно определяется их относительной скоростью.

С этих позиций рассмотрим распространение света между движущимся источником и приемником. Будем считать, что относительное расстояние l между источником S и приемником R электромагнитное воздействие проходит со скоростью c_υ , которая зависит от скорости υ их относительного движения (рис. 8.4). Тогда время распространения составит $\Delta t = l/c_\upsilon$. За это время источник создает количество колебаний $n = f\,\Delta t = f\,l/c_\upsilon$, а расстояние между источником и приемником станет $l - \upsilon\Delta t$. На этом расстоянии расположится n колебаний, поэтому расстояние между ними, то есть длина волны, будет

$$\lambda = (l - \upsilon\Delta t)/n = (l - \upsilon\Delta t)c_\upsilon/(f\,l) = (1 - \beta_\upsilon)c_\upsilon/f\ ,$$

где

$$\beta_\upsilon = \upsilon/c_\upsilon\ . \qquad (8.90)$$

Так как колебания относительное расстояние между источником и приемником будут проходить со скоростью c_υ , то приемник будет воспринимать их с частотой

$$f_\upsilon = \frac{c_\upsilon}{\lambda} = \frac{f}{1-\beta_\upsilon}\ . \qquad (8.91)$$

В этом выражении неизвестна скорость света c_υ , которая входит в приведенную скорость β_υ. Из уравнений электродинамики мы получили циклическую частоту колебаний, воспринимаемую приемником в виде (8.84), откуда частота колебаний при сближении источника и приемника при $\varphi = 0$ запишется

$$f_\upsilon = f\,\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\ . \qquad (8.92)$$

Выражения (8.91) и (8.92) определяют частоту колебаний, воспринимаемых приемником, которая рассчитана разными методами. Исключая из них величину f_υ, получаем следующее выражение для приведенной скорости распространения электромагнитных волн между сближающимися с приведенной скоростью β источником и приемником:

$$\bar{c}_\upsilon = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta-\sqrt{1-\beta^2}}\ , \qquad (8.93)$$

где

$$\bar{c}_\upsilon = c_\upsilon/c_1\ . \qquad (8.94)$$

В случае удаляющихся приемника и источника $\beta < 0$. При $\beta \to 0$ предел выражения (8.93) дает $\bar{c}_\upsilon = 1$, т.е. при отсутствии движения источника относительно приемника свет распространяется с обычной скоростью c_1. При β = 1 скорость c_υ = 1, т.е. в случае движения приемника или источника со световой скоростью фронт колебаний движется совместно с движущимся объек-

том и приемник воспримет эти колебания, когда источник поравняется с ним. При сверхсветовой скорости $\beta > 1$, величина $\bar{c}_\upsilon$ мнимая, т.е. световые колебания не достигают приемника. Зависимость (8.93) представлена на рис. 8.5. При β = 0.6 и 0.8 $\bar{c}_\upsilon$ = 1.2. Максимальное значение находится при $\beta = 1/\sqrt{2}$. Наибольшая скорость распространения света между движущимися объектами $\bar{c}_{\upsilon\max} = 0{,}5(\sqrt{2}+1) = 1{,}207$.

При малых скоростях величиной β^2 в знаменателе (8.93) можно пренебречь, тогда получаем

$$\bar{c}_\upsilon = 1 + \beta\ . \qquad (8.95)$$

Этот результат совпадает со случаями движения источника или приемника колебаний в среде. Соотношение (8.95) свидетельствует, что при малых скоростях скорость света складывается с относительной скоростью υ сближения источника и приемника и вычитается, если они удаляются друг от друга. Как следует из графика на рис. 8.5, это свойство справедливо при β < 0.3, а приближенно им можно пользоваться до b < 0.6. При больших скоростях β необходимо учитывать точную зависимость (8.93) для скорости распространения электромагнитных колебаний.

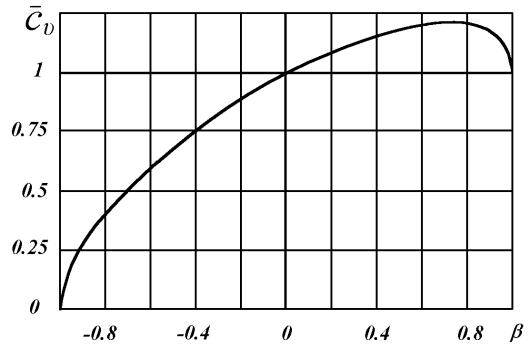


Рис. 8.5. Приведенная скорость света $\bar{c}_\upsilon = c_\upsilon/c_1$ между телами, движущимися с приведенной скоростью β друг относительно друга.

При удалении источника от приемника ($\beta < 0$), скорость света между ними меньше c_1. При удалении со световой скоростью скорость распространения света между источником и приемником становится равной нулю. Этот результат имеет важное значение для космологии. Согласно гипотезе "большого взрыва" далекие галактики удаляются от нас со скоростью близкой к скорости света. Скорость распространения света от них c_υ может быть очень малой, поэтому время, необходимое для распространения света $t_R = L/c_\upsilon$, где L – расстояние до галактики, оказывается значительно больше времени, прошедшего с момента "взрыва" $t_S = L/c$. То есть мы видим галактику, которой еще не было. Это противоречие является серьезным испытанием гипотезы "большого взрыва".

Следует отметить, что введенная нами величина c_υ не является обычной скоростью и ее нельзя складывать со скоростями движения тел. Она связывает расстояние между относительно движущимися источником и приемником и промежуток времени между созданием колебаний и их приходом(см.рис. 8.4). При этом расстояние l рассматривается в момент излучения

колебаний. Эта величина характеризует время распространения воздействия между двумя телами. Между величиной c_υ и скоростью звука a, или скоростью распространения волн на воде, нельзя проводить аналогию. В последних случаях имеется вещественная среда, движение которой можно наблюдать и измерять и относительно которой можно фиксировать движение тел. В случае электромагнитного взаимодействия такой среды нет (она не обнаружена). Следовательно, нельзя величину c_υ воспринимать как скорость каких-то материальных объектов.

При малых скоростях движения источника относительно приемника в соответствии с (8.95) их скорость геометрически складывается со скоростью распространения электромагнитных колебаний. При сближении источника с приемником со скоростью υ, свет между ними распространяется со скоростью $c_1 + \upsilon$, а при удалении свет достигает приемника со скоростью $c_1 - \upsilon$. Это подтверждается при наблюдении затенения Юпитером спутника Ио с разных точек орбиты Земли - при удалении Земли от Юпитера и приближении к нему. Благодаря разности наблюдаемых времен затенения Ио астроном Олаф Ремер в 1676 году определил скорость света [47,48]. В 1969 Б. Уоллес [122] обратил внимание на то, что при зондировании Венеры, скорость радиоволн складывается со скоростью Венеры относительно Земли.

В экспериментах Майкельсона [4] и других исследователей приемник и источник не двигались друг относительно друг друга, поэтому там не могла быть обнаружена разница в скорости света. Как видим, принцип постоянства скорости света при относительном движении приемника и источника, положенный в основу теории относительности, является несостоятельным.

8.7. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ЕГО ЗНАЧЕНИЕ

Этот принцип является одним из оснований теории относительности. Существуют разные его определения и разные понимания [71]. Для примера приведем формулировки, использованные учеными разной ориентации в дискуссии по теории относительности. В.И. Секерин привел определение [48] из книги Ландсберга "Оптика": "Все процессы природы протекают одинаково в любой инерциальной системе отсчета". Инерциальная система отсчета – это система тел, которая движется по инерции, т.е. без ускорения. А.М. Шалагин [73] считает, что более верное определение принципа относительности дано в учебнике [26]: "...все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета". Второе определение допускает неодинаковость процессов в разных системах, но накладывает требования на законы, описывающие эти процессы. Они должны быть одинаковы. Как мы показали, именно это положение использовано в теории относительности. Отличающиеся воздействия между относительно движущимися телами и покоящимися описаны одинаковыми выражениями. Правда, здесь совершен отход

от принципа относительности, так как рассмотрены взаимодействия не внутри инерциальной системы, а между разными системами.

Несмотря на разные формулировки принципа относительности суть ее заключается в том, что равномерное и прямолинейное движение не должно приводить к каким-либо изменениям внутри системы. Классической иллюстрацией принципа является каюта судна или купе поезда, движущиеся с неизменной скоростью. Если окна их закрыты, если они герметичны, если они снабжены непроницаемым экраном для электрического воздействия, то можно согласиться с такой формулировкой принципа относительности никакими известными опытами нельзя определить: движется каюта или покоится. Но когда в окна видны окружающие предметы, когда сквозь купе проходит воздушный поток, или свет какого-то источника или радиоволны принимаются в каюте, когда в купе находятся заряды или токи, могущие взаимодействовать с зарядами или токами, находящимися на земле, то по каждому из этих явлений можно определить движение наблюдателя, величину скорости и ее направление.

Итак, приведенная формулировка принципа относительности справедлива для системы материальных тел, которая не взаимодействует с телами другой системы, относительно которой она движется. Из условия отсутствия взаимодействия автоматически вытекает принцип относительности, ибо поведение тел движущейся системы будет таким же, как и в покоящейся системе, так как на них других воздействий нет. При этом необходимо заметить, что принцип относительности будет выполняться и для ускоренной системы материальных тел, изолированной от внешних воздействий. Например, в свободно падающем лифте или в спутнике, на планете и т.д. все движения происходят так, как если бы они покоились, а гравитационных воздействий не оказывалось. В этом случае изоляция от гравитационного поля тел системы заключается в том, что приобретенная скорость от него всеми телами одинакова и она не изменяет картины движений объектов системы относительно друг друга.

Принцип относительности имеет только исторический интерес. Он появился при разработке описания взаимодействий с помощью сил. Тогда возникали вопросы по разным особенностям движения и взаимодействия тел. Например, был введен близко связанный с ним закон инерции, т.е. первый закон механики. Согласно ему тела, на которые не действуют силы, сохраняют покой или прямолинейное и равномерное движение. Другими словами, поведение тел не будет иметь различий, по которым можно определить их движение.

По-видимому, Э. Мах впервые обратил внимание на то, что многие наши законы и принципы являются таковыми лишь в силу наших определений. Так, по поводу первого и второго законов механики, введенных И. Ньютоном в его труде "Математические начала натуральной философии", Э. Мах сказал следующее [36]: "Не трудно заметить, что первый и второй законы даны уже в предыдущих определениях силы. Согласно этим определениям, без силы нет и ускорения, а, следовательно, есть только покой или прямоли-

нейное и равномерное движение. Далее представляет собой совершенно ненужную тавтологию, после того как ускорение определено, как мера силы, еще раз сказать, что изменение движения пропорционально силе".

Возвратимся к принципу относительности. После нашего определения воздействия (см. гл. 2) как ускорения тела и определения силы как одной из меры воздействия не возникает проблем, которые требовали бы применения принципа относительности. Без него ясно: если тела движутся равномерно и прямолинейно и на них не оказывается воздействие, то они будут вести себя так, как будто на них воздействие не оказывается, т.е. по одному поведению тел, без связи с другими телами, мы не сможем сказать движутся они или покоятся. Наша задача заключается в выявлении воздействий на рассматриваемое тело и их учете, а не в слепом подчинении принципу относительности или другим принципам.

ГЛАВА 9

ОКОЛОСВЕТОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ВНУТРИ "ЧЕРНЫХ ДЫР"

9.1. ПОНЯТИЕ "ЧЕРНОЙ ДЫРЫ" КАК СООТНОШЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрим воздействие притягивающего центра на удаляющуюся от него по радиусу частицу, имеющую скорость υ_0 на радиусе R_0 . Определим величину радиуса, при котором частица оторвется от притягивающего центра. Для взаимодействия по классическому закону согласно (4.83) при $R\to\infty$ и скорости $\upsilon\to 0$, имеем

$$R_0 = -\frac{2\mu_1}{\upsilon_0^2}. \qquad (9.1)$$

Такое взаимодействие возможно, если радиус притягивающего центра $R_c < R_0$. Если скорость частицы υ_0 равна скорости света, то радиус (9.1) в ОТО называют гравитационным:

$$R_g = -\frac{2\mu_1}{c_1^2}. \qquad (9.2)$$

Частицы со световой скоростью на радиусах равных и больших R_g оторвутся от притягивающего центра, а частицам, находящимся на $R_0 < R_g$, чтобы оторваться необходимо иметь сверхсветовую скорость. Согласно (4.83) максимальный радиус, на который частицы со световой скоростью смогут удалиться от притягивающего центра при $\upsilon_r(R_{max}) = 0$, будет

$$R_{max} = \frac{R_g}{R_g / R_0 - 1}. \qquad (9.3)$$

Частицы достигают R_{max} при нулевой скорости, затем возвращаются к притягивающему центру и падают на него.

В рамках ОТО представлялось, что свет состоит из частиц, на которые тяготение действует так же, как и на обычные весомые тела. Поэтому при радиусе звезды $R_c < R_g$ частицы света, удаляющиеся с ее поверхности, не смогут выйти из сферы радиусом R_{max} , и такая звезда на расстояниях больших R_{max} от нее будет ненаблюдаемой. То есть на небосводе она будет выглядеть "черной дырой".

Мы рассмотрели чисто радиальное движение. При орбитальном движении частицы с кинематическим моментом h гравитационный радиус R_g представляет радиус перицентрия параболической траектории $\alpha_1 = -0.5$ (см. определение α_1). То есть световая скорость является второй космической скоростью на этом радиусе. Следовательно, при любом движении частицы со световой скоростью на радиусах $R < R_g$ она не сможет оторваться от притягивающего центра. После подстановки значения μ_1 в (9.2) гравитационный радиус согласно (4.64) при гравитационном воздействии принимает вид

$$R_{gg} = -\frac{2G(m_1+m_2)}{c_1^2}, \qquad (9.4)$$

и согласно (107) при электрическом:

$$R_{ge} = -\frac{2q_1q_2(m_1+m_2)}{c_1^2 m_1 m_2}. \qquad (9.5)$$

Мы рассматривали вопрос о "черной дыре" на основе классического взаимодействия. При воздействии с учетом конечной скорости его распространения, по аналогии с (4.58), сила тяготения будет определяться законом

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2(1-\beta^2)\vec{R}}{\left\{R_{12}^2 - [\vec{\beta}\times\vec{R}_{12}]^2\right\}^{3/2}}. \qquad (9.6)$$

В данном случае частица, имеющая скорость света, как мы уже неоднократно показывали, движется без изменения скорости. Поэтому она уйдет от притягивающего центра на бесконечность с той же скоростью света. При этом взаимодействии, согласно (4.80), при начальной скорости υ_0 , частица уйдет в бесконечность, если начальный радиус

$$R_0 = -\frac{2\mu_1}{c_1^2\ln(1-\beta_0^2)} = -\frac{R_g}{\ln(1-\beta_0^2)}. \qquad (9.7)$$

При малых β_0 формула (9.6) совпадает с (9.1). Однако с приближением начальной скорости к скорости света ($\beta_0\to 1$) радиус $R_0\to 0$, т.е. световые частицы с поверхности тела любого радиуса будут уходить от притягивающего центра на бесконечность. Поэтому такое тело не будет представляться "черной дырой".

Для вывода о существовании "черных дыр" необходимо выполнение, как минимум, двух условий. Во-первых, частицы света должны представлять

собой весомые частицы. Как мы показали в гл. 8, свет является воздействием, а не телом. Следовательно, он не может быть представлен в виде частиц света. Во-вторых, необходимо знать скорость гравитационного воздействия. В настоящее время нет экспериментальных данных о световой скорости его распространения, а значит, нет никаких оснований для утверждения о существовании "черных дыр". Тем не менее рассмотрим, в каких ситуациях при разных гипотетических постановках возможны "черные дыры" (ЧД):

Природа света	Скорость распространения гравитационного воздействия	
	Бесконечная	Световая
Весомые частицы	ЧД	–
Электромагнитное воздействие	–	–

Из приведенной таблицы видно, что "черные дыры" возможны только при классическом законе тяготения. Так как в общей теории относительности принята световая скорость тяготения, то введение "черных дыр" в ее рамках является безусловной ошибкой [117] при любых гипотетических постановках.

В связи с этим мы рассматриваем понятие "черная дыра" не как некоторый объект природы, а как определенное соотношение параметров в виде радиуса R_g. Будем называть его световым радиусом, так как притягивающаяся из бесконечности частица при классическом законе взаимодействия, достигнув этого радиуса, приобретает скорость света c_1 .

9.2. ОБЪЕКТЫ МИКРО- И МАКРОМИРА КАК "ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ"

Если радиус притягивающего центра $R_c < R_g$, то движение притягиваемой частицы может проходить внутри "черной дыры", т.е. радиус перицентрия орбиты может быть $R_p < R_g$. Это соответствует параметру $\alpha < -1$. Одна из таких траекторий при $\alpha = -1.12$ (см. рис. 5.5) была представлена в гл. 5. Рассматривая взаимодействие элементарных частиц, можно увидеть, что параметр α может быть меньше (-1). Например, если радиус перицентрия будет равен радиусу протона $R_p = R_{pr} = 2.817 \cdot 10^{-13}$ см., то, в соответствии с (9.5) параметр взаимодействия протона с электроном $\alpha = -1.956$. Существуют разные представления о размерах элементарных частиц, например авторы [83] приводят следующее значение для радиуса протона $R_{pr} = 1.023 \cdot 10^{-16}$ см. В этом случае параметр взаимодействия может достичь величины $\alpha = -2754$.

В далеком космосе наблюдается множество объектов, свойства которых объясняют большой массой и малыми размерами. В настоящее время их интерпретируют как "черные дыры" или нейтронные звезды. Широко известно, что существуют звезды разной плотности. Значение плотности изменяется в больших диапазонах и неизвестны пределы ее ограничения. Возможны астрономические объекты радиусом, меньшим R_g во много раз, т.е. с параметром $\alpha << -1$. Если гравитационное воздействие распространяется с конечной скоростью, то воздействие таких объектов будет подчиняться закону (9.6). Поэтому особенности движения тел вокруг них, если они будут известны, позволят определить скорость распространения тяготения.

Представленные примеры из микро- и макромира показывают, что исследование движений при значениях параметра взаимодействия $\alpha < -1$ представляет значительный интерес, поэтому ниже оно будет выполнено. В гл. 5 мы рассмотрели возможные траектории при вариации параметра траектории $-1 \le \alpha_1 \le 0$ и приведенной скорости в перицентрии $0 \le \beta_0 \le 1$. Было установлено три типа траекторий в зависимости от значения β_p по отношению к параметру β_{pc} , определяемому соотношением (5.41): 1) досветовые траектории при $\beta_p < \beta_{pc}$; 2) траектории захвата частицы на круговую орбиту при $\beta_p = \beta_{pc}$; 3) траектории при световой скорости в перицентрии $\beta_p \to 1$. В связи с тем, что при $\beta_p \to 1$ радиальная скорость (5.39) имеет особенность для расчета траекторий третьего типа, мы использовали радиальную скорость (5.46), нормированную к параметрам в промежуточной точке: R_0 , υ_{t0} . Как и в гл. 5, при $\alpha < -1$ уравнения (5.2) и (5.46), а также (5.16), интегрируются на двух участках: $\overline{R} > 1$ и $\overline{R} < 1$. Значения параметра траектории а варьировались следующим образом: $\alpha_1^0 = -2; -4; -10$. Параметр траектории α_1^0 , приведенный к скорости в перицентрии, т.е. к световой, определяется согласно (5.47), а параметр взаимодействия, в соответствии с (5.45) равен

$$\alpha = 2\,\alpha_1 . \qquad (9.8)$$

Значения приведенной тангенциальной скорости β_{t0} варьировались так: $\beta_{t0} = 0.9; 0.7; 0.5; 0.3; 0.1$. Нижнее значение β_{t0} задавалось таким, чтобы $\alpha < -1$. Поэтому все траектории, представленные здесь, отличаются от траекторий в гл. 5 и в работах [59, 60], где они рассчитывались при $\alpha \ge -1$.

Значения приведенной радиальной скорости варьировались так: $\beta_{r0} = 0; 0.1; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9$. Значение $\beta_{r0} = 0$ соответствует помещению начальной точки в апоцентрий, поскольку интегрирование ведется от $\overline{R} = 1$ до $\overline{R} = \beta_{t0}$. Это будет конечная траектория с наименьшим радиусом апоцентрия. С дальнейшим увеличением β_{r0} радиус апоцентрия возрастает. Кроме участка интегрирования $1 \ge \overline{R} \ge \beta_{t0}$ появляется участок $1 \le \overline{R} \le \overline{R}_a$, где радиус апоцентрия $\overline{R}_a$ определяется из условия $\upsilon_r^0 = 0$. С дальнейшим увеличением β_{t0} радиус апоцентрия стремится к бесконечности. Из условия $\lim_{R\to\infty} \overline{\upsilon}_r^0 = 0$, согласно (5.46), значение β_{r0} запишется

$$\beta_{rp} = 1 - \beta_{to}^2 - \exp\frac{2\alpha_1^0 \beta_{t0}^2}{\sqrt{1-\beta_{t0}^2}} . \qquad (9.9)$$

При радиальной скорости $\beta_{r0} = \beta_{rp}$ траектория становится параболовидной. Следует отметить, что выражение (9.9) идентично выражению (5.50). С дальнейшим увеличением β_{r0} траектории становятся гиперболовидными и при $\beta_{r0} = \sqrt{1-\beta_{t0}^2}$ они вырождаются в прямую линию, по которой движутся частицы со световой скоростью.

После интегрирования результаты приводились к параметрам в перицентрии. Расчеты выполнялись с помощью пакета MATHCAD. Пример программы приведен в Приложении 3, а рассчитанные траектории – в Приложении 4.

9.3. ТРАЕКТОРИИ ПРИ ВАРИАЦИИ РАДИАЛЬНОЙ СКОРОСТИ

Как мы уже отмечали, при интегрировании на участке $\overline{R} < 1$ при уменьшении $\overline{R}$ радиальная скорость (5.46) уменьшается и становится равной нулю при $\overline{R} = \beta_{t0}$, т.е. эта точка является перицентрием, радиус которого

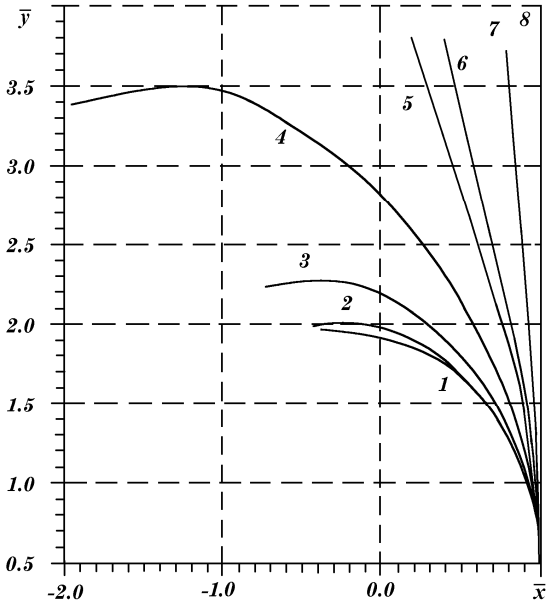
$$R_p = R_0\beta_{t0} = R_0 v_{t0}/c_1 \ . \qquad (9.10)$$

Так как все эти траектории подчиняются закону сохранения кинетического момента (4.66) $h = R_0 v_{t0} = R_p v_p$, то скорость в перицентрии можно записать

$$v_p = v_{t0} R_0 / R_p \qquad (9.11)$$

После подстановки сюда радиуса перицентрия из (9.10) получаем световую скорость частицы в перицентрии $v_p = c_1$.

Изменения параметров α_{10}, β_{t0} в рассмотренных диапазонах дали изменения параметра взаимодействия в области $-18 \le \alpha < -2$. Рассмотрим траектории при $\alpha = -2$ и $\beta_{t0} = 0.5$ (рис. 9.1) при изменении радиальной скорости β_{r0}. На этом рисунке и остальных с целью улучшения изображения траекторий используется разный масштаб по осям $\bar{x}$ и $\bar{y}$. При $\beta_{r0} = 0$ частица, двигаясь из перицентрия ($\bar{x}$ =1, $\bar{y}$ = 0) вокруг притяги-вающего центра ($\bar{x}$ = 0, $\bar{y}$ = 0) за время $\overline{T}_{0,5}$ = 3.879 приходит в апоцентрий $\bar{r}_a$ = 2. Следует отметить, что все обсуждаемые результаты, в том числе на рисунках и в Приложении 4, нормированы к параметрам в перицентрии c_1, R_p. Отсюда полупериод орбиты



N°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
β_{r0}	0	0.1	0.3	0.5	0.659	0.7	0.8	0.866
$\overline{R}_a/\beta_{r\infty}$*	2	2.031	2.355	3.909	0*	0.419*	0.807*	1*
φ_a°	100.8	101.6	108.0	119.9	129.7	110.5	95.9	90
$\overline{T}_{0.5}$	3.879	3.987	5.053	10.473	---	---	---	---

Рис. 9.1. Траектории внутри "черной дыры" при следующих параметрах:
α_1^0 = - 2; β_{t0}= 0.5; α = - 2:

$$T_{0,5} = \overline{T}_{0,5} R_p / c_1 . \qquad (9.12)$$

За этот полупериод полярная координата φ изменяется на 100.8^0, т.е. угловой период движения по орбите составляет 201.6^0, что существенно меньше 2π. С увеличением радиальной скорости β_{r0} увеличивается радиус апоцентрия $\overline{R}_a$, угловой период и время движения по орбите. При $\beta_{r0} = \beta_{rp}$ = 0.659 радиус $\overline{R}_a \to 8$ (см. траекторию *5* на рис. 9.1), т.е. траектория становится параболовидной. В отличие от параболы, она уходит в бесконечность при φ_a = 129.7˚, а не при 180˚. С дальнейшим увеличением β_{r0} угол отклонения траекторий уменьшается, и при β_{r0} = 0.866 получаем прямую траекторию 8, по которой движется частица со световой скоростью.

При α = -2 радиус "черной дыры" в 2 раза превышает радиус перицентрия. Поэтому первая траектория ($\overline{R}_a$ = 2) полностью находится внутри "черной дыры" и только в апоцентрии касается ее поверхности, а частица на траекториях *2*, *3*, и *4* периодически вырывается из нее. Частица на гиперболовидных траекториях *6÷8*, двигаясь из бесконечности, входит внутрь "черной дыры", движется там и снова уходит в бесконечность. Частица на параболовидной траектории *5* может вырваться из области "черной дыры". Но во всех случаях частица у притягивающего центра проходит на скорости, приближающейся к световой.

Как видно из рис. 9.1, а также из выражения (5.46) траектории определяются тремя параметрами: α_1^0, β_{t0}, β_{r0}. Однако у всех траекторий в перицентрии скорость одинакова и равна c_1. Поэтому в перицентрии траектории оп-

ределяются двумя параметрами. Так, параметр взаимодействия α, согласно (9.8) и (5.47), равен $\alpha = 2\alpha_{10}\beta_{t0}$. Если известен параметр взаимодействия μ_1, то по параметру α находится радиус перицентрия

$$R_p = \frac{2\mu_1}{\alpha c_1^2}. \qquad (9.13)$$

Радиус перицентрия R_p и скорость c_1 в нем полностью определяют движение частицы. Итак, величина радиальной скорости β_{r0} не оказывает влияние на формирование траектории в перицентрии. Это наводит на мысль, что частица, приблизившаяся к притягивающему центру со скоростью c_1, может затем удаляться по любой траектории, в том числе и по световой 8 на рис. 9.1. Поэтому точка перицентрия является неустойчивой и небольшие возмущения в ней могут приводить к существенным изменениям траектории частицы. Применительно к микромиру это может являться причиной радиоактивности элементов.

9.4. ТРАЕКТОРИИ ПРИ РАЗНЫХ ТРАНСВЕРСАЛЬНЫХ СКОРОСТЯХ

На рис. 9.2 представлены траектории при том же параметре α_1^0 но при большей трансверсальной скорости, β_{t0} = 0.7. В этом случае возрос также параметр α, и радиус "черной дыры" в 2.8 раза превышает радиус перицентрия траектории. При β_{r0} = 0 траектория, по сравнению с аналогичной на рис. 9.1, имеет в 1.5 раза меньший радиус апоцентрия и угловой полупериод φ_α, а временный период меньше в 3 раза. Поведение остальных траекторий аналогично. Как видим, траектории *1, 2, 3, 4* на рис. 9.2 находятся внутри "черной дыры", так как $\overline{R}_a < \overline{R}_g = -\alpha$.

На рис. 9.3 приведены траектории при еще большей трансверсальной скорости. В случае β_{r0} = 0 радиус $\overline{R}_a$ = 1.111, т.е. мало отличается от радиуса перицентрия, а угловой полупериод равен 30.5^0. Если бы частица двигалась по такой орбите, то за оборот она совершила бы шесть подскоков на высоту 0.111 радиуса. Как следует из рис. 9.3, все замкнутые орбиты находятся глубоко внутри "черной дыры"; наибольший радиус апоцентрия в 3 раза меньше $\overline{R}_g = -\alpha$. Итак, увеличение трансверсальной скорости β_{t0} приводит к уменьшению величины подскока и углового и временного периодов.

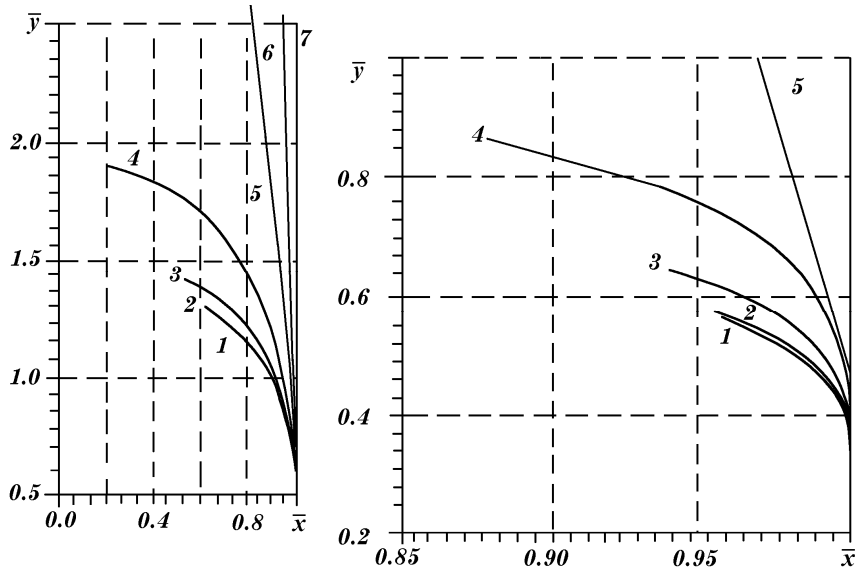


Рис. 9.2 (слева). Траектории внутри "черной дыры" при следующих параметрах: α_1^0 = - 2; β_{t0} = 0.7; α = - 2.8:

N°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
β_{r0}	0	0.1	0.3	0.5	0.668	0.7	0.714
$\overline{R}_a/\beta_{r\infty *}$	1.429	1.437	1.521	1.913	0^*	0.83^*	1^*
φ_a°	63.7	64.2	61.1	83.8	117.2	93.6	90
$\overline{T}_{0.5}$	1.6	1.625	1.864	2.934	---	---	---

Рис. 9.3 (справа). Траектории внутри "черной дыры" при следующих параметрах: α_1^0 = - 2; β_{t0} = 0.9; α = - 3.6:

N°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
β_{r0}	0	0.1	0.3	0.4	0.435
$\overline{R}_a/\beta_{r\infty *}$	1.111	1.113	1.139	1.232	0^*
φ_a°	30.5	30.9	34.4	44.5	110.5
$\overline{T}_{0.5}$	0.58	0.552	0.673	0.942	---

9.5. ТРАЕКТОРИИ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ПАРАМЕТРА ВОЗДЕЙСТВИЯ

Увеличение в 2 раза модуля параметра α_1^0 (см. рис. 9.4) приводит к такому же увеличению параметра взаимодействия α по сравнению с ситуацией, представленной на рис. 9.1. При том же параметре взаимодействия μ_1

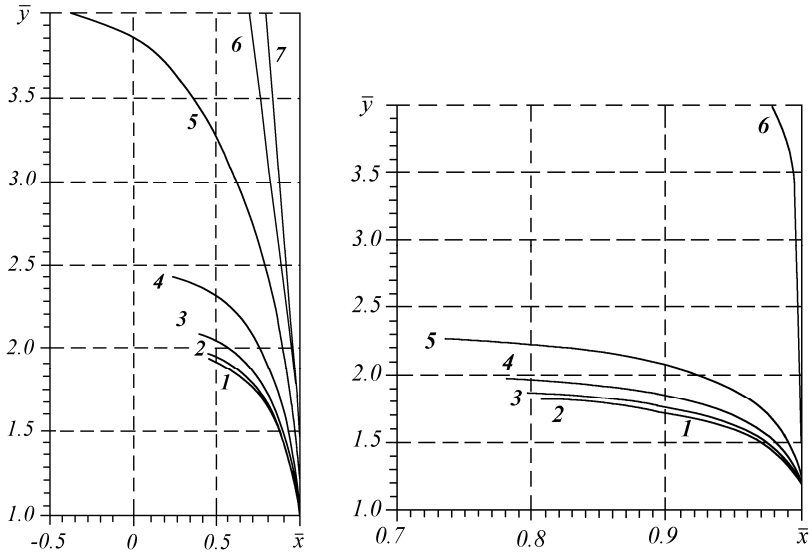


Рис. 9.4 (слева). Траектории "внутри черной дыры" при следующих параметрах: $\alpha_1^0 = -4$; $\beta_{t0} = 0.5$; $\alpha = -4$:

N°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
β_{r0}	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.8	0.807
$\bar{R}_a/\beta_{r\infty *}$	2	2.011	2.114	2.436	4.025	38.93	0^*
φ_a°	76.8	77.2	79.2	84.2	95.6	108.6	108.8
$\bar{T}_{0.5}$	2.708	2.74	2.975	3.714	7.681	196.5	$2.99\ 10^4$

Рис. 9.5 (справа). Траектории "внутри черной дыры" при следующих параметрах: $\alpha_1^0 = -10$; $\beta_{t0} = 0.5$; $\alpha = -10$:

N°	1	2	3	4	5	6
β_{r0}	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.864
$\bar{R}_a/\beta_{r\infty *}$	2	2.004	2.037	2.126	2.384	0^*
φ_a°	66.1	66.2	66.9	68.4	72.0	97.1
$\bar{T}_{0.5}$	2.121	2.133	2.188	2.334	2.76	---

радиус перицентрия, как следует из (9.13), будет в 2 раза меньше. Однако, как видно из рис. 9.4, относительный радиус апоцентрия $\bar{R}_a$ при $\beta_{r0} = 0$ не изменился (траектория *1*), хотя полупериоды по углу и времени уменьшились. Аналогичное влияние параметр α_1^0 оказывает и на другие траектории. Здесь также траектории *1 ÷ 5* находятся внутри "черной дыры".

На рис. 9.5 представлены траектории при еще большем параметре α_1^0. По сравнению с рис. 9.1 здесь параметр α возрос в 5 раз и во столько же уменьшился радиус перицентрия R_p. Однако для первой орбиты приведенное значение радиуса апоцентрия $\bar{R}_a$ не изменилось, а для остальных наблюдается небольшое уменьшение $\bar{R}_a$ с ростом радиальной скорости β_{r0}. Полупериоды по углу φ_a и времени $\bar{T}_{0,5}$ имеют меньшее значение по сравнению с траекториями при $\alpha_1^0 = -4$ и (-2). Таким образом, увеличение модуля α_1^0 не оказывает сильного влияния на относительный радиус апоцентрия, но уменьшает полупериоды φ_a и $\bar{T}_{0,5}$. При этом абсолютный радиус орбиты уменьшается. Как видим, вариации параметров α_1^0 и β_{t0} приводят примерно к одинаковым вариациям траекторий, при этом тип траекторий не изменяется. При небольших радиальных скоростях траектории – конечные, с полупериодом меньшим π, а при больших – гиперболовидные. Конечные траектории могут находиться внутри "черной дыры", а могут выходить из нее.

В перицентрии траектории, по существу, характеризуются одним параметром α, который можно рассматривать как "глубину" погружения перицентрия в "черную дыру", т.е. параметр $(-\alpha) = R_g = R_g/R_p$ показывает, во сколько радиус "черной дыры" больше радиуса перицентрия. В расчетах он изменялся от $\bar{R}_g = 2$ (см. рис. 9.1) до $\bar{R}_g = -18$ при $\alpha_1^0 = -10$ и $\beta_{t0} = 0.9$. По мере увеличения R_g конечные траектории приближаются к притягивающему центру, т.е. становятся менее вытянутыми, и сильнее погружаются в "черную дыру". Полупериод их по углу и времени уменьшается. А гиперболовидные траектории становятся менее искривленными и приближаются к световой траектории.

На всех траекториях частица при приближении к перицентрию стремится к скорости света. После достижения перицентрия существует неопределенность в движении. Так как при интегрировании уравнений радиус перицентрия согласно (9.10) стремится к такому значению, которое эквивалентно световой скорости в перицентрии, то наиболее вероятно движение частицы после перицентрия по неискривленной световой траектории (см. траекторию *8* на рис. 9.1).

9.6. МНОГОУГОЛЬНЫЕ ОРБИТЫ

Движение частицы после достижения перицентрия является неустойчивым. Незначительное отклонение скорости от световой в сторону уменьшения будет приводить к искривлению движения частицы. Представляет значительный интерес то, как в действительности осуществляется предельный переход скорости частицы с приближением ее к перицентрию. Если скорость частицы будет отличаться от c_1 на малую величину δ, то эта величина может быть тем недостающим параметром, который представляет траекторию час-

тицы после прохождения перицентрия. То есть каждой траектории будет соответствовать свой параметр δ. Поэтому полупериодные участки траектории можно соединять и получать непрерывную траекторию частицы. При $\varphi_a = \pi/k$, где k – целое число, частица в течение полного оборота будет совершать k число периодов и ее траектория будет неизменна в пространстве. Таких ситуаций может быть много. Мы нашли их для случая $\alpha_1^0 = -2$ и $\beta_{t0} = 0$ при $k = 2$, 3 и 4.

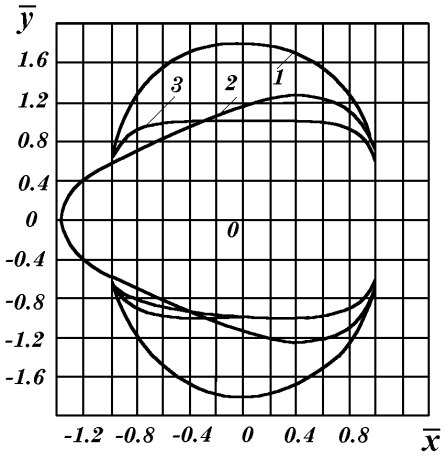


Рис. 9.6. Стабильные многоугольные траектории внутри "черной дыры" при следующих параметрах: $\alpha_1^0 = -2$; $\beta_{r0} = 0$.

$N°$	β_{t0}	α	$\overline{R}_a$	φ_a°	$\overline{T}_{0.5}$	$\overline{T}_c$
1	0.552	-2.206	1.815	90	3.051	12.2
2	0.722	-2.888	1.385	60	1.454	8.72
3	0.815	-3.26	1.227	45	0.952	7.62

На рис. 9.6 представлены такие стабильные в пространстве орбиты. По орбите *1*, имеющей эллипсовидную форму, частица движется вокруг притягивающего центра, положение которого совпадает с центром орбиты, а не со смещенным относительно центра фокусом. Относительный период циклического движения частицы по такой орбите $\overline{T}_c = 12.2$. На прямых участках частица движется почти со световой скоростью, а на искривленных – с наименьшей. У орбиты *2* имеется три прямых участка, а у орбиты *3* – четыре. Движение частицы происходит по треугольнику и квадрату с округленными вершинами. При больших значениях параметра α вершины таких многоугольных орбит будут более острые.

Небольшое увеличение скорости частицы на величину δ приведет к достижению ею скорости света, и она покинет притягивающий центр. Этот процесс может наблюдаться в микромире и, возможно, радиоактивность элементов обусловлена такими орбитами. Многоугольные орбиты могут наблюдаться в макромире, если скорость распространения тяготения конечна. Звезда на такой орбите будет давать неравномерное излучение: на прямых участках из-за меньшего времени нахождения она будет восприниматься менее яркой, а на углах – более яркой. Поэтому воспринимаемый свет должен быть модулирован определенным образом.

ГЛАВА 10.

СВЕРХСВЕТОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ

10.1. ПРИМЕРЫ СВЕРХСВЕТОВЫХ ДВИЖЕНИЙ

Положение о невозможности сверхсветовых движений в современной физике формировалось в основном на интерпретации двух экспериментальных фактов. Неудачные попытки измерить скорость Земли относительно светоносного эфира привели к представлению, что возможно сложение скорости света и скорости движения Земли каким-то необычным образом, при котором скорость света остается неизменной. Вторая группа фактов связана с замедлением ускорения электрона при приближении его скорости к скорости света, которое объяснялось как увеличение массы частицы и стремление ее к бесконечности с приближением к скорости света. Так как масса частицы не должна быть бесконечной, то скорость света будет недостижимой. Если же заряженная частица приобретает скорость света другим способом, то ее масса становится бесконечной. Следовательно, запрет сверхсветовых движений должен быть всеобщим.

Эта логика и интерпретация фактов формировались под воздействием преобразований Лоренца. После придания им смысла преобразования пространства, времени и других параметров при переходе между системами отсчета интерпретация становилась логически замкнутой.

В действительности, эфира как среды, в которой распространяется свет, не существует. Замедление ускорения электрона с ростом его скорости объясняется тем, что сила воздействия на него зависит от скорости. Мы определили величину силы и с ее помощью рассчитали взаимодействие между заряженными телами и магнитами. Пространство и время не изменяются при переходе от покоящегося тела к движущемуся. Значит, запрет сверхсветовых движений не имеет больше никаких оснований.

Движения со сверхсветовой скоростью существуют в окружающем нас мире. Например, если два ускорителя, находящиеся в точках A и C на расстоянии $2l$ = 598 м (рис. 10.1.), испустят друг другу навстречу частицы со скоростью u = 299000 км/с, то через одну микросекунду каждая из частиц пройдет расстояние l = 299 м, и они встретятся в точке B. То есть относительное расстояние $2l$ пройдено частицами за время $t = 1 \cdot 10^{-6}$ с. Скорость одной частицы относительно другой $v = 2l/t$ = 598000 км/с, что составляет почти двойную скорость света. Такие ситуации наблюдаются в экспериментальных установках со встречными пучками частиц. В этих установках происходят взаимодействия частиц при относительной скорости частиц, достигающей удвоенной скорости света. С этим положением соглашаются многие физики [29, 75].

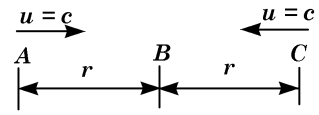


Рис. 10.1. Удвоенная скорость света в относительном движении.

Интересное доказательство существования сверхсветовых частиц привел в 1963 г. Г.Д. Ломакин [30]. При определении времени жизни μ-мезонов пройденный ими путь делят на скорость света. Такое время жизни больше, чем время жизни медленных μ-мезонов. В результате анализа экспериментальных данных Г.Д. Ломакин пришел к выводу, что больший путь, пройденный этими частицами, является свидетельством того, что их скорость больше скорости света.

Общепризнано, что космические частицы входят в атмосферу Земли со световой скоростью. Так как Земля движется вместе с Солнцем по его орбите со скоростью 300 км/с, превышение над скоростью света составит всего 0,001 часть. Однако в космосе существуют объекты, скорость которых сопоставима со скоростью света. Если такие объекты будут генерировать потоки частиц, то их относительная скорость может существенно превышать скорость света.

Характерным признаком сверхсветового движения частицы является излучение ею света определенным образом, известным под названием излучения Черенкова (рис. 10.2). Здесь светящаяся частица, движущаяся со сверхсветовой скоростью $\upsilon > c$, в момент $t = 0$ находится в вершине конуса. Раньше в момент t_1 она находилась на расстоянии $b_1 = \upsilon t_1$, а излученный ею свет достиг сферы радиусом $a_1 = ut_1$. В последующий момент $t_2 < t_1$ частица находилась на расстоянии $b_2 = \upsilon t_2$ и излученный ею свет достигает сферы радиусом $a_2 = ut_2$. Это справедливо для любого момента времени. Следовательно, излученные частицей сигналы на всем пути ее движения сосредоточиваются на конической поверхности, полуугол при вершине которой определяется так:

$$\sin\alpha = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = u/\upsilon. \qquad (10.1)$$

Поверхность конуса, таким образом, представляет собой концентрированный фронт воздействия. В случае звуковых колебаний этот конус известен как конус Маха, а фронт воздействия – как ударная волна. Для света скорость $u = c_1$, а угол между скоростью частицы и нормалью к конусу $\hat{\beta} = \arccos(c_1/\upsilon)$ известен как угол черенковского излучения. Такое излучение наблюдается при прохождении частиц с околосветовой скоростью $\upsilon \approx c$ в жидкости,

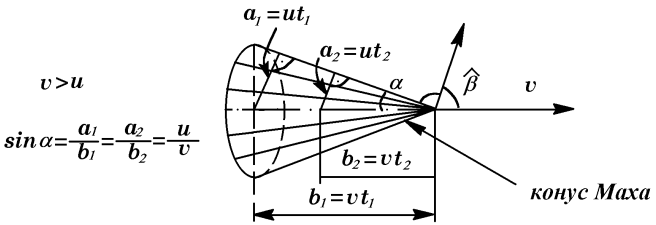


Рис. 10.2. Черенковское излучение с углом $\hat{\beta}$.

в которой скорость света $c_1 = c/n$, где n – показатель преломления жидкости. При больших n досветовая скорость частицы становится на десятки процентов больше скорости света в среде c_1. Такое излучение широко используется в черенковских счетчиках элементарных частиц.

Существование движений со сверхсветовой скоростью $\upsilon > c_1$ в среде, но с меньшей скорости света в вакууме $\upsilon < c$, вступает в противоречие с ТО. Мы показали, что все уравнения электродинамики, в том числе и преобразования Лоренца, зависят от скорости c_1. Существование скоростей при $\upsilon > c_1$, установленное для разных сред, при различных c_1, является общим положением. Так как скорость света в вакууме частный случай среды с $\varepsilon = \mu = 1$, то из общего положения следует частное: возможны скорости движения больше скорости света в вакууме.

Многие исследователи утверждают [10, 15, 38, 72, 90], что космические частицы, входящие в земную атмосферу, создают черенковское излучение. Такое излучение в безлунные ночи можно наблюдать невооруженным глазом. Многочисленными экспериментами подтверждено, что наблюдаемые метеоры в виде мгновенного чирканья по небосводу совпадают с ливнями частиц высоких энергий. Так, согласно Н.А. Добротину [15]: "Галбрайт и Джелли показали, что вспышки на ночном небе совпадают с импульсами в счетчиках и поэтому обусловлены черенковским излучением".

Для объяснения этого факта в рамках теории относительности утверждают, что скорость частиц в данном случае превосходит скорость света в воздухе, но меньше скорости света в вакууме. Натянутый характер согласования наблюдаемого сверхсветового движения с теорией относительности очевиден. Скорость света в воздухе $c_1 = c/n$, где показатель преломления воздуха согласно [15] в зависимости от его плотности ρ

$$n = 1 + 2.9 \cdot 10^{-4} \cdot \rho/\rho_0,$$

т.е. скорость света в воздухе на уровне моря ($\rho = \rho_0$) отличается от скорости света в вакууме на

$$\delta = (c - c_1) \cdot 100\%/c = (n-1) \cdot 100\%/n = 0.029\%.$$

Так как с высотой плотность воздуха ρ уменьшается, то уменьшается и δ. Если допустить, что скорость частиц υ не превышает скорость света в вакууме, то она должна находиться в жестких пределах $c > \upsilon > c(1 - \delta)$. Этому соответствует полуугол при вершине конуса сверхсветового излучения, отличающийся от 90° на величину порядка δ, т.е. конус вырождается в плоскость. Характерное свойство черенковского излучения имеет место лишь при явно выраженном световом конусе. О таком излучении и сообщают литературные источники. Поэтому наблюдаемое черенковское свечение свидетельствует о том, что космические частицы входят в атмосферу Земли со скоростью, большей скорости света в вакууме.

Столь высокие скорости космических частиц могут быть обусловлены разными причинами. Одна из них – гравитационное притяжение. Рассмотрим, какие скорости могут сообщать астрономические объекты телу, которое с нулевой начальной скоростью под действием тяготения приблизится к поверхности объекта. Рассчитанные по (5.27) параболические скорости υ_{pa} приведены в таблице:

Объект	m_1, кг	R, м	ρ, кг/м^3	υ_{pa}, м/с	Источник
Земля	$6.6\cdot10^{24}$	$6.37\cdot10^{6}$	$5.52\cdot10^{3}$	$11.75\cdot10^{3}$	[16]
Солнце	$1.98\cdot10^{30}$	$1.4\cdot10^{9}$	$1.41\cdot10^{3}$	$43.5\cdot10^{4}$	[16]
Белый карлик типа звезды Лейтона	$2.5\cdot10^{30}$	$2\cdot10^{6}$	$6\cdot10^{10}$	$1.3\cdot10^{7}$	[16, 21]
Нейтронная звезда	$4.5\cdot10^{30}$	$8\cdot10^{3}$	$2\cdot10^{18}$	$2.7\cdot10^{8}$	[21]

Как видим, они изменяются от 12 км/с для Земли до 270000 км/с для нейтронной звезды. Еще большими могут быть скорости тел, на которые будут воздействовать квазары, ядра галактик или так называемые кандидаты в "черные дыры". То есть эти скорости могут превышать скорость света. Со скоростями такого порядка тела могут выбрасываться из притягивающих центров или обмениваться между собой.

Новыми методами в астрономии - радио- и рентгеновскими телескопами в последние два десятилетия обнаружено много объектов, движущихся со скоростями, большими скорости света [35]. В статье [120] рассматривается 30 сильных внегалактических радиоисточников, которые имеют компактные компоненты с видимыми тангенциальными скоростями большими скорости света. Один из авторов статьи, Р.Ц. Вераулен, в другой своей работе рассматривает статистические свойства сверхсветовых компонентов, которые отмечаются в 66 галактиках, квазарах и лецертидах. Наблюдаются движения струй, расширения диффузных объектов, относительное движение частей распадающегося объекта и т.д. Например, наблюдения радиоядра квазара 3С395 на частотах 5 и 1.6 ГГц (сантиметровый диапазон волн) с 1979 по 1985 г. показали [111], что он состоит из трех компонентов. Расстояние между ядром и малоподвижным компонентом составляет 5 мс (дуговые миллисекунды). Третий компонент движется в сторону последнего со сверхсветовой скоростью. Его угловая скорость 0.64 мс/год.

В работе [106] рассматривается движение двух компонентов источника GRS1915+105 жестких рентгеновских лучей с 27 марта по 30 апреля 1993г. Наблюдается неускоренное удаление компонентов друг от друга со скоростью, перпендикулярной линии наблюдения и равной для каждого 1.25 и 0.65 *c*. Их относительная скорость составляет 1.9 *c*, т.е. достигает почти удвоенной скорости света.

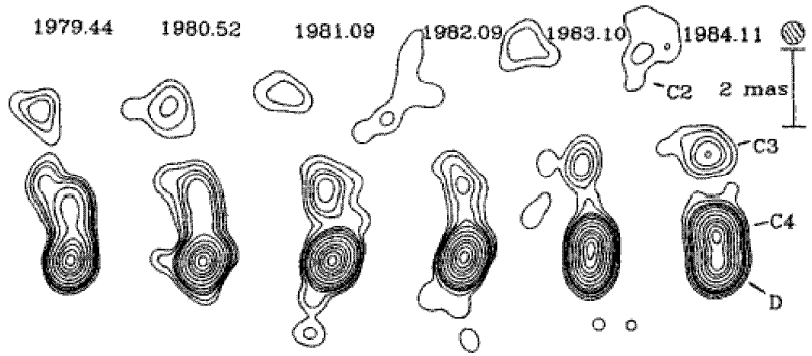


Рис.10.3. Радиоизображения квазара (Интернет, согласно John Biretta / Space Telecope Science Institute).

Радиоизображения квазара 3С345 (рис.10.3) зафиксированы на волнах 10.7 ГГц с 1979 г. по 1984 г.. В нем скорости струй превышают скорость света в 7 раз, если он действительно является экстрагалактическим и удален на 1700 мегапарсек, как это считает большинство астрофизиков. Имеются сообщения о скоростях движения, достигающих 40 скоростей света. Поскольку в рамках ТО такие движения невозможны, предпринимаются попытки объяснения наблюдаемых явлений без нарушения принципа предельной скорости. Наиболее распространенные объяснения [5, 106] сверхсветовой поперечной скорости заключаются в подборе такого направления движения источника, при котором его досветовая скорость будет рассматриваться как сверхсветовая. Данный подход, естественно, не может опровергнуть сверхсветовые движения: угол между скоростью объекта и направлением наблюдения должен быть определен на основании результатов измерений, а не вычислен из предположения, которое хотят доказать. Анализ этого подхода, представленный в работе [110], приводит автора к выводу, что наблюдаемые сверхсветовые движения представляют серьезное испытание теории относительности.

Итак, существующие объекты в космическом пространстве могут сообщать телам сверхсветовые скорости и такие скорости отмечаются. Движущиеся тела и струи вещества с подобными скоростями могут создавать потоки элементарных частиц, скорости которых также сверхсветовые. Они входят в атмосферу Земли, создают черенковское излучение и порождают ливни вторичных частиц, которые свидетельствуют об огромной энергии космических частиц. Миллениум Твейн [119] обратил внимание, что такие свойства элементарных частиц, как их масса, заряд и радиус могут быть увязаны с магнитных моментом и моментом импульса, если они представляют собой структуру, вращающуюся со сверхсветовой скоростью. Он пришел к выводу, что весь наш мир, как макро- так и микро- является сверхсветовым, т.е. в нем имеются объекты, которые движутся со скоростями большими скорости света.

Следует отметить, что в современной теоретической физике введено понятие "тахионы" [3, 19, 39]. Это гипотетические частицы, которые должны удовлетворять ТО. У них постулируется мнимая масса. Исследуют, как с помощью тахионов нарушить принцип причинности, т.е. чтобы следствие предшествовало причине. Отсюда следует название "тахионы" - обгоняющие время. В отличие от таких фантастических тахионов, мы рассматриваем реальные сверхсветовые движения.

10.2. НАБЛЮДЕНИЕ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРИ СВЕРХСВЕТОВОЙ СКОРОСТИ

Полученные в результате расчета сверхсветовые скорости далеких астрономических объектов вызывают многие вопросы. Решить их невозможно без понимания того, как должны наблюдаться сверхсветовые объекты. Анализ работ по объяснению сверхсветовых движений [5, 35, 106, 110] показывает, что нет общепринятого метода их рассмотрения. Нам представляется, что эта проблема содержит многие неясные вопросы. Проанализируем наблюдение таких движений на примере сверхзвуковых. Пусть источник звука S движется в среде со скоростью $\upsilon > a$ (рис. 10.4) и в момент $t = 0$ находится в точке S. В этой среде на прицельном расстоянии p находится неподвижный приемник R. Звуковые колебания, распространявшиеся в окружающем воздухе со скоростью a, наложились на фронт в виде конуса Маха с полууглом при вершине α, равным

$$\sin\alpha = a / \upsilon. \qquad (10.2)$$

Неподвижный относительно воздуха наблюдатель R услышит в этот момент источник в точке S', расположенной на перпендикуляре к фронту SR. Расстояние $S'S$ источник прошел за время

$$T = S'S/\upsilon, \qquad (10.3)$$

а звук за это время распространился на расстояние

$$S'R = T\,a = S'S\sin\alpha. \qquad (10.4)$$

Через некоторое время t источник переместился в точку S_t, а конус Маха займет положение S_tA, где

$$SS_t = RA = \upsilon t = x. \qquad (10.5)$$

Здесь $x = \upsilon\, t$ – обозначение пройденного отрезка.

После прохождения фронта приемник R будет воспринимать звук, который достиг его от источника, находившегося, как видно из рис. 10.4, сразу в двух точках S_t' и S_t''. В момент t звук достигнет также точек B и C соответственно, находящихся на конусе Маха S_tA. Таким образом, приемник после прохождение фронта будет регистрировать звук от двух источников S_t' и S_t''. В случае света наблюдатель сверхсветового источника (если здесь допустима аналогия со звуком!) будет видеть его сразу в двух положениях. Таким образом, после прохождения фронта увиденный источник в точке S' раздвоится и далее будет наблюдаться в виде двух источников S_t' и S_t''. Определим скорости движения двух изображений наблюдаемого сверхзвукового (сверхсветового?) источника.

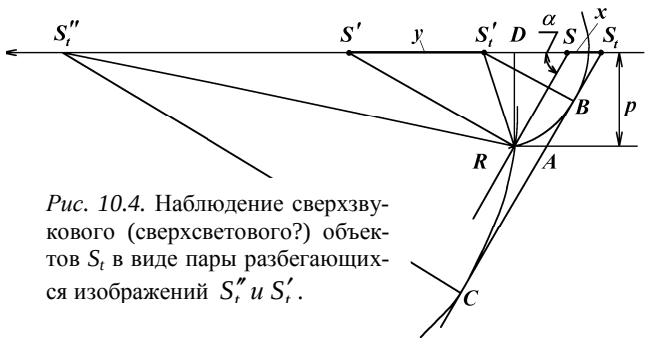


Рис. 10.4. Наблюдение сверхзвукового (сверхсветового?) объектов S_t в виде пары разбегающихся изображений S_t'' и S_t'.

Из треугольника $\Delta S_t'SR$ следует:

$$S_t'R^2 = S_t'S^2 + RS^2 - 2S_t'S\cdot RS\cdot\cos\alpha. \qquad (10.6)$$

Выразим $S_t'S_t$ через $S_t'S$ и x:

$$S_t'S_t = S_t'S + x. \qquad (10.7)$$

Расстояние между наблюдаемыми источниками S' и S_t' можно записать:

$$y = S'S - S_t'S. \qquad (10.8)$$

Выразим RS и $S'S$ через прицельное расстояние p:

$$RS = p/\sin\alpha; \qquad (10.9)$$

$$S'S = \frac{RS}{\cos\alpha} = \frac{p}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}. \qquad (10.10)$$

Подставляя в (10.8) $S'S$ и $S_t'S$ из (10.7), получаем

$$y = \frac{p}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} - S_t'S_t + x. \qquad (10.11)$$

Из треугольника $\Delta S_t'S_tB$, с учетом того, что $S_t'B = S_t'R$, следует

$$S_t'S_t = S_t'B/\sin\alpha = S_t'R/\sin\alpha. \qquad (10.12)$$

Откуда, с учетом (10.7), находим

$$S_t'R = S_t'S_t\cdot\sin\alpha = (S_t'S + x)\sin\alpha. \qquad (10.13)$$

Подставляем в (10.6) $S_t'R$ и RS из (10.13) и (10.9) соответственно. После преобразования имеем:

$$S_t'S^2 - 2S_t'S\left(\frac{p}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} + x\cdot\mathrm{tg}^2\alpha\right) + \frac{p^2}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha} - x^2\cdot\mathrm{tg}^2\alpha = 0. \qquad (10.14)$$

Решением квадратного уравнения (10.14) будет

$$S_t'S = x\,\mathrm{tg}^2\alpha + \frac{p}{\sin\alpha\cos\alpha} \pm \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{x^2\,\mathrm{tg}^4\,\alpha + 2xp\,\mathrm{tg}^3\,\alpha}\,. \qquad (10.15)$$

С помощью (10.8) и (10.10) выразим $S_t'S$ через y:

$$S_t'S = \frac{p}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} - y\,. \qquad (10.16)$$

Тогда расстояние наблюдаемого объекта y в зависимости от расстояния x объекта, прицельного расстояния p до наблюдателя и угла конуса Маха α, согласно (10.15), запишется

$$y = -x\,\mathrm{tg}^2\alpha \;\pm\; \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{x^2\mathrm{tg}^4\alpha + 2xp\,\mathrm{tg}^3\alpha}\,. \qquad (10.17)$$

Два знака $\pm$ определяют два положения S_t'' и S_t' наблюдаемого объекта, который в момент t находится в точке S_t (см. рис. 10.4).

Итак, сверхзвуковой объект, находящийся в точке S, в момент набегания фронта на приемник R наблюдается в точке S'. Затем он раздваивается: один объект S_t' движется в направлении объекта S, а другой S_t'' – в обратном. Определим скорости движения наблюдаемых объектов:

$$\upsilon_s = \frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}\frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}t} = \upsilon\frac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x} = \upsilon\mathrm{tg}^2\alpha\left[-1 \pm \frac{x\mathrm{tg}\,\alpha + p}{\sin\alpha\sqrt{x^2\mathrm{tg}^2\alpha + 2xp\mathrm{tg}\,\alpha}}\right]. \qquad (10.18)$$

Здесь p – прицельное расстояние, а $x = \upsilon t$, где t – время, отсчитываемое от начала прихода фронта к наблюдателю R. Как видно из (10.18), в начальный момент времени ($x \to 0$) скорость движения наблюдаемых объектов будет бесконечна. С течением времени ($x \to \infty$) скорость изображения в направлении движения объекта, с учетом (10.2), будет

$$\upsilon_s' = \upsilon\cdot\mathrm{tg}^2\alpha\,(1/\sin\alpha - 1) = \frac{\upsilon a}{\upsilon + a} \le a, \qquad (10.19)$$

а в обратном

$$\upsilon_s'' = -\upsilon\cdot\mathrm{tg}^2\alpha\,(1/\sin\alpha + 1) = -\frac{\upsilon a}{\upsilon - a} \le -a \qquad (10.20)$$

Отсюда следует, что абсолютная скорость движения изображения в обратном направлении больше, чем в прямом. В прямом направлении изображение движется с дозвуковой скоростью. При движении объекта со звуковой скоростью $\upsilon = a$, согласно (10.2) угол конуса Маха $\alpha = 90°$. Скорость в обратном направлении $\upsilon_s'' \to \infty$, а скорость в прямом, как следует из (10.19), будет

$$\upsilon_s' = 0{,}5a. \qquad (10.21)$$

В этом случае наблюдатель после набегания на него фронта увидит движущийся из бесконечности объект. Первоначально скорость движения изображения будет бесконечна. Впоследствии она приблизится к $0{,}5a$. С такой скоростью изображение объекта будет удаляться от наблюдателя в направлении движения объекта.

При движении со скоростью $\upsilon > a$ объект сначала наблюдается (см. рис. 10.4) в точке S', затем влево и вправо от точки S' будут двигаться его изображения. Влево движение происходит с большей скоростью, нежели вправо, и скоро исчезает.

Движение прямого изображения S_t' происходит с меньшей скоростью и наблюдается дольше. Изображение будет удаляться от наблюдателя со все уменьшающейся скоростью, и на большом удалении его скорость станет меньше звуковой или световой для случая сверхсветового движения. Этот результат весьма интересен. Если наблюдатель пропустил момент набегания фронта, что весьма вероятно при наблюдении астрономических объектов, то обратное изображение S_t'' для него уже исчезнет, а прямое S_t' он увидит движущимся с досветовой скоростью.

Последний пример показывает, какие необычные ситуации возможны при наблюдении сверхсветовых объектов. Поэтому анализ результатов наблюдений как макрообъектов, так и микро– (например, космических частиц или элементарных частиц в ядерной физике и в процессах ускорения) необходимо проводить с учетом наблюдаемых скоростей (10.18). Видно, что неучет этого явления в физике элементарных частиц может приводить к интерпретации сверхсветовых частиц как явления рождения пары двух частиц.

Рассмотренные эффекты сверхзвукового движения автору неоднократно приходилось наблюдать в детстве. Сверхзвуковые военные самолеты мы увидели в небе задолго до появления известий о них в печати. Внезапно в чистом небе, на котором отсутствовали посторонние объекты, раздавался взрыв или выстрел. Местоположение источника звука не определялось - звук заполнял все пространство. Затем из определенной точки небосвода воспринимались звуки двух удаляющихся друг от друга самолетов. Позже мы научились обнаруживать и самолет, создававший звук. Он был далеко впереди, ближе к горизонту, движущегося за ним звукового изображения. Затем самолет уходил за пределы видимости, а его звуковое изображение еще долго создавало иллюзию летящего самолета.

Мы рассмотрели проблемы наблюдения сверхсветовых движений. Другая группа проблем связана с взаимодействием тел при таких движениях. Исследуем особенность взаимодействия заряженных тел при сверхсветовом движении. При $\beta > 1$, как видно из закона для силы (4.92), при определенных углах φ между $\vec{R}$ и вектором скорости $\vec{\upsilon}$ знаменатель является действительным числом и выражение для силы существует. Если мы рассматриваем движущийся заряд q_1, то при $\beta > 1$ его воздействие на находящийся впереди

неподвижный заряд q_2 не успеет распространиться. Поэтому взаимодействие между телами начнется, когда заряд q_2 будет позади заряда q_1, т.е. при $\varphi > \pi/2$. Из (4.92) следует, что знаменатель равен нулю при

$$\sin\varphi_M = 1/\beta. \qquad (10.22)$$

Так как $\varphi_M > \pi/2$, то (10.22) идентично (10.2), при этом

$$\varphi_M = \pi - \alpha. \qquad (10.23)$$

При значении φ_M, согласно (10.22), знаменатель (4.92) равен нулю, а сила стремится к бесконечности. Таким образом движущийся заряд q_1 начнет воздействовать на неподвижный заряд q_2, когда последний попадет на фронт конуса Маха. Внутри конуса Маха сила воздействия заряда q_1 на заряд q_2 будет конечна, но противоположна по знаку. Это обусловлено отрицательным знаком числителя $(1-\beta^2)$ в законе силы (4.92). Таким образом, одноименно заряженное тело q_2, находящееся внутри конуса Маха, будет притягиваться к заряду q_1, а при противоположном знаке – отталкиваться.

Рассмотрим изолинии силы при сверхсветовом движении. Аналогично (4.93) запишем уравнение линии постоянного значения силы:

$$R = \sqrt{B\frac{\beta^2-1}{\left(1-\beta^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}}\quad , \qquad (10.24)$$

где

$$B = -\frac{q_1\, q_2}{\varepsilon\, F} = \text{const}. \qquad (10.25)$$

Зависимость (10.24) при $B = 1$ изображена на рис. 10.5 в полярных координатах. Окружностью радиусом $R = 1$ представлена изолиния силы (4.93) неподвижного заряженного тела q_1. Из рис. 10.5 видно, что при $\beta < 1{,}5$ изолинии в области $\varphi = \pi$ проходят внутри окружности $R = 1$, т.е. в этой области силы воздействия движущегося сверхсветового заряда меньше неподвижного.

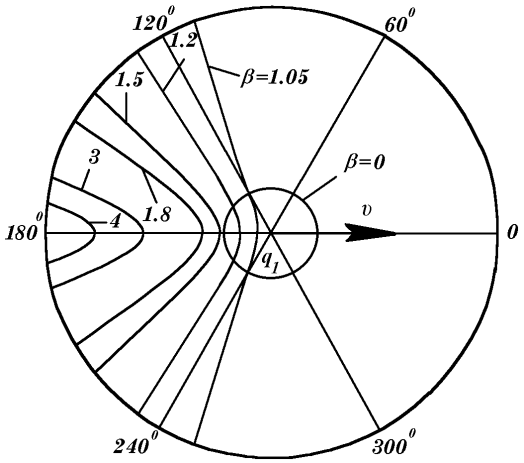


Рис. 10.5. Изолинии силы воздействия движущегося со сверхсветовой скоростью v заряженного тела q_1 на неподвижное заряженное тело q_2, находящееся от него на разных угловых расстояниях при разных величинах приведенной скорости β.

С приближением φ к φ_M изолиния стремится в бесконечность, т.е. сила неограниченно растет. При $\beta \geq 1.5$ изолинии находятся вне окружности $R = 1$, т.е. сила воздействия сверхсветового заряда больше неподвижного.

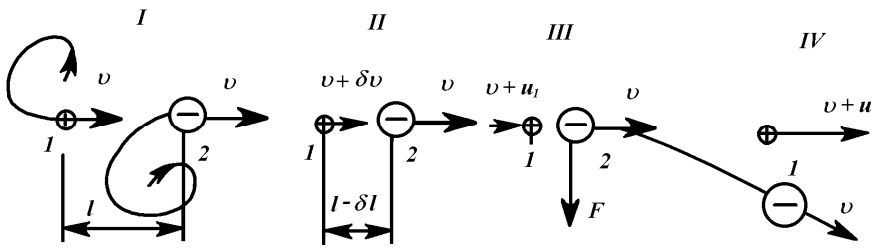
Вершины конусов Маха при разных β располагаются в центре заряда q_1, а образующие параллельны изолиниям. Например, конус при полярном угле $\varphi_M = 120^\circ$ является конусом Маха при $\beta \approx 1.2$. Из рис. 10.5 видно, что с увеличением β угол при вершине конусов Маха уменьшается. При световой скорости движения, ($\beta = 1$), конус Маха вырождается в плоскость, перпендикулярную скорости v.

10.3. УСКОРЕНИЕ СГУСТКОВ ЧАСТИЦ ДО СВЕРХСВЕТОВОЙ СКОРОСТИ

Как мы упоминали ранее, электромагнитным воздействием можно достичь световой скорости. А как ее превзойти? Для этого достаточно создать такие установки, чтобы частица ускорялась объектом, который сам движется относительно установки со скоростью u в направлении ускорения частицы [55, 115, 118]. Тогда частицу можно ускорить этим объектом до скорости c_1 относительно него и абсолютная скорость частицы, т.е. ее скорость относительно установки, будет равна сумме скорости c_1 и скорости u объекта:

$$v_a = c_1 + u.$$

Такими объектами могут быть сгустки заряженных частиц. Вначале оба сгустка ускоряются независимыми ускорителями (рис. 10.6, положение I) до одинаковой скорости v. Затем сгустки начинают притягиваться друг к другу. Так как масса сгустка *2* значительно больше массы сгустка *1*, то изменяется только скорость сгустка *1* – он ускоряется (положение II). Как показано в положении II, первоначальное расстояние l между сгустками уменьшается на δl, а скорость ускоряемого сгустка возрастает на δv. После сближения сгустков (положение III) ускоряемый сгусток *1* приобретает прибавку скорости u_1. В этом положении к ускоряющему сгустку *2* прикладывается внешнее *Рис.*



10.6. Сверхсветовое ускорение при притяжении разноименно заряженных сгустков:
1, 2 – номера сгустков; I, II, III, IV – номера положений.

воздействие F, благодаря которому он уводится с пути ускоренного сгустка *1*. В процессе взаимодействия при расхождении сгустков первоначальная прибавка скорости u_1 уменьшится до u. Таким образом, после процесса ускорения сгусток *1* будет иметь полную скорость $\upsilon + u$.

В качестве быстродвижущегося воздействующего объекта можно взять сгусток заряженных частиц, которые создаются, например, в современных ускорителях. Такой сгусток с N частицами, заряд каждой из которых q, будет иметь полный заряд $Q_a = qN$. Если сгусток с зарядом Q_{a1} (см. рис 10.6) будет двигаться вслед за воздействующим сгустком с зарядом Q_{a2} противоположного знака, то он приобретет относительную скорость u, которую можно определить с помощью выражения (7.46). Для этого рассматриваем сгустки как точки; воздействующий сгусток берем с массой M_2, значительно большей массы M_1 ускоряемого сгустка. Тогда замедлением воздействующего сгустка можно пренебречь. Сгусток будет ускоряться до тех пор, пока не приблизится к воздействующему сгустку. Считая расстояние между их центрами в данный момент равным диаметру d наибольшего из них и рассматривая сгустки протонов и электронов с зарядом частиц q, относительную скорость ускоренного сгустка при $u_0 = 0$ получим в виде

$$u^2 = c^2 - c^2 \exp\left[-\frac{2q^2 N_2}{m_1 c^2 d}\right]. \qquad (10.26)$$

Здесь N_2 – число частиц воздействующего сгустка, m_1 – масса одной частицы из ускоряемого сгустка; ускорение производится в среде с $\varepsilon = \mu = 1$.

Из выражения (10.26) следует, что сгусток электронов может ускориться сгустком протонов с размерами порядка $d = 2$ см и с числом частиц $N_2 \geq 4\cdot10^{12}$ до скорости $u_r = 0.3c$. До такой же скорости сгусток протонов можно ускорить сгустком электронов с числом частиц $N_2 \geq 6.2\cdot10^{14}$. При этом масса сгустка протонов должна быть $M_1 = m_p N_1 < N_2 m_e$, т.е. число частиц в сгустке протонов $N_1 < N_2\, m_e/m_p$.

Так как в современных ускорителях можно получить сгустки частиц со скоростью очень близкой к скорости света, то после ускорения движущимся сгустком ускоряемые частицы получат скорость относительно установки

$$\upsilon_a = c + 0.3c = 1.3c,$$

которая значительно превышает скорость света. Следовательно даже в случае не очень высокого вакуума в установке торможение частиц за счет сверхсветового излучения (так называемое черенковское излучение) не уменьшит эту скорость до досветовой.

После того как ускоряемый сгусток достигнет воздействующего сгустка, он начнет опережать его и замедляться. Дальнейшее взаимодействие между сгустками необходимо предотвратить. Это можно осуществить несколькими способами. Если воздействовать на сгустки магнитом, то воздействующий сгусток будет отклоняться и уходить с пути движения ускоряемого

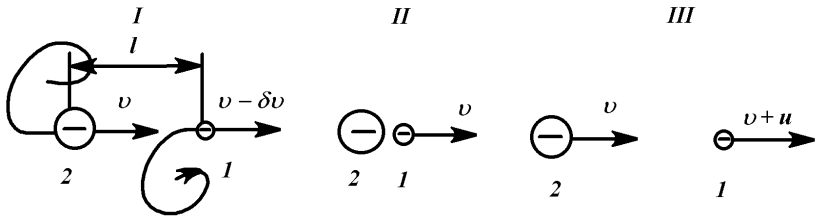


Рис. 10.7. Сверхсветовое ускорение при отталкивании одноименно заряженных сгустков: 1, 2 – номера сгустков; I, II, III – номера положений

сгустка. При этом вектор магнитной напряженности $\vec{H}$ должен быть перпендикулярен к скорости сгустков. Расчеты показывают, что замедление ускоряемого сгустка будет тем меньше, чем больше величина магнитной напряженности. В случае ускорения протонного сгустка электронным нужна небольшая напряженность, так как масса электронов выводимого из ускорения взаимодействующего сгустка очень мала. При ускорении же протонным сгустком для вывода его из процесса ускорения необходимо прикладывать магнитное воздействие значительно более сильное. Расчеты показывают, что напряженность 15 ÷ 20 кгс, широко применяемая в ускорителях, вполне достаточна для этого.

Разводить сгустки после сближения можно и с помощью электрического воздействия, перпендикулярного скорости сгустков. Можно одновременно применить как магнитное, так и электрическое воздействие.

В рассмотренном примере сгустки имели разноименные заряды. При одноименных зарядах процесс ускорения будет происходить следующим образом (рис. 10.7.). В исходном положении I ускоряемый сгусток *1* имеет скорость меньшую скорости сгустка *2* на величину $\delta\upsilon$. Величина $\delta\upsilon$ и первоначальное расстояние l между сгустками выбрано так, чтобы при приближении на минимальное расстояние их относительная скорость равнялась нулю (положение II). Далее за счет сил отталкивания происходит ускорение сгустка *1* и, после выхода за границу воздействия сгустка *2*, ускоренный сгусток будет иметь скорость $\upsilon + u$.

Как и в предыдущем случае, при технически осуществимых плотностях сгустков может быть достигнута относительная скорость $u = 0{,}3c$. При начальной скорости $\upsilon = c$ и $\delta\upsilon = u$ ускоряемый сгусток в положении II будет иметь скорость $\upsilon_1 = c$, а его конечная скорость составит $\upsilon_1 = 1{,}3c$, т.е. будет сверхсветовой. В этом способе при ускорении электронов ускоряющий сгусток электронов должен иметь $N_2 \geq 4\cdot10^{12}$ частиц, а при ускорении протонов $N \geq 6{,}2\cdot10^{14}$ протонов в сгустке.

Итак, для получения сверхсветовых электронов нужны сгустки с числом частиц порядка $10^{12}\div10^{13}$, а для ускорения протонов – сгустки с числом частиц порядка $10^{14}\div10^{15}$. При этом числе частиц сгустки должны иметь размеры 1÷10 см.

Такие протонные сгустки получены на многих больших современных ускорителях. В [1] утверждается, что число частиц протонного синхротрона достигает $2\cdot10^{12}$ в импульсе. Более того, намечено увеличить число частиц в импульсе до $5\cdot10^{13}$. Еще большее количество протонов имеют сгустки, получаемые в накопительных кольцах. В [2] планировалось получать до $4\cdot10^{14}$ протонов в сгустке. Следовательно, в любом таком ускорителе можно ускорять электроны до сверхсветовой скорости, причем можно достичь даже большей скорости, чем 1.3c.

Для ускорения протонов до сверхсветовых скоростей требуется число частиц в сгустке на два порядка больше, чем при ускорении электронов. Поскольку масса электронов в 2000 раз меньше массы протонов, они и сильнее расталкиваются; поэтому большую плотность электронов в сгустке трудно достичь. Однако необходимые сгустки электронов можно образовать в виде колец. Такие кольца получили некоторые исследователи. Согласно [22], получены электронные кольца с числом частиц $6\cdot10^{12}$.

В.П. Саранцев [46] получил кольца с числом электронов 10^{13}. Размеры колец могут быть меньше 1 мм, поэтому ими уже можно ускорять протоны до сверхсветовой скорости. По утверждению В.П. Саранцева, существует ряд возможностей получения колец размерами $10^{-3} \div 10^{-4}$ см. Такими сгустками можно ускорить протоны до скорости большей 1.3c.

Проводились работы по получению электронных сгустков с еще большим числом электронов. К.В. Ходатаев [68] предвидел возможность получения малых сгустков с $4\cdot10^{16}$ электронов. Как сообщалось в [28], в нашей стране были получены сгустки с $2.5\cdot10^{15}$ электронов. Таким образом при целенаправленном создании электронных сгустков можно достигнуть необходимой плотности частиц в них, чтобы иметь возможность ускорять протоны до скорости 1.3c и выше.

10.4. МНОГОСТУПЕНЧАТЫЕ УСКОРИТЕЛИ СВЕРХСВЕТОВЫХ ЧАСТИЦ

Рассмотренными выше способами один сгусток может сообщить другому относительно себя скорость не большую c_1. Получить на ускорителях эти сгустки можно также со скоростью не большей c_1. Поэтому удвоенная скорость света – это наибольшая скорость, до которой можно ускорить частицы указанным способом. Изложенным ниже многоступенчатым способом можно превзойти и удвоенную скорость света.

Для получения протонов со световой скоростью требуются большие ускорители. Еще больших затрат потребует ускорение тяжелых ионов до световой скорости. Но если ускорять электронными сгустками протоны или ионы до этой скорости, то затраты значительно снизятся. Сгустком электронов в $10^{14} \div 10^{15}$ частиц и скоростью c можно по схеме, представленной на рис. 10.6, ускорить до световой скорости протонный сгусток с начальной

скоростью 0.7c. В положении I в этом случае сгустки имеют разные скорости и расположены как можно ближе друг к другу, т.е. l – минимальное.

Так как относительная скорость протонного сгустка вначале отрицательна $u = 0{,}7c - c = -0{,}3c$, то он будет удаляться, пока не достигнет относительной скорости $u = 0$, а по отношению к установке его скорость будет c. Затем он начнет приближаться к электронному сгустку и его скорость относительно установки станет равной 1.3c. Такое ускорение возможно, если удастся вначале свести сгустки на минимальное расстояние $l \approx d$.

Сверхсветовой протонный сгусток можно ускорять по схеме рис. 10.6 далее таким же, но другим электронным сгустком со скоростью $\upsilon = c$. В этом случае в начале ускорения протоны будут иметь скорость относительно электронов $u_0 = 1.3c - c = 0.3c$. После приближения протонного сгустка к электронному относительная скорость первого, как это следует из (7.46), будет $u_{0=} 0.412c$. То есть после второй ступени ускорения протонный сгусток будет иметь скорость 1.412c. Данный сгусток можно ускорять электронным со световой скоростью и далее, но с каждым разом приращение скорости будет уменьшаться.

Во всех ступенях ускорения можно использовать электронные сгустки с одного и того же ускорителя, посланные в разные моменты времени. При многоступенчатом способе можно использовать электронные сгустки и с меньшим на порядок числом частиц, например $10^{13} \div 10^{14}$, но тогда потребуется большее число ступеней. Предпочесть числу ступеней интенсивность сгустка или наоборот можно, сравнивая затраты на создание этих установок.

Такой многоступенчатый способ ускорения позволяет ускорять частицы до скорости 2c и больше. С этой целью необходимо получить сверхсветовой сгусток электронов и сверхсветовой сгусток протонов, а затем их снова свести для ускорения одного другим. И если скорость сгустков была 1.5c, то при сообщении ускоряемому относительной скорости 0.3c, его скорость относительно установки будет 1.8 c. После второго этапа такого ускорения он получит скорость 1.912 c и т.д.

10.5. УСКОРЕНИЕ ОДИНОЧНЫХ ЧАСТИЦ ДО СВЕРХСВЕТОВОЙ СКОРОСТИ

Рассмотрим столкновительное ускорение одноименно заряженных частиц. Пусть протон со скоростью υ_0 на бесконечности (рис. 10.8) направлен на неподвижный позитрон. Тогда относительно протона позитрон имеет скорость $\upsilon_{rel} = \upsilon$ в сторону протона, т.е. он приближается к протону и тормозится. Его скорость, согласно (7.46), запишется так:

$$\upsilon_{\text{rel}} = c_1 \sqrt{1-(1-\beta_0^2)\exp\left[\frac{2\mu_1}{c_1^2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}\right)\right]}. \qquad (10.27)$$

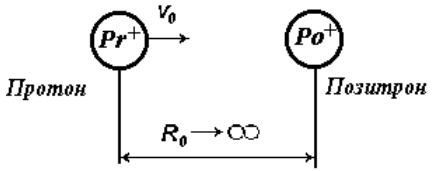


Рис. 10.8. Начало этапа ускорения.

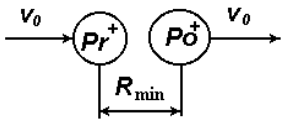


Рис. 10.9. Средний этап ускорения.

При приближении на наименьшее расстояние $R_{\min}$ (рис. 10.9) относительная скорость станет равной нулю. Из (10.27) определим $R_{\min}$, подставляя $\upsilon_{\text{rel}} = 0$ и $R_0 \to \infty$:

$$R_{\min} = -\frac{2\mu_1}{c_1^2 \ln\left(1-\beta_0^2\right)}. \qquad (10.28)$$

При этом масса протона m_{pr} значительно больше массы позитрона m_{po} и его скорость не изменится, т.е. $\upsilon_{pr} = \upsilon_0$. Такую же скорость будет иметь и позитрон в точке сближения.

После сближения на минимальное расстояние позитрон начинает удаляться от протона (рис. 10.10). Его скорость при удалении на бесконечность определится из (10.27) при $\upsilon_0 = 0$, $R \to \infty$ и $R_0 = R_{\min}$ в следующем виде:

$$\upsilon_{rel} = \upsilon_0. \qquad (10.29)$$

Следовательно полная скорость позитрона будет

$$\upsilon_{po} = \upsilon_0 + \upsilon_{rel} = 2\upsilon_0.$$

Рассчитаем начальную скорость протона, которая позволяет частицам сблизиться на расстояние, равное сумме радиусов протона и позитрона $R_{\min} = R_{pr} + R_{po}$. Из (10.28) находим

$$\beta_0 = \sqrt{1 - \exp\frac{-2\mu_1}{c_1^2\left(R_{pr}+R_{po}\right)}} = \sqrt{1-\exp\alpha_{pr}}\,, \qquad (10.30)$$

где

$$\alpha_{pr} = -\frac{2\mu_1}{c_1^2\left(R_{pr}+R_{po}\right)} = -\frac{2e^2}{c_1^2 m_{po}\left(R_{pr}+R_{po}\right)}. \qquad (10.31)$$

После подстановки параметров получаем α_{pr} = -1.34, а начальная скорость протона β_0 = 0,859. При этой скорости воздействия протона на позитрон последний ускорится до $\beta_{po} = 2\,\beta_0 = 1.72c$, т.е. мы имеем сверхсветовые позитроны. Если скорость протона будет больше $0.859c$, то частицы сблизятся на расстояние меньшее суммы их радиусов, поэтому

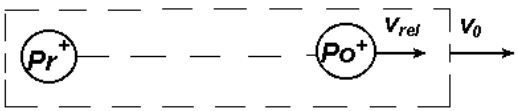


Рис. 10.10. Конец этапа ускорения.

дальнейшее их взаимодействие не будет определяться приведенными соотношениями. Отметим, что этим способом можно также ускорять электроны антипротонами

Рассмотренное ускорение можно осуществить, бомбардируя пучком тяжелых частиц малоподвижное облако легких частиц. Вероятность прямого столкновения будет зависеть от плотностей ансамблей этих частиц. Далее необходимо отделить сверхсветовые частицы от тяжелых досветовых частиц. Последние можно отклонить поперечным электромагнитным воздействием. После отклоняющих устройств вдоль оси установки будут двигаться только сверхсветовые частицы. Их можно будет обнаружить по черенковскому излучению. По анализу результатов столкновения можно определить плотность вероятности углового распределения частиц, которая будет характеризовать наличие сверхсветовых частиц. При этом могут быть использованы параметры траекторий, приведенные в Приложении [59], а также в работе [60].

Мы рассмотрели столкновительное ускорение одноименно заряженных частиц. Таким же способом можно ускорять и разноименно заряженные частицы, например бомбардируя протонами облако электронов, можно ускорять последние до сверхсветовой скорости. Однако это возможно при особых условиях, которые выявляются при анализе траекторий, представленных в гл. 5. Протон со скоростью $\upsilon_0 = 0.67c$, направленный на электрон с прицельным расстоянием $a = 1.2\cdot10^{-12}$ см (рис. 10.11), захватит его на гиперболовидную траекторию вокруг себя, по которой электрон обернется вокруг протона за период на 360° (см. траекторию 1.1.3.7 на с. 193 из [59] или траекторию *7* на рис. 5.1).

На этапе I протон со скоростью υ_0 (см. рис. 10.11) налетает на электрон с прицельным расстоянием a. На этапе II показано движение электрона относительно протона. Имея начальную скорость на бесконечности ($-\upsilon_0$), он огибает протон по гиперболовидной траектории, приближаясь к нему в перицентрии на расстояние $R_p = 0.9\ 10^{-12}$ см. Затем по нижней ветви удаляется в бесконечность со скоростью υ_0 относительно протона. На этапе III представлены скорости частиц относительно установки после взаимодействия. Электрон движется в направлении движения протона и имеет сверхсветовую скорость $2\upsilon_0 = 1.34c$.

Процесс ускорения происходит в пределах расстояния 10^{-9} см, т.е. практически в точке, поэтому длина установки не будет большой. Однако электроны должны быть свободные, так как связанные другим взаимодействием электроны не будут создавать необходимые ситуации для сверхсветового ускорения: при бомбардировке протонами атомов их электроны могут не ускориться до сверхсветовой скорости.

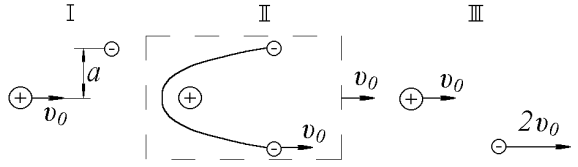


Рис. 10.11. Этапы ускорения при столкновении разноименно заряженных тел.

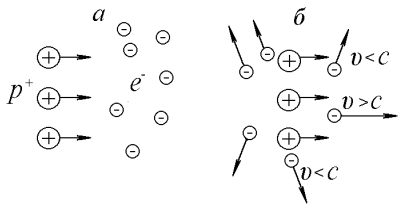


Рис. 10.12. Ускорение электронов при бомбардировке протонами электронного ансамбля: *а* - перед столкновением; *б* - в процессе столкновения.

Для реализации этого способа пучком моноскоростных протонов можно бомбардировать облако неподвижных свободных электронов (рис. 10.12,*а*). Из-за разных прицельных расстояний будут получаться разные траектории электронов (см. рис. 10.12,*б*), из которых световой скоростью обладают только электроны, движущиеся в направлении движения пучка протонов. Все статические характеристики процесса ускорения могут быть рассчитаны, если известны плотности ансамблей частиц.

Следует отметить, что траектория ускорения немного будет отличаться от траектории *7* на рис. 5.1. Рассмотрим результаты расчетов по поиску траектории, которая приведет к наибольшей сверхсветовой скорости:

α_1	β_p	β_{ox}	φ_a
-0.25	0.96	-0.617	2.45
-0.28	0.958	-0.743	3.09
-0.3	0.951	-0.704	3.11

Здесь β_{ox} – составляющая приведенной скорости в направлении оси *x* на рис. 5.1, а φ_a – угловой полупериод в радианах. Как видим, после ускорения по схеме, представленной на рис. 10.11 скорость частицы может достигнуть $\upsilon = 2\beta_{ox} c = 1.5c$ скорости света. Однако параметры этих траекторий находятся в узких пределах. Незначительное изменение параметров вызывает отклонение электронов в перпендикулярном направлении к линии движения, либо захвату их протоном, либо отклонение в нужном направлении, но с малой скоростью.

10.6. ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ СВЕРХСВЕТОВЫХ ДВИЖЕНИЙ.

Космические частицы порождают широкие ливни элементарных частиц, которые одновременно покрывают большие территории на поверхности Земли. По всей видимости, это обилие частиц создает одна сверхсветовая частица. Это свойство может быть использовано для дальнейшей космической связи. Небольшое количество сверхсветовых частиц может быть направлено к другой планете солнечной системы или даже к планете другой звезды. Такие частицы не будут рассеиваться подобно радиоволнам или свету и терять свою интенсивность. При вхождении в атмосферу планеты они создадут ливни частиц, которые будут зафиксированы на больших расстояниях от точки прицеливания. Поэтому уменьшается вероятность промаха

посланного сигнала. Информация при этом будет содержаться во временных промежутках между посланными сверхсветовыми частицами. По-видимому, связь с помощью сверхсветовых частиц является самой энергетически выгодной.

Осколки ядер и разнообразие элементарных частиц, наблюдаемых в широких атмосферных ливнях, свидетельствуют, что сверхсветовые частицы могут эффективно разрушать вещество. Следовательно, пучок сверхсветовых частиц определенной интенсивности может быть более эффективным оружием, чем лазерный луч. Такой пучок сверхсветовых частиц может быть использован для разделения на части приближающегося к Земле астероида. После падения на Юпитер в 1995 г. фрагментов кометы Леви - Шумекера проблема противоастероидной защиты Земли была осознана человечеством. И сверхсветовые частицы здесь могут быть использованы разными способами. Кроме эффективного "ножа" для разделки астероидов на части пучок сверхсветовых частиц может применяться для дальней локации астероидов. Сверсветовые частицы, промодулированные по времени, после столкновения с астероидом выбьют часть частиц с противоположно направленной скоростью, которые, войдя в атмосферу Земли, создадут ливни атмосферных частиц. В результате их регистрации будет установлено расстояние до астероида, а также другие его параметры.

Другой способ противоастероидной защиты изменение траектории астероида с помощью реактивной струи. Как видно из формулы Циолковского (7.10), чем больше скорость струи, тем меньше требуется топлива и тем меньше будут энергетические и материальные затраты. При сверхсветовой скорости реактивной струи эффективность реактивного двигателя наибольшая.

Реактивные сверхсветовые движители – единственное средство, которое позволит человеку побывать на планетах других звезд. 12-14 августа 1997 г. американские астронавтические ассоциации провели рабочее совещание (Breakthrough Propulsion Phisics Workshop) по поиску стратегии исследований, которая позволит человеку создать движители для межзвездных путешествий. Анализ материалов этого совещания показал, что альтернативы реактивному сверхсветовому движителю не существует.

Рассмотрим полет космического корабля с таким движителем до ближайшей звезды, отстоящей от нас на расстояние $l = 3$ с.г. (световых года). Будем совершать полет с земным ускорением g. За год полета $t_1 = 1$ год корабль наберет световую скорость

$$\upsilon = gt_1 \approx c \qquad (10.32)$$

и пройдет расстояние

$$l_1 = gt_1^2/2 = 0.5 \cdot ct_1 = 0.5 \text{ с.г.} \qquad (10.33)$$

Согласно формуле Циолковского (7.10), масса корабля уменьшится за счет выброса реактивной струи со световой скоростью $u = c$:

$$m_1 = m_0 \exp(-\upsilon / u) = m_0 / e, \qquad (10.34)$$

где e = 2.73 – основание натурального логарифма. Затем корабль в течение t_2 = 2 годам движется со скоростью $\upsilon = c$ по инерции и проходит расстояние l_2 = 2 с.г, после чего в течение t_3 = 0.5 года поворачивает двигатель против движения и сбрасывает скорость до нулевой. За это время он проходит, в соответствии с (10.33), оставшееся расстояние l_3 = 0.5 с.г, а масса его уменьшается до

$$m_2 = m_1 \exp(-\upsilon/u) = m_0 \exp(-2\upsilon/u) = m_0/e^2. \qquad (10.35)$$

Таким образом корабль за 4 года может достигнуть звезды, удаленной от Земли на 3 световых года. Совершая обратный путь в такие же три стадии: ускорение 0.5 года, полет по инерции 2 года, торможение 0.5 года – корабль будет, согласно (10.35), иметь массу при возвращении на Землю

$$m_B = m_2 \exp(-2\upsilon/u) = m_0 \exp(-4\upsilon/u) = m_0/e^4, \qquad (10.36)$$

т.е. полезная масса от первоначальной массы корабля составит $m_B = 0.018 m_0$. Это вполне реальное соотношение, которое позволяет согласовать в конструкции корабля энергетические потребности и технические возможности. Для сравнения рассмотрим возвращаемую массу корабля при обычной реактивной струе со скоростью $u \approx 3$ км/с, т.е. $u = 10^{-5}$ с. Согласно (10.36), $m_0 = m_B \exp(4 \cdot 10^5)$. Это астрономическое число для начальной массы корабля m_0 свидетельствует о том, что другим способом достичь ближайших звезд невозможно.

Мы рассмотрели пример путешествия к ближайшей звезде с ускорением g. Вся "дорога" заняла 8 лет. При $\upsilon > c$ время полета сократится, т.е. за это время можно совершить полет и до более далеких звезд. Приведенные способы ускорения частиц до сверхсветовой скорости могут быть использованы для сверхсветового реактивного движителя, схематически представленного на рис. 10.13. Он состоит из двух ускоряющих устройств для тяжелых частиц: *1* – для протонов (*Pr*); *2* – для антипротонов (*aPr*) и двух отклоняющих устройств: *3* – для антипротонов и *4* – для протонов. Эти устройства обеспечивают циркуляцию тяжелых частиц в плоскости *xy* по двум контурам: по контуру I – протонов; по контуру II – антипротонов. В устройствах *1* и *2* тяжелые частицы поочередно вводятся со скоростью υ_0 на осевую линию *x* реактивного движителя. В отклоняющих устройствах эти частицы выводятся из осевой линии: в контур I – протоны и в контур II – антипротоны.

В перпендикулярной к чертежу плоскости (см. сечение *A-A*, плоскость *xz*) расположены два контура эжекции и ускорения легких частиц: *5* – для электронов (*e*), *6* – для позитронов (*po*). Эти устройства поочередно со скоростью $\upsilon_0 - \delta\upsilon$ вводят легкие частицы на осевую линию *x* реактивного движителя.

На осевой линии *x* происходит столкновительное ускорение одноименно заряженных частиц, подробно рассмотренное в п. 10.3 и 10.5. В левой части (рис. 10.13) показана начальная стадия ускорения электрона антипротоном. Так как скорость впрыскивания электрона меньше скорости антипротона, то антипротон догоняет его. При этом скорость электрона растет.

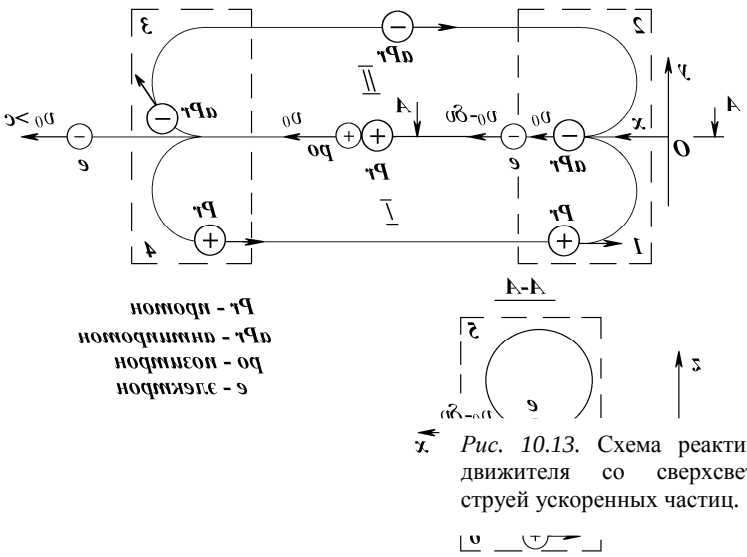


Рис. 10.13. Схема реактивного движителя со сверхсветовой струей ускоренных частиц.

В момент сближения скорость электрона станет равной υ_0, затем электрон начнет удаляться от антипротона, а его скорость будет возрастать. В средней части движителя показан момент сближения при взаимодействии протона и позитрона, а в правой части – завершающая фаза взаимодействия антипротона с электроном. Антипротон отклоняющим устройством *3* возвращается в циркуляционный контур II, а сверхсветовой электрон продолжает движение вдоль оси *x*. Таким образом происходит поочередное выбрасывание разноименно заряженных частиц, поэтому движитель остается электрически нейтральным. Благодаря симметрии устройств в нем не создаются вращающие моменты. При $\upsilon_0 = 0.859\,c$ скорость реактивной струи, как показано в п. 10.5, будет равна 1.72 скорости света.

Мы рассмотрели ускорение одиночных частиц, однако схема применима и для сгустков частиц. При этом должно соблюдаться условие, чтобы ускоряющие сгустки имели массу большую, нежели масса ускоряемых сгустков.

Перспективы использования сверхсветовых частиц не ограничиваются приведенными примерами. Как любое новое явление, они будут иметь необычные свойства, которые представят человеку новые технологические возможности.

ГЛАВА 11

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

11.1. СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЯГОТЕНИЯ

Все тела в окружающем мире притягиваются друг к другу. Все предметы падают на поверхность Земли, притягиваясь к ее центру. Луна, благодаря притяжению Земли, обращается вокруг нее и не отрывается от Земли. Солнце притягивает Землю, и она движется вокруг него. В околосолнечном пространстве за счет притяжения Солнца движутся планеты, астероиды и другие тела; в совокупности они представляют собой чечевицеобразную структуру, которая существует благодаря тяготению. Звезды со своими планетными системами притягиваются друг к другу и образуют звездные ассоциации и скопления. Последние за счет взаимного притяжения образуют галактики, которые также за счет притяжения объединяются в метагалактики. Итак, тяготение действует на огромных расстояниях, поэтому вполне оправдано название "всемирный закон тяготения" для выражения силы

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2 \vec{R}}{R^3} \qquad (11.1)$$

взаимодействия двух тел, массы которых m_1 и m_2. Закон (11.1) И. Ньютон ввел на основе анализа и обобщения наблюдаемых гравитационных взаимодействий. Гравитационная постоянная G была определена на основе опыта 1798 г. Г. Кавендиша. Становление закона (11.1) было обусловлено большой работой многих ученых при расчете движений небесных тел.

Ускорение является непосредственным выражением воздействия, поэтому последнее, как уже отмечалось ранее, можно описывать без применения силы. Возможно, такое описание будет проще и меньше будет поводов для ошибочных выводов. Один из них, который вытекал из силового метода описания тяготения, заключался в поиске причины силы тяготения. Представлялось, что если есть сила воздействия на тело, то должен быть субъект, который прикладывает её. Он должен непосредственно примыкать к телу и оказывать на него влияние. Выдвигались различные виды таких субъектов, например в виде частиц эфира, которые втягиваются тяготеющим телом, и этим потоком затягивается притягиваемое тело. Несмотря на то что, механизмы воздействия придумываются до сих пор, ни один из них не в состоянии дать непротиворечивую трактовку тяготения.

Это одно направление поиска механизмов близкодействия тяготения, другое заключается в полевом представлении тяготения. По аналогии с электромагнитным полем предполагается гравитационное поле. Правда, иллюзию близкодействия здесь создают математические образы, например градиент потенциала создает силу. Но физические механизмы на уровне абстракции уже стали привычными, так что полевое направление свободно развивалось, пока в ОТО не было введено геометрическое объяснение тяготения в виде искривления пространства-времени.

При полевом объяснении тяготения по аналогии с электромагнитным полем возник вопрос о скорости распространения тяготения. Движение Луны вокруг Земли, движение Земли и планет при внимательном анализе оказалось немного отличающимся от результатов решения задачи взаимодействия двух тел. Для объяснения различий выдвигались массы гипотез, в том числе предполагались новые законы всемирного тяготения. Один из них связан со скоростью распространения тяготения, равной скорости света. Однако ученые, учитывая воздействие других тел солнечной системы и привлекая особенности формы главного тела, объяснили эти различия. Таким образом закон (11.1) с каждым новым объяснением становился все более обоснованным.

Здесь следует отметить, что в 1787 г. П. Лаплас в работе "Изложение системы мира", а также в "Трактате по небесной механике" [99] из анализа движения Луны пришел к выводу, что если скорость тяготения и конечна, то она должна в 100 млн раз превышать скорость света. Тем не менее гипотеза о световой скорости тяготения впоследствии выдвигалась неоднократно. Наибольшую актуальность она приобрела при рассмотрении прецессии перигелиев планет.

В соответствии с законом (11.1) замкнутая орбита является эллипсом (см. формулу (5.3)), и прецессии перицентрия нет. Так как прецессии наблюдались, то учеными, в том числе и И. Ньютоном, подбирались новые законы тяготения, которые позволяли бы учесть прецессию. Один из частных случаев предложенного И. Ньютоном закона использовал У. Леверье [45] в следующем виде:

$$\vec{F} = -G\frac{m_s m \vec{R}}{R^3} + \vec{P}, \qquad (11.2)$$

где m_s – масса Солнца; m – масса Меркурия, а $\vec{P}$ – возмущающая сила, которая выражает воздействие остальных планет.

В 1859 г. У. Леверье, согласно Н.Т. Роузверу [45], привел в своей работе [101] рассчитанное согласно (11.2) смещение перигелия Меркурия и вклад в него планет:

Планета	Вклад по [45]	Вклад по [50]
Венера	280.6″	277.856″
Земля	83.6″	90.038″
Марс	2.6″	2.536″
Юпитер	152.6″	153.584″
Сатурн	7.2″	7.302″
Уран	0.1″	0.141″
Нептун	---	0.042″
Сплюснутость Солнца	---	0.010″
Всего за столетие	526.7″	531.509″

В известных нам литературных источниках по ОТО утверждается, что рассчитанные $\sim 530''$ в столетие отличается на $\sim 40''$ от действительно наблюдаемого смещения перигелия, величина которого не приводится. Следует отметить, что неувязка расчета в $43''$, ввиду чрезвычайно малой величины прецессии перигелия (он рассматривается за 100 земных лет, т.е. за 415 меркурианских лет), является достаточно хорошим прогнозом. Во-вторых, этот результат получен при решении приближенной задачи (11.2), а не точной, когда к каждому небесному телу прикладывается сила не тольо от Солнца, но и от каждой из планет. То есть, не решается в полном объеме задача многих тел. В-третьих, параметры всех воздействующих тел – массы, положения на траекториях и параметры траекторий – известны с недостаточной точностью, чтобы надеяться на лучшее совпадение даже при решении задачи многих тел. В-четвертых, имеется много других факторов: воздействие огромного количества ненаблюдаемых малых тел, форма Солнца, околосолнечное вещество и др., которые могут существенно повлиять на вращение перигелия Меркурия. Несмотря на это, многими учеными выдвигались различные гипотетические законы тяготения для объяснения аномалии (т.е. рассогласования $43''$) смещения перигелия Меркурия. Одна из них – световая скорость распространение тяготения. Разными авторами предлагался ряд соотношений для силы тяготения, которая зависит от скорости движения и ускорения, что обусловлено конечной скоростью распространения тяготения. Это сила Вебера (2.11) и подобные ей. По-видимому, наибольшее значение из них имеет сила [45]

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{R}\left[1-\frac{3}{c^2}\left[\frac{\mathbf{d}R}{\mathbf{d}t}\right]^2+\frac{6R}{c^2}\frac{\mathbf{d}^2R}{\mathbf{d}t^2}\right], \qquad (11.3)$$

выведенная Паулем Гербером и опубликованная в 1898 г. [91]. В результате решения задачи двух тел при силе (11.3) он получил следующее выражение для смещения перигелия:

$$\delta\varphi_T = \frac{24\,\pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1-\varepsilon_t^2)}, \qquad (11.4)$$

которое для Меркурия равно 41″ в столетие. Выражение (11.4) было известно Э. Маху [36] и А. Эйнштейну [88] и широко обсуждалось в 1916 – 1917 гг. [45]. В 1915 г. А. Эйнштейн приводит выражение (11.4), основываясь на общей теории относительности [76].

Как формула П. Гербера (11.3), так и метод ОТО основаны на гипотезе о скорости тяготения, равной скорости света. Несмотря на то что полученное смещение (11.4) близко к рассчитанной аномалии перигелия Меркурия в 39", оно не может являться каким-либо доказательством, а тем более доказательством световой скорости тяготения. Во-первых, существование самой аномалии, как мы уже упоминали, обусловлено приближенным характером решения задачи. Во-вторых, учет световой скорости гравитации дал смещение перигелия 41", а наблюдается величина 527" + 39" = 566", т.е. на порядок

большая. Нет никаких доказательств того, что световая скорость тяготения улучшает результат. Величина 41" рассчитана для задачи двух тел. Допустим, что была решена задача многих тел на основании закона тяготения (11.1), и она дала результат смещения перигелия 527" в столетие. Затем задача многих тел была решена на основании закона тяготения со световой скоростью распространения, и был получен результат смещения 527" + 41" = 568". Тогда можно было бы утверждать, что световая скорость тяготения значительно улучшает результат. Так как эти задачи не решались, то предположение о световой скорости тяготения лишено всякого основания.

Как мы уже отмечали, в общей теории относительности была введена световая скорость тяготения с целью создания единой теории поля. Соотношение (11.4) являлось одним из основных доказательств справедливости ОТО. Вторым доказательством стало искривление луча света, проходящего вблизи Солнца, и третьим – уменьшение частоты света при удалении его от притягивающего центра. Что касается отклонения луча, то, как мы неоднократно показывали в гл. 5 и 9, при световой скорости тела воздействие, распространяющееся с такой же скоростью, оставляет траекторию тела неискривленной. Здесь ситуация идентична ситуации с "черной дырой" и выражена таблицей в п. 9.1. Искривление луча света возможно только в случае, если свет состоит из весомых частиц и скорость тяготения бесконечна.

При прохождении Венеры по диску Солнца в 1761 г. Михайло Ломоносов наблюдал выпучивание краешка Солнца при сходе Венеры с диска: "При выступлении Венеры из Солнца, когда передний ее край стал приближаться к солнечному краю и был... около десятой доли Венерина диаметра, тогда появился на краю Солнца пупырь... Сие не что иное показывает, как преломление лучей солнечных в Венериной атмосфере" [31]. Заметное для глаза преломление должно иметь величину порядка градуса. Не меньшее преломление лучей должно быть в атмосфере Солнца. В связи с этим, как расценивать подтверждаемое наблюдениями отклонение луча света $\Delta\varphi = 1.75"$ [26] за счет гравитационного поля Солнца?

Покраснение света при его удалении от звезды возможно, если свет не является воздействием, а есть некоторая субстанция, которая имеет массу, посредством которой звезда будет замедлять движение света и изменять его частоту. Таких свойств света не обнаружено. Нет и покраснения света. Согласно [26], свет, распространяющийся между точками с гравитационными потенциалами Φ_1 и Φ_2, изменяет свою частоту на величину

$$\Delta f = f(\Phi_1 - \Phi_2)/c^2 \ . \qquad (11.5)$$

Гравитационный потенциал на поверхности звезды $\Phi_1 = -Gm_s/R_s$, а в точке наблюдения $\Phi_2 \to 0$. Тогда свет, излучаемый звездой с частотой f, будет наблюдаться с частотой, уменьшенной на величину

$$\Delta f = -f\,\frac{R_g}{2\,R_s}. \qquad (11.6)$$

Для нейтронной звезды ее радиус R_s приближается к гравитационному радиусу R_g и $\Delta f = f/2$. Так как выражение (11.5) приближенное и справедливо для слабого поля (для сильных полей (11.6) должно быть $\Delta f = - f R_g / R_s$), то должно быть еще более существенное изменение частоты. В пределе при $R_s = R_g$ частота света стремится к нулю. Однако открытые в XX в. белые карлики, нейтронные звезды, кандидаты в "черные дыры" такого изменения частоты не дают. Следовательно, "экспериментальные подтверждения" трех эффектов в ОТО остаются на совести ученых, их провозгласивших. Для каждого ученого они должны быть наглядным примером его ответственности за представляемые обществу результаты.

Четвертый эффект ОТО – гравитационные волны. Они также являются следствием световой скорости тяготения. Начатые многими учеными во второй половине 20-ого века работы по поиску гравитационных волн закончились безрезультатно. Гравитационные волны не обнаружены.

Отметим, что наблюдаемое смещение перигелия Меркурия в разных источниках представляется разными величинами. Например, в рецензии журнала "Известия АН. Беларусии" на статью Д.В. Тальковского сообщается: "... наблюдаемая прецессия перигелия Меркурия составляет 5599.74" в столетие; за счет влияния несферичности Солнца, возмущений со стороны планет и других факторов астрономам удалось объяснить 5557.18" из этой величины в рамках ньютоновской теории тяготения. Расхождение на 43" в столетие составляло большую проблему для теоретической астрономии, и его объяснение Эйнштейном в рамках ОТО стало триумфом последней". Здесь наблюдаемая величина в 10 раз больше прежней. Такого же порядка величина смещения на основе сравнения орбит Меркурия 1850 и 1950 гг.. приводится в работе [21]: "Этот эффект так мал, что за целых сто лет перигелий Меркурия поворачивается лишь на 1°33'20" (5600"), как показано на рис. 5.3 (см. [21]). Из этого наблюдаемого полного поворота теория Ньютона может объяснить только поворот на 1°33'37" (5557") за столетие. Остается избыточное движение перигелия 43 секунды дуги за столетие... Эйнштейн получил для скорости прецессии в точности 43" за столетие – именно ту величину, которую не могла объяснить ньютоновская теория."

Итак, наблюдаемая величина смещения равна 5600" в столетие, а не 566". Величина наблюдаемого смещения 5600" подтверждается также в третьем источнике [64]. Тогда следует, что рассчитанное по ньютоновской теории смещение составляет 5557" в столетие, а не 526.7" или 531.5", как показано двумя источниками в вышеприведенной таблице. Тем не менее объяснение расхождения между наблюдением и расчетом в 41" или 43" стало триумфом теории относительности. Так как современная физика построена на теории относительности, то приведенный выше "триумф" является свидетельством глубокого кризиса физики XX в.

Представленный анализ свидетельствует, что нет никаких доказательств световой скорости тяготения. Поэтому вопрос о скорости распространения гравитационного воздействия остается открытым. Как мы показали в гл.5, для взаимодействий, распространяющихся с ограниченной скоростью угловой полупериод конечных траекторий $\varphi \neq \pi$, т.е. перицентрий орбиты будет смещаться в пространстве. Эту задачу мы решали при большой скорости тел. Далее мы рассмотрим ее при малых скоростях движения тел.

Небольшие смещения параметров орбиты небесных тел – вращение перицентрия, изменение его длины, наклона плоскости орбиты и вращение ее в пространстве – представляют особый интерес с позиции существования и развития солнечной системы, истории Земли и изменения ее климата. Выдвинутая в 1864 г. Дж. Кроллем и развитая М. Меланковичем астрономическая теория наступления ледниковых эпох находит широкую поддержку многих ученых [18]. Если тяготение имеет конечную скорость распространения, то на больших временных периодах это свойство может повлиять на вращение перигелия нашей планеты. Изменение эксцентриситета и наклона плоскости ее орбиты обусловлено воздействием других планет. Актуальной становится проблема многих тел, которая далее будет рассмотрена.

11.2. ПРЕЦЕССИЯ ПЕРИГЕЛИЯ МЕРКУРИЯ

Для определения действительной прецессии перигелия Меркурия необходима обработка многовековых наблюдений планеты в системе координат, которая, в свою очередь, подвержена изменениям за счет вековых возмущений орбиты Земли и движения солнечной системы. Поэтому результат зависит от метода обработки данных наблюдения. В настоящее время приводятся законы изменения перигелия планет (см. например Астрономический ежегодник на1949 г.), основанные на теории С. Ньюкома (1835 - 1909), которые для первых трех имеют следующий вид:

Меркурий – $75^\circ 53' 58.91'' + 5599.76'' T + 1.061'' T^2$;

Венера – $130^\circ 09' 49.8'' + 5068.99'' T - 3.515'' T^2$;

Земля – $101^\circ 13' 15'' + 6189.03'' T + 1.63'' T^2 + 0.012'' T^3$,

где T – время в столетиях, отсчитываемое от эпохи 1900 г. Как отсюда видно, линейная составляющая прецессии Меркурия равна $5599.76''$ в столетие.

Теперь мы рассмотрим какой вклад в прецессию может дать учет скорости распространения тяготения при взаимодействии двух тел. Как было показано в гл. 4, из электродинамики следует, что при взаимодействиях, зависящих от скорости относительного движения двух объектов, сила определяется выражением (4.58). Из решения Даламбера (3.28) следует, что такое воздействие распространяется с конечной скоростью. Предполагавшиеся ранее законы взаимодействия, например (2.11), (2.12), (11.3) и др., основывались на разных гипотезах. В специальной и общей теории относительности описание взаимодействий, несмотря на то что оно выражено в виде изменения пространственно-временных параметров, построено на зависимостях электродинамики, и, как мы уже показали в п. 4.6, релятивистская задача двух тел (4.90) сводится к нашим уравнениям траектории (4.80), (4.82). Поэтому последние представляют точное решение задачи двух тел, взаимодействие которых распространяется с конечной скоростью.

Результаты интегрирования уравнений (4.80), (4.82), как уже отмечалось, почти для 100 траекторий представлены в книге [59], а периоды орбит и радиусы их апоцентриев для конечных траекторий даны в Приложении 5. На рис. 5.5 эти траектории изображены при $\alpha_1 = -0.7$. При скорости в перицентрии, составляющей 0.1 от скорости света ($\beta_p = 0.1$), за один период перицентрий орбиты смещается на $\delta\varphi_T^\circ = 2(\varphi_a - \pi) = 0.8°$. С увеличением скорости β_p величина смещения перицентрия для траекторий *2, 3, 4* принимает значения $\delta\varphi_T^\circ = 9^\circ;\ 35^\circ;\ 296.2^\circ$ соответственно. При предельной скорости $\beta_{pc} = 0.714$ смещение перицентрия стремится к бесконечности. Как упоминалось ранее, в этом случае частица захватывается притягивающим центром на круговую орбиту. Наряду с ростом $\delta\varphi_T$ при увеличении скорости происходит уменьшение радиуса апоцентрия с $\overline{R}_a = 2.482$ до $\overline{R}_a = 1$.

На рис. 11.1 представлено изменение относительного периода орбиты $\overline{\varphi}_T$, где

$$\overline{\varphi}_T = \varphi_T / 2\pi, \tag{11.7}$$

$$\varphi_T = 2\varphi_a \tag{11.8}$$

в зависимости от β_p при разных параметрах траекторий α_1. Вертикальными линиями обозначены асимптоты, к которым стремятся кривые при достижении предельной скорости β_{pc}. При фиксированном α_1 относительный радиус апоцентрия с ростом скорости β_p уменьшается с максимального значения при $\beta_p = 0$ до $\overline{R}_a = 1$ при $\beta_p = \beta_{pc}$. Поэтому смещение перицентрия стремится к бесконечности у асимптоты, но в этом случае орбита является окружностью, у которой перицентрий как таковой отсутствует.

Как видно из рис. 11.1, с увеличением абсолютной величины α_1 смещение перицентрия увеличивается при одной и той же скорости в перицентрии β_p. Но с увеличением $|\alpha_1|$ уменьшается предельное значение скорости β_{pc}, поэтому имеется оптимум смещений в области $\alpha_1 = -0.7$. Например, при $\alpha_1 = -0.7$, возможна орбита с относительным периодом $\overline{\varphi}_T = 1.5$, т.е. за два периода частица будет совершать три целых оборота, и ее двухпериодная

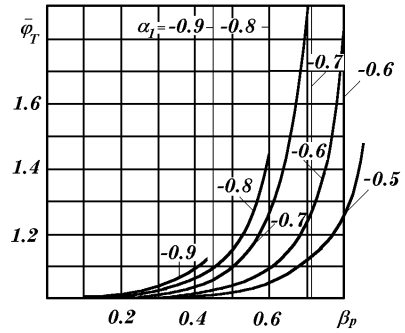


Рис. 11.1. Относительный период орбит ($\overline{\varphi}_T = \varphi_T/2\pi$) в зависимости от скорости в перицентрии β_p при разных параметрах траекторий α_1. Вертикальные асимптоты имеют абсциссы $\beta_p = \beta_{pc}$:

α_1	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9
β_{pc}	0.866	0.8	0.714	0.6	0.435

траектория будет стабильна в пространстве. При относительном периоде

$$\overline{\varphi}_T = 1 + 1/k \tag{11.9}$$

в пространстве будут стабильны *k*-периодные траектории. На них частица за *k* периодов будет совершать $k + 1$ оборот, после которых она снова продолжит движение по той же траектории. Если $\overline{\varphi}_T = 2$, то частица за один период будет совершать два оборота. Ее траектория будет представлять собой две близкие к окружности кривые, вложенные одна в другую и соприкасающиеся на горизонтальной оси.

С увеличением $|\alpha_1|$ радиус апоцентрия, как видно из Приложения 5, уменьшается от $\overline{R}_a \to \infty$ при $\alpha_1 = -0.5$ до $\overline{R}_a = 1$ при $\alpha_1 = -1$. С увеличением β_p радиус апоцентрия также уменьшается и приближается к $\overline{R}_a = 1$ при $\beta_p = \beta_{pc}$.

Движение планет в перицентриях происходит с малыми скоростями. Наблюдаемые параметры планет пересчитываются в параметры их траекторий. На этой стадии возможны различные алгоритмы расчета и различные параметры траекторий. Мы будем основывать расчеты на следующих данных о Меркурии: длине полуоси *a*, эксцентриситете ε_t, периоде *T*, расстоянии 1 а. е., массе Солнца m_s. Согласно (5.14), параметр траектории α_1 через эксцентриситет ε определяется так:

$$\alpha_1 = -1/(\varepsilon_t + 1), \tag{11.10}$$

а радиус апоцентрия в соответствии с (5.15) будет

$$R_p = a\,\frac{2\alpha_1 + 1}{\alpha_1}. \tag{11.11}$$

Так как скорость в перицентрии v_p входит в α_1, ее можно выразить через параметр траектории

$$v_p = \sqrt{\frac{G\,m_s}{R_p\,(-\alpha_1)}}. \tag{11.12}$$

После подстановки в (11.12) R_p и α_1 получаем приведенную скорость в перицентрии

$$\beta_p = \sqrt{\frac{G\,m_s(1+\varepsilon_t)}{(1-\varepsilon)\,a_1\,c^2}}. \tag{11.13}$$

Подставляя численные значения параметров, находим следующие значения для орбиты Меркурия: $\alpha_1 = -0.829$, $\beta_p = 1.96 \cdot 10^{-4}$.

Как видно из рис. 11.1, при малых $\beta_p < 0.3$ период траектории $\overline{\varphi}_T$ приближается к единице асимптотически, так что оценить значение $\overline{\varphi}_T$ при таких малых β_p, которые присущи Меркурию, невозможно. Численное интегрирование уравнений (4.80), (4.82) при таких параметрах дает погрешность,

намного превышающую ожидаемое смещение перигелия $\delta\overline{\varphi}_T$. В связи с этим рассмотрим приближенное решение уравнения траектории при малых β_p. Запишем входящий в радиальную скорость экспоненциальный сомножитель

$$\exp\frac{2\,\mu_1/\left(c_1^2\,R\right)}{\left[1-h^2/\left(c_1^2\,R^2\right)\right]^{0.5}}=\exp\frac{-\,\bar r_g}{\sqrt{1-\beta_t^2}}=\mathrm{e}^{-A}\ , \qquad (11.14)$$

где $\bar r_g=R_g/R$; $\beta_t=v_t^2/c_1^2=h^2/\left(c_1^2\,R^2\right)$; $A=\dfrac{\bar r_g}{\sqrt{1-\beta_t^2}}$.

Так как мы рассматриваем Солнце, то для него $\bar r_g$ << 1, и при малых β_t величина A << 1. Поэтому экспоненту можно разложить в ряд Тейлора:

$$e^{-A}=1-A+\frac{A^2}{2}-\frac{A^3}{6}=1-\frac{\bar r_g}{\sqrt{1-\beta_t^2}}+\frac{\bar r_g^2}{2\left(1-\beta_t^2\right)}-\frac{\bar r_g^3}{6\left(1-\beta_t^2\right)^{1.5}}+\ldots$$

Разлагая знаменатели слагаемых в правой части и ограничиваясь членами второго порядка, получаем

$$e^{-A}=1-\frac{R_g}{R}+\frac{R_g^2}{2R^2}-\frac{BR_g^2+R_g^3/6}{R^3}+\frac{BR_g^3}{2R^4}+\frac{3B^2R_g^2}{8R^5}+\ldots \qquad (11.15)$$

где

$$B=\frac{h^2}{\left(-2\mu_1\right)}. \qquad (11.16)$$

В (11.15) мы ограничивались слагаемыми с показателями степени r меньше 6. Подставляя (11.15) в (4.80), с учетом слагаемых не выше R^3 имеем

$$v_r=c_1\sqrt{1-D+\frac{DR_g}{R}-\frac{1}{R^2}\left(\frac{DR_g^2}{2}+\frac{h^2}{c_1^2}\right)+\frac{DE}{R^3}}\ , \qquad (11.17)$$

где

$$D=\left(1-\beta_p^2\right)\exp\frac{2\,\mu_1}{c_1^2\sqrt{R_p^2-h^2/c_1^2}}; \qquad (11.18)$$

$$E=\frac{R_g^2}{6}-\frac{h^2\,R_g^2}{2\,\mu_1}. \qquad (11.19)$$

Подставляя v_r в (4.82), уравнение траектории запишем в следующем виде:

$$\varphi=-\frac{h}{c_1}\int\frac{\mathbf{d}y}{\sqrt{F+My-Ny^2+DEy^3}}, \qquad (11.20)$$

где

$$F=1-\left(1-\beta_p^2\right)\exp\frac{2\,\mu_1}{c_1^2\sqrt{R_p^2-h^2/c_1^2}}\ ; \qquad (11.21)$$

$$M=DR_g; \qquad (11.22)$$

$$N=\frac{DR_g^2}{2}+\frac{h^2}{c_1^2}; \qquad (11.23)$$

$$y=1/R. \qquad (11.24)$$

При $\beta_0\to 0$ коэффициенты имеют следующий порядок: $F\approx 1$; $D\approx 1$; $R_g\approx 1/c_1^2$; $E\approx 1/c_1^4$; $M\approx 1/c_1^2$; $N\approx h/c_1^2$; $DE\approx 1/c_1^4$. Поэтому, пренебрегая слагаемым с y^3, выражение (11.20) можем проинтегрировать при граничном условии $\varphi(R_p)=0$, т.е. угол отсчитывается от перицентрия:

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{Nc_1^2/h^2}}\arcsin\frac{M-2N/R}{\sqrt{4FN+b^2}}\Bigg|_{R_p}^{R}. \qquad (11.25)$$

Выражение (11.25) с учетом граничного условия можем переписать в виде

$$R=\frac{2N}{M+\sqrt{4FN+b^2}\cos\left(\sqrt{N\,c_1^2/h^2}\,\varphi\right)}. \qquad (11.26)$$

Согласно (11.26), при $\varphi=0$ радиус принимает минимальное значение $R=R_p$, а максимальное значение $R=R_a$ будет при

$$\sqrt{Nc_1^2/h^2}\ \varphi_a=\pi. \qquad (11.27)$$

Поскольку полный угловой период равен $\varphi_T=2\,\varphi_a$, смещение перицентрия за один период с учетом (11.27) будет

$$\delta\varphi_T=\varphi_T-2\pi=2\pi\left[\frac{1}{\sqrt{Nc_1^2/h^2}}-1\right]. \qquad (11.28)$$

Используя разложение (11.15), преобразуем подкоренное выражение

$$Nc_1^2/h^2=1+\frac{2\,\mu_1^2\left(1-\beta_p^2\right)}{c_1^2\,h^2}\left[1-\frac{R_g}{R_p}+\frac{R_g^2}{2\,R_p^2}\right]. \qquad (11.29)$$

С учетом (11.29) смещение перицентрия за один оборот (11.28) запишется так:

$$\delta\varphi_T=-2\,\pi\,\alpha_1^2\,\beta_p^2\left(1-\beta_p^2\right)\left[1-\frac{R_g}{R_p}+\frac{R_g^2}{2\,R_p^2}\right]. \qquad (11.30)$$

Так как гравитационный радиус планет $R_g << R_p$, то влияние слагаемых во второй скобке не существенно, поэтому окончательно при $\beta_p << 1$ вращение перицентрия получаем в виде

$$\delta\varphi_T = -2\pi\alpha_1^2\beta_p^2 \ . \qquad (11.31)$$

Как видим, смещение перицентрия происходит в обратную сторону, т.е. за период частица по орбите проходит угловое расстояние, меньшее 2π. Это противоречит всем полученным нами решениям, в том числе и представленным на рис. 11.1. По абсолютной величине смещение (11.31) превышает значения, рассчитанные численно:

Параметры		$\delta\varphi_T$	$\lvert\delta\varphi_T\rvert$
α_1	β_p	численный расчет	по формуле (11.31.)
– 0.7	0.1	0.0128	0.029
– 0.7	0.3	0.15	0.27
– 0.7	0.5	0.60	0.769

Таким образом, полученное приближенное аналитическое решение (11.31) является ошибочным.

На рис. 11.2 относительный период рассчитанных траекторий построен в зависимости от $\beta_p^{2.5}$. В такой обработке зависимости при $\beta_p \to 0$ становятся линейными:

$$\overline{\varphi}_T = 1 + A\beta_p^{2.5} \ . \qquad (11.32)$$

Тогда вращение перицентрия будет

$$\delta\varphi_T = 2\pi\left(\overline{\varphi}_T - 1\right) = 2\pi A\beta_p^{2.5} \ . \qquad (11.33)$$

Для Меркурия при $\alpha_1 = -0.829$ из рис. 11.2 определяем $A = 0.8$. Тогда согласно (11.33) смещение перицентрия при $\beta_p = 1.96\cdot10^{-4}$ составит $\delta\varphi_T = 2.7\cdot10^{-9}$. За 100 земных лет Меркурий делает 415 оборотов, поэтому смещение за этот период составит $\delta\varphi_T = 0.23''$.

Чрезвычайно малая величина смещения является проблематичной не только для наблюдения, но и для расчета. Мы показали, что приближенное решение уравнения дает большую погрешность. Для Меркурия были также численно интегрированы уравнения (4.80) и (4.82). Оказалось, что результаты сильно зависят от условий интегрирования. Причина погрешностей интегрирования уравнения траектории (4.80) заключается в том, что на границах интегрирования $R = R_p$ и $R = R_a$ радиальная скорость

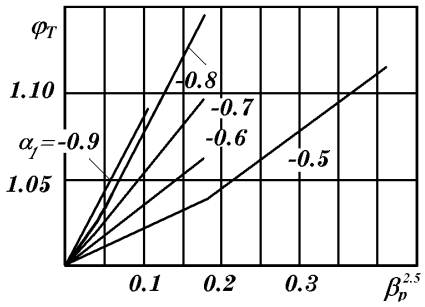


Рис. 11.2. Асимптотические зависимости $\overline{\varphi}_T$ при малых β_p.

обращается в нуль. Получить приближенные решения погрешностью меньшей $2.7\cdot10^{-9}$ – большая проблема. По-видимому, метод, с помощью которого мы определили правильную величину смещения перигелия Меркурия, является единственно возможным в данном случае.

Смещение перигелия (11.4), полученное П. Гербером и подтвержденное А. Эйнштейном после подстановки ε, T и a, согласно (5.14), (5.36) и (5.15), принимает вид

$$\delta\varphi_T = 6\pi\alpha_1^2\beta_p^2 \ . \qquad (11.34)$$

Как видим, полученное нами выражение (11.31) дает в 3 раза меньший по абсолютной величине результат. Г.И. Сухоруков и др. [64] получили тоже в 3 раза меньшее смещение перигелия Меркурия по сравнению с (11.34). Численное значение (11.34) для Меркурия составляет $\delta\varphi_T = 5\ 10^{-7}$, которое, хотя и в 200 раз больше полученного нами значения $2.7\ 10^{-9}$, но все же представляет достаточно малую величину. В работе А. Эйнштейна [76] задача двух тел сводится к интегралу

$$\varphi = \int \frac{\mathbf{d}y}{\sqrt{\dfrac{2A}{B^2} + \dfrac{\alpha}{B^2}y - y^2 + \alpha\, y^3}} \ , \qquad (11.35)$$

который идентичен полученному нами интегралу (11.20). Последний мы решали, ограничиваясь слагаемыми с y^2. А. Эйнштейн интегрировал (11.35) также приближенно, но другим методом. Этим и объясняется отличие результата (11.34) от (11.31). И оба они являются неверными приближенными решениями точного уравнения траектории (4.80)-(4.82).

В заключение подведем некоторые итоги.

1. Действительная величина прецессии перигелиев планет в настоящее время остается неопределенной.
2. Зависимость силы взаимодействия двух тел от скорости приводит к прецессии перицентрия. При очень малых скоростях смещение перицентрия за оборот определяется выражением (11.33), и для Меркурия оно составляет $2.7\cdot10^{-9}$ радиана или $0.23''$ в столетие. Этот эффект представляет такую малую величину, что она никогда не сможет быть подтверждена наблюдениями.
3. Величина смещения перигелия Меркурия, определенная У. Леверье на основе закона тяготения Ньютона, подлежит сомнению и для его нахождения должна быть решена проблема многих тел.

11.3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МНОГИХ ТЕЛ

Согласно закону всемирного тяготения (11.1), тело массой m_2 сообщает телу массой m_1 ускорение

$$\vec{w}_{21} = \frac{\vec{F}}{m_1} = -\frac{Gm_2}{R_{21}^3}\,\vec{R}_{21}\,, \qquad (11.36)$$

где $\vec{R}_{21}$ – радиус-вектор от второго тела к первому. Ускорение первого тела определяется массой воздействующего тела и расстоянием между телами.

Если есть третье тело, то оно в соответствии с (11.1) сообщит первому телу ускорение

$$\vec{w}_{31} = \frac{\vec{F}}{m_1} = -\frac{Gm_3}{R_{31}^3}\,\vec{R}_{31}\,. \qquad (11.37)$$

При наличии N тел каждое из $N-1$ тел сообщает объекту m_1 ускорение, определяемое массой воздействующего тела и расстоянием до него. Следовательно, полное ускорение тела m_1 запишется так:

$$\vec{w}_1 = \sum_{i=2}^{N} \vec{w}_{i1} = -G \sum_{i=2}^{N} \frac{m_i\,\vec{R}_{i1}}{R_{i1}^3}\,. \qquad (11.38)$$

Под воздействием ускорения $\vec{w}_1$ изменяется скорость $\vec{v}_1$ тела m_1 и его расположение $\vec{R}_{i1}$ по отношению к другим телам. Это приводит к изменению величины ускорения $\vec{w}_1$. Аналогичные ускорения испытывает каждое из $N-1$ тел. Таким образом, ускорение каждого тела изменяется со временем, изменяются скорости и положения тел. Определение этих величин составляет задачу многих тел.

Рассмотрим взаимодействие сферических тел (частиц) между собой. Система тел является изолированной, т.е. извне на нее воздействия не оказываются. Частицы при своем движении могут соприкасаться и сливаться. При столкновении частиц кинетическая энергия движения переходит в тепловую энергию частиц. Соприкосновение может происходить с касательной составляющей скорости, поэтому частица после слияния приобретает собственное вращение. Перечисленные проблемы должны быть выяснены в результате решения задачи многих тел.

Будем решать эту задачу в декартовой системе координат x, y, z и номер каждого тела будем характеризовать тремя числами i, j, k, изменяющимися в пределах

$$i_1 \le i \le i_2\,, \qquad j_1 \le j \le j_2\,, \qquad k_1 \le k \le k_2\,. \qquad (11.39)$$

Общее число тел определяется выражением

$$N = (i_2 - i_1 + 1)\,(j_2 - j_1 + 1)\,(k_2 - k_1 + 1). \qquad (11.40)$$

В этих обозначениях массы частиц будут m_{ijk}, а координаты и проекции на них скоростей и ускорений запишутся так:

$$x_{ijk}\,, y_{ijk}\,, z_{ijk}\,, u_{ijk}\,, v_{ijk}\,, w_{ijk}\,, \dot{u}_{ijk}\,, \dot{v}_{ijk}\,, \dot{w}_{ijk}\,. \qquad (11.41)$$

Радиус-вектор от тела с массой m_{ijk} до тела m_{mnl} запишем для краткости с двумя индексами:

$$\vec{R}_{im} = \vec{i}\,(x_{mnl} - x_{ijk}) + \vec{j}\,(y_{mnl} - y_{ijk}) + \vec{k}\,(z_{mnl} - z_{ijk})\,. \qquad (11.42)$$

В таких обозначениях проекция ускорения тела m_{mnl} на ось x, находящегося под воздействием остальных $N-1$ тел, в соответствии с (11.38) примет вид

$$\dot{u}_{mnl} = -G \sum_{\substack{i=i_1\\ j=j_1\\ k=k_1}}^{\substack{k=k_2\\ j=j_2\\ i=i_2}} \frac{m_{ijk}\,\left(x_{mnl} - x_{ijk}\right)}{R_{im}^3}\,, \text{ при } R_{im} \neq 0. \qquad (11.43)$$

Условие $R_{im} \neq 0$ означает, что суммирование проводится по $N-1$ частице, т.е. частица m_{mnl} исключается из суммирования. Аналогичные выражения запишутся для проекций ускорения на оси y и z.

В результате интегрирования ускорения $\dot{u}_{mnl}$ получаем проекцию скорости частицы на ось x, а после интегрирования скорости – закон движения частицы m_{mnl} под воздействием многих тел:

$$u_{mnl} = u_{mnl0} + \int_0^t \dot{u}_{mnl}\;\mathbf{d}t\,, \qquad (11.44)$$

$$x_{mnl} = x_{mnl0} + \int_0^t u_{mnl}\;\mathbf{d}t\,, \qquad (11.45)$$

где $x_{mnl0} = x_{mnl}\,(0)$, $u_{mnl0} = u_{mnl}\,(0)$, – начальные значения координат и скорости частиц в момент времени $t = 0$. Для проекций скорости v_{mnl}, w_{mnl} и координат y_{mnl}, z_{mnl} для осей y и z выражения будут аналогичны соотношениям (11.44), (11.45). Уравнения (11.43) – (11.45), записанные для трех проекций, полностью определяют движение каждого из N тел. В эту систему уравнений входят две группы интегральных уравнений (11.44), (11.45), которые в другой записи будут двумя группами дифференциальных уравнений. Общее количество этих уравнений $N_u = 3\ N\ 2 = 6N$. Для решения N_u уравнений должны быть известны $6N$ начальных условий, т. е. начальные положения и скорости всех N тел в проекциях на 3 оси координат. Согласно (11.42), в R_{im} входят компоненты всех проекций, поэтому уравнения по координатам зависимы друг от друга и не могут быть проинтегрированы по отдельности.

Для контроля правильности решения задачи необходимо следить за сохранением интегральных величин. Во время движения должна сохраняться масса всех тел

$$m = \sum_{ijk}^{N} m_{ijk} = \text{const}\,, \qquad (11.46)$$

где суммирование ведется по индексам ijk для N частиц.

Так как проекция количества движения массы m_{mnl} на ось x равна $P_{mnl} = m_{mnl}\, u_{mnl}$, то x – проекция количества движения всей системы тел с учетом (11.44) будет

$$P_x = \sum_{mnl}^{N} m_{mnl}\, u_{mnl} = \sum_{mnl}^{N} m_{mnl}\, u_{mnl0} - G \int_0^t \sum_{mnl}^{N} \sum_{ijk}^{N-1} \frac{m_{mnl}\, m_{ijk}\, (x_{mnl} - x_{ijk})}{R_{im}^3} \mathbf{d}t.$$

Под интегралом производится двойное суммирование, при котором разности конечных координат одних и тех же масс повторяются дважды, но с разными знаками. Например, при $N = 2$; $m = i = n = j = 1$; $l = k = 1, 2$ имеем

$$\sum_{mnl}^{2} \sum_{ijk}^{1} m_{mnl}\, m_{ijk} (x_{mnl} - x_{ijk}) = m_{111}\, m_{112} (x_{111} - x_{112}) + m_{112}\, m_{111} (x_{112} - x_{111}) = 0 . \tag{11.47}$$

Поэтому подынтегральное выражение равно нулю, и количество движения всех тел

$$P_x = \sum_{mnl}^{N} m_{mnl}\, u_{mnl0} = P_{x0} = \text{const}, \tag{11.48}$$

т.е. сохраняется во время движения.

Запишем x-проекцию момента количества движения тела:

$$M_{mnlx} = P_{mnlx}\, y_{mnl} - P_{mnlz}\, z_{mnl}. \tag{11.49}$$

Тогда для всей системы с учетом (11.43), (11.44) получаем

$$M_x = \sum_{mnl}^{N} m_{mnl} (w_{mnl0}\, y_{mnl} - v_{mnl0}\, z_{mnl}) - G \int_0^t \sum_{mnl}^{N} \sum_{ijk}^{N-1} \frac{m_{mnl}\, m_{ijk} (y_{ijk}\, z_{mnl} - z_{ijk}\, y_{mnl})}{R_{im}^3} \mathbf{d}t .$$

Нетрудно убедиться, что двойное суммирование под интегралом аналогично (11.47). Значит, x-проекция момента количества движения системы тел

$$M_x = \sum_{mnl}^{N} m_{mnl}\, (w_{mnl0}\, y_{mnl} - v_{mnl0}\, z_{mnl}) = M_{x0} = \text{const},$$

т.е. также сохраняется во время движения. Следует отметить, что при слиянии частиц их количество уменьшается, момент количеств движения тел системы будет изменяться и часть его будет переходить в момент количества движения собственного вращения тел. Полученные результаты справедливы для составляющих количества движения и момента количества движения на оси y и z:

$$M_y = \sum_{mnl}^{N} (P_{mnlx}\, z_{mnl} - P_{mnlz}\, x_{mnl}) = \text{const}; \tag{11.50}$$

$$M_z = \sum_{mnl}^{N} (P_{mnly}\, x_{mnl} - P_{mnlx}\, y_{mnl}) = \text{const}.$$

Разделив импульс (11.48) системы тел на массу m, получим скорость ее движения вдоль оси x:

$$u = P_{x0}/m = \text{const}. \tag{11.51}$$

Как видим, система тел будет двигаться с неизменной скоростью, несмотря на происходящие внутри нее взаимодействия. Скорость движения u связывают с центром масс системы, x-координата которого определяется выражением

$$x = \sum_{mnl}^{N} m_{mnl}\, x_{mnl}/m . \tag{11.52}$$

Важной характеристикой взаимодействующих тел является кинетическая энергия

$$E_c = 0.5 \sum_{mnl}^{N} m_{mnl} \left(u_{mnl}^2 + v_{mnl}^2 + w_{mnl}^2\right). \tag{11.53}$$

При взаимодействии двух тел траектория (5.3) может быть эллипсом, параболой или гиперболой. При эллиптической орбите ($\alpha_1 < -0.5$) энергия (11.53) будет изменяться от минимальной в апоцентрии до максимальной в перицентрии. При гиперболической орбите ($\alpha_1 > -0.5$) энергия сближающихся тел будет увеличиваться, достигнет максимума в перицентрии, а затем будет уменьшаться и стремиться к постоянному значению на бесконечности. Такое поведение кинетической энергии будет наблюдаться и при взаимодействии многих тел: при их разлете она будет уменьшаться, при стягивании тел в одну точку – увеличиваться, а при стабильном существовании системы тел кинетическая энергия должна колебаться в постоянных пределах. Следовательно характер поведения E_c во времени будет свидетельствовать об устойчивости системы, а необъяснимое изменение кинетической энергии может свидетельствовать о погрешностях решения задачи.

Если R_{mnl} и R_{ijk} – радиусы взаимодействующих частиц, то при сближении их на расстояние $d < (R_{mnl} + R_{ijk})$ такие частицы будем считать слившимися в одну. Поскольку при столкновении частицы имеют относительные скорости сближения, кинетическая энергия частиц перейдет в тепловую энергию слившейся частицы. Рассчитаем ее. Будем рассматривать движение частицы m_{ijk} относительно частицы m_{mnl}. Проекции ее относительного положения и скорости (см. рис. 11.3) на ось x запишутся так:

$$x_r = x_{ijk} - x_{mnl}; \tag{11.54}$$

$$u_r = u_{ijk} - u_{mnl}. \tag{11.55}$$

Из равенства статических моментов относительно точки C_x

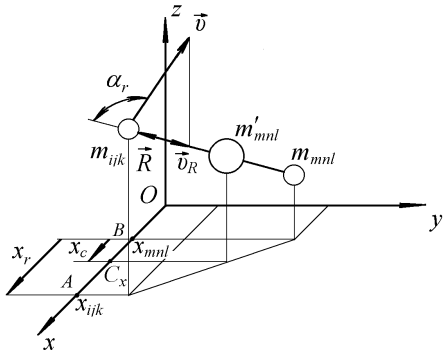


Рис. 11.3. Относительные скорости при слиянии двух частиц.

$$m_{mnl}\, x_c = (x_r - x_c) m_{ijk}. \qquad (11.56)$$

определяется *x*-координата центра двух масс

$$x_c = \frac{m_{ijk}\, x_r}{m_{mnl} + m_{ijk}}. \qquad (11.57)$$

Тогда новая *x*-координата слившейся частицы будет

$$x'_{mnlx} = x_{mnl} + \frac{m_{ijk}\, x_r}{m_{mnl} + m_{ijk}}, \qquad (11.58)$$

а ее масса $m'_{mnl} = m_{mnl} + m_{ijk}$. Если масса $m_{mnl} < m_{ijk}$, то частице присваивается номер большей частицы m_{ijk}, т.е. ее масса обозначается m'_{ijk}.

Так как *x*-компонента импульса слившейся частицы равна сумме количеств движения составляющих частиц

$$P'_{mnlx} = P_{mnlx} + P_{ijkx}, \qquad (11.59)$$

то после подстановки их значений определяется выражение для ее скорости:

$$u'_{mnlx} = \frac{m_{mnl}}{m_{mnl} + m_{ijk}} u_{mnl} + \frac{m_{ijk}}{m_{mnl} + m_{ijk}} u_{ijk}. \qquad (11.60)$$

Относительный радиус частицы m_{ijk}

$$\vec{R} = \vec{i}\, x_r + \vec{j}\, y_r + \vec{k}\, z_r \qquad (11.61)$$

и ее относительная скорость (см. рис. 11.3)

$$\vec{v} = \vec{i}\, u_r + \vec{j}\, v_r + \vec{k}\, w_r \qquad (11.62)$$

направлены друг к другу под углом α_r, который можно выразить из определения скалярного произведения $\vec{R}\vec{v} = Rv\cos(\alpha_r)$ в следующем виде:

$$\cos(\alpha_r) = \frac{x_r u_r + y_r v_r + z_r w_r}{Rv}. \qquad (11.63)$$

Тогда радиальная скорость частицы m_{ijk} относительно частицы m_{mnl}, с которой происходит сближение, будет:

$$v_R = v\cos(\alpha_r) = \frac{x_r u_r + y_r v_r + z_r w_r}{R}. \qquad (11.64)$$

При столкновении частиц их кинетические энергии превратятся в тепловую энергию в соответствии с радиальными скоростями частиц относительно центра масс. Так как относительно центра масс радиальные импульсы частиц равны, то их радиальные скорости будут

$$v_{Rmnl} = v_R \frac{m_{ijk}}{m_{mnl} + m_{ijk}}; \quad v_{Rijk} = v_R \frac{m_{mnl}}{m_{mnl} + m_{ijk}}. \qquad (11.65)$$

Кинетическая энергия двух слившихся частиц перейдет в приращение тепловой энергии новой частицы. Тогда ее тепловая энергия с учетом тепловой энергии составляющих частиц E_{mnl} и E_{ijk} запишется:

$$E'_{mnl} = E_{ijk} + E_{mnl} + \frac{m_{mnl} v^2_{Rmnl}}{2} + \frac{m_{ijk} v^2_{Rijk}}{2} = E_{ijk} + E_{mnl} + \frac{m_{ijk} m_{mnl}}{m_{mnl} + m_{ijk}} \frac{v_R^2}{2}, \qquad (11.66)$$

где относительная скорость сближения v_R должна быть определена при расстоянии между частицами, равном сумме их радиусов:

$$R = d = R_{mnl} + R_{ijk}. \qquad (11.67)$$

Сближающиеся частицы, как видно из рис. 11.3, кроме радиальной составляющей скорости имеют трансверсальную, которая при образовании слившейся частицы будет приводить к ее вращению. Рассчитаем собственные моменты импульса, т.е. спины *S* вновь образующихся частиц. Рассмотрим проекции скоростей и положения частицы на плоскости *yz* (см. рис. 11.4). Определим моменты количеств движения частиц относительно центра масс *C*:

$$\Delta S'_{mnlx} = m_{ijk}\,(-w_{ijk} MN - v_{ijk} GF) + m_{mnl}\,(w_{mnl} ND + v_{mnl} FE), \qquad (11.68)$$

где расстояния до центра масс *C* определяются аналогично (11.57):

$$MN = -\frac{m_{mnl}}{m'_{mnl}} y_r,\ ND = -\frac{m_{ijk}}{m'_{mnl}} y_r;\ \ GF = \frac{m_{mnl}}{m'_{mnl}} z_r,\ FE = \frac{m_{ijk}}{m'_{ijk}} z_r. \qquad (11.69)$$

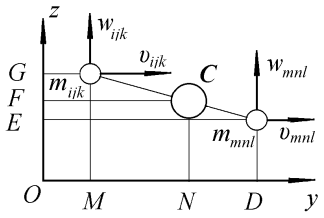
Здесь y_r и z_r определяются аналогично (11.54).

После подстановки расстояний (11.69) в (11.68) получаем *x*-проекцию приращения спина слившейся частицы

$$\Delta S'_{mnlx} = m_{re}\,(w_r y_r - v_r z_r), \qquad (11.70)$$

где

$$m_{re} = \frac{m_{mnl}\, m_{ijk}}{m_{mnl} + m_{ijk}}; \qquad (11.71)$$



m_{re} - приведенная (редуцированная) масса при взаимодействии двух частиц.

Аналогично запишутся проекции приращения спина слившейся частицы на оси *y* и *z*. А с учетом спинов исходных частиц спин

Рис. 11.4. Образование проекции спина на ось *x* при слиянии частиц.

слившейся частицы на эти оси будет:

$$S'_{mnly} = S_{ijky} + S_{mnly} + m_{re}\,(u_r\, z_r - w_r x_r)\,, \qquad (11.72)$$

$$S'_{mnlz} = S_{ijkz} + S_{mnlz} + m_{re}\,(v_r\, x_r - u_r y_r)\,. \qquad (11.73)$$

В выражениях (11.70), (11.72), (11.73) относительные скорости v_r и w_r находятся аналогично (11.55). Относительные расстояния и скорости при определении приращения спинов должны быть рассчитаны в момент касания частиц. Однако, поскольку взаимодействие двух сливающихся частиц в момент слияния намного превосходит воздействие остальных, величина момента количества движения будет сохраняться на небольших расстояниях перед слиянием. Поэтому приращение спина можно определять и в точке близкой к точке слияния.

Суммирование спинов по всем частицам представляет суммарный момент количества движения системы, заключенный в собственном вращении тел:

$$S_x = \sum_N S_{mnlx},\; S_y = \sum_N S_{mnly},\; S_z = \sum_N S_{mnlz}\,. \qquad (11.74)$$

Спины системы S_x, S_y, S_z и моменты импульсов M_x, M_y, M_z составляют суммарный момент количества движения системы взаимодействующих тел, компоненты которого

$$M_{sx} = M_x + S_x, \qquad M_{sy} = M_y + S_y, \qquad M_{sz} = M_z + S_z, \qquad (11.75)$$

сохраняются в процессе существования изолированной системы взаимодействующих тел при всевозможных движениях и взаимопревращениях.

Наряду с кинетической энергией E_c системы необходимо рассматривать тепловую энергию

$$E_t = \sum_N E_{mnl} \qquad (11.76)$$

Если задача решается без учета теплопередач, то тепловая энергия будет расти в развивающейся системе тел, а в стационарной оставаться неизменной. Особенно сильное увеличение тепловой энергии будет происходить при аккреции вещества.

Проблема многих тел представляет наибольший интерес при изучении поведения больших массивов вещества во Вселенной. Решение этих задач позволит понять механизм образования планет, звезд, планетных систем, звездных скоплений, галактик и других объектов, которые наблюдаются и могут наблюдаться в космосе. Первоначально эти массивы вещества можно рассматривать как статически однородные, с начальной средней плотностью

$$\rho_0 = \frac{m}{abc}\,, \qquad (11.77)$$

где a, b, c – размеры области вдоль оси x, y, z, соответственно. Форма области может быть и не параллелепипедом, тогда размеры a, b, c будут размерами параллелепипеда, охватывающего область. Координатные оси направляем так, чтобы $a > b > c$. Перейдем к безразмерным переменным:

$$\tilde{x} = x/a, \quad \tilde{y} = y/a, \quad \tilde{z} = z/a, \quad \tilde{m}_{ijk} = m_{ijk}/m\,. \qquad (11.77,\text{а})$$

После подстановки их в (11.43), получаем выражения для ускорения в приведенном виде

$$\ddot{\tilde{u}}_{mnl} = -\sum_{N-1} \frac{\tilde{m}_{ijk}\left(\tilde{x}_{mnl} - \tilde{x}_{ijk}\right)}{\tilde{R}_{im}^3}, \qquad (11.78)$$

где $\tilde{R}_{im} \neq 0$. При этом определяется преобразование для времени, а также для производных от координаты по времени в следующем виде:

$$\tilde{t} = t\sqrt{\frac{Gm}{a^3}} = t\sqrt{G\rho_0 \tilde{b}\tilde{c}}\,; \qquad \tilde{u} = u\sqrt{\frac{a}{Gm}}\,; \qquad \dot{\tilde{u}} = \dot{u}\,\frac{a^2}{Gm}\,, \qquad (11.79)$$

здесь

$$\tilde{b} = b/a, \qquad \tilde{c} = c/a\,. \qquad (11.80)$$

Как видим, приведенное ускорение (11.78) отличается от (11.43) отсутствием G. Поэтому все последующие уравнения, начиная с (11.44), можно рассматривать в приведенном виде, заменяя $G = 1$ и абсолютные параметры на безразмерные, отмеченные сверху ~.

Массив вещества в объеме $V = abc$ можно разбить на элементарные объемы $V_{ijk} = \tilde{V}/N$, в центре которых поместим тела с массами

$$m_{ijk} = m / N\,. \qquad (11.81)$$

Чтобы при разных формах областей стороны элементарных объемов были близки по величине, поступим следующим образом. Количество шагов, т.е. промежутков между телами вдоль осей x, y, z, обозначим M_S, N_S, K_S соответственно. Тогда расстояние между телами вдоль оси x будет $\Delta x = a/M_S$, а количество шагов вдоль осей y и z берем как целую часть дробей:

$$N_S = \mathrm{Int}(b/\Delta x), \qquad K_S = \mathrm{Int}(c/\Delta x). \qquad (11.82)$$

Если i_1, j_1, k_1 – номера первых узлов по осям x, y, z соответственно, то номера последних запишутся

$$i_2 = M_S + 1; \qquad j_2 = N_S + 1, \qquad k_2 = K_S + 1, \qquad (11.83)$$

а общее число узлов N определится соотношением (11.40).

Массы тел m_{ijk} помещаем в узлы. Если средние, по их диаметру, плотности тел ρ_{ijk}, то, рассматривая тела как сферы, радиусы их можем определить как

$$R_{ijk} = \left(3m_{ijk}/4\pi\rho_{ijk}\right)^{1/3}. \qquad (11.84)$$

Плотности небесных тел ρ_{ijk} изменяются в широких пределах. Чтобы их вычислять, необходимо задавать определенные зависимости радиусов тела от их других свойств, например массы и температуры. Радиус тел необходим для расчета расстояния d между телами во время их слияния. На первом этапе можно для всех частиц задать одинаковую плотность, равную например, средней плотности Земли:

$$\rho_{ijk} = \rho_p \approx 5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3. \qquad (11.85)$$

Запишем в приведенном виде расстояние между телами во время соприкосновения с учетом плотностей (11.77) и (11.85), когда массы частиц определяются (11.81)

$$\tilde{d} = \frac{R_{mnl}}{a} + \frac{R_{ijk}}{a} = \left(\frac{3\tilde{b}\tilde{c}\rho_0}{4\pi N\rho_{mnl}}\right)^{1/3} + \left(\frac{3\tilde{b}\tilde{c}\rho_0}{4\pi N\rho_{ijk}}\right)^{1/3}. \qquad (11.86)$$

При одинаковой плотности частиц ρ_p приведенное расстояние между частицами зависит от соотношения плотностей следующим образом:

$$\tilde{d} = 2\left(\frac{3\tilde{b}\tilde{c}\rho_0}{4\pi N\rho_p}\right)^{1/3}. \qquad (11.87)$$

Отсюда следует важный вывод. Все уравнения, начиная с (11.78), а затем с уравнения (11.44) по (11.53), записанные в приведенном виде (G = 1 и переменные с ~), при отсутствии столкновений не зависят от размера области. Следовательно, решение проблемы многих тел для образования планетной системы может быть распространено на образование звездной системы, звездных скоплений, галактик и т.д. Однако при наличии слияния тел приведенный размер слияния зависит от относительной плотности ρ_0/ρ_p. Если ρ_p для обычных небесных тел изменяется не сильно, то ρ_0 с увеличением размера области уменьшается значительно. Это будет приводить к уменьшению $\tilde{d}$ с увеличением размера области, поэтому интегрирование необходимо проводить до меньших размеров. Будут увеличиваться тепловые энергии тел при рассмотрении проблемы многих тел для больших областей. Таким образом, задача становится не автомодельной.

Несмотря на кажущуюся простоту проблемы многих тяготеющих тел: простое уравнение для силы (11.1) плюс уравнение движения (2.4), в литературе [49] существует большое количество разнообразных постановок ее решения. Мы приступили к этой задаче с целью подтвердить выдвинутые нами механизмы формирования циркуляций при образовании вихрей в искусственных [58] и естественных [62] условиях применительно к образованию космических систем. В процессе работы мы столкнулись с проблемами погрешности решений, которые вынуждали искать другие постановки задачи. Изложенная выше является последней. Нам представляется она наиболее удачной. Эта постановка позволяет следить за параметрами и судьбой каждого из тел. В то же время она охватывает в целом всю систему и позволяет, понимать, как она развивается, от чего зависят ее свойства, и как они будут

меняться. Данная постановка дает возможность рассматривать также взаимодействие между системами и влияние внешних систем на внутренние свойства системы.

Приведенная постановка позволяет просто задавать исходное состояние системы, например первоначальное ее вращение, преобладающую массу, степень дискретности системы. Заданием числа N тел в системе одна и та же программа может быть приспособлена к разным по мощностям ЭВМ. Вариацией числа тел N в системе можно проверить зависимость решения от степени ее дискретности и т.д.

По рассмотренной постановке была разработана программа Galactica на языке Turbo Basic. С ее помощью можно рассматривать задачи любого числа тел, например при M_S = 1; $\tilde{b}$ = 0,5; $\tilde{c}$ = 0,25 будет решаться задача двух тел. Ниже даны примеры решения этой программой задач двух, трех и четырех тел.

11.4. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ *n* – ТЕЛ

Рассмотрим взаимодействие n тел, равномерно расположенных по окружности радиусом r_0 (рис. 11.5) с угловым интервалом $\varphi_1 = 2\pi/n$. Тело m_2 будет сообщать телу m_1 ускорение, проекция которого на ось x равна

$$w_{21x} = -\frac{Gm_2}{AB^2}\cos\alpha. \qquad (11.88)$$

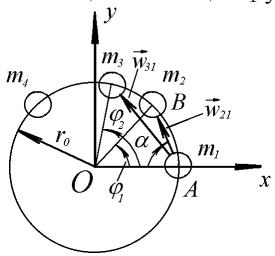
Треугольник OBA – равнобедренный, поэтому $2\alpha + \varphi_1 = \pi$, откуда получаем:

$$\alpha = (\pi - \varphi_1)/2 = (\pi - 2\pi/n)/2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}. \qquad (11.89)$$

Из этого треугольника определяется расстояние $AB = 2\ r_0 \sin(0{,}5\varphi)$. Тогда ускорение (11.88) запишется так:

$$w_{21x} = -\frac{Gm_2}{4r_0^2\sin(\pi/n)}. \qquad (11.90)$$

Угловое расстояние между частицей m_3 и m_1 равно $\varphi_2 = 2\varphi_1 = \frac{4\pi}{n}$ и она будет сообщать частице m_1 ускорение вдоль оси x



$$w_{31x} = -\frac{Gm_3}{4r_0^2\sin(2\pi/n)}. \qquad (11.91)$$

Частица m_4 будет сообщать частице m_1 ускорение

Рис. 11.5. Взаимодействие осесимметрично расположенных тел.

$$w_{41x} = -\frac{Gm_4}{4r_0^2 \sin(3\pi/n)}. \qquad (11.92)$$

При четном числе частиц $n = 2k_e$, где k_e – целое число, на противоположном m_1 конце диаметра будет находиться частица с номером $k_e + 1$, а остальные частицы с номерами $(k_e + 2) \div n$ будут расположены по нижней полуокружности, симметрично частицам $i = 2 \div k_e$.

Для каждой из частиц на верхней полуокружности сомножитель с синусом можно записать в виде $1/\sin[(i - 1)\pi/n]$, который для частицы с номером $(k_e + 1)$ будет равен 1. Поэтому в соответствии с (11.90)-(11.92), суммарное ускорение, сообщаемое частице m_1 остальными $n - 1$ частицами при равенстве их масс $m_1 = m_2 = m_3 = \ldots m_n$, запишется в виде

$$w_{1x} = -\frac{Gm_1}{4r_0^2}\left(1 + \sum_{i=2}^{k_e} \frac{2}{\sin[(i-1)\pi/n]}\right). \qquad (11.93)$$

При нечетном числе частиц $n = 2k_0 + 1$ на противоположном m_1 конце диаметра не будет частицы и первое слагаемое в (11.93) будет отсутствовать. В этом случае суммарное ускорение первой частицы в проекции на ось x будет следующим:

$$w_{1x} = -\frac{Gm_1}{2r_0^2} \sum_{i=2}^{k_0+1} \frac{1}{\sin[(i-1)\pi/n]}. \qquad (11.94)$$

В силу осевой симметрии ускорение частицы m_1 на ось y равно нулю, поэтому ускорением w_{1x} определяется воздействие всех частиц полностью. Из рис. 11.5 и выражений (11.93) и (11.94) видно, что каждой из n частиц остальные сообщают ускорение, которое направлено к их центру масс и которое обратно пропорционально квадрату расстояния частицы до него, т.е.

$$\vec{w}_1 = -\frac{Gm_1\vec{r}_0}{r_0^3} f(n), \qquad (11.95)$$

где при четном числе частиц

$$f(n) = 0{,}25\left(\sum_{i=2}^{k_e} \frac{2}{\sin[(i-1)\pi/n]} + 1\right), \qquad (11.96)$$

а при нечетном

$$f(n) = 0{,}5 \sum_{i=2}^{k_0+1} \frac{1}{\sin[(i-1)\pi/n]}. \qquad (11.97)$$

Ускорение (11.95) для частицы m_1 можно также записать в виде силы воздействия на нее

$$\vec{F}_1 = -\frac{Gm_1^2\vec{r}_0}{r_0^3} f(n). \qquad (11.98)$$

Сомножитель $f(n)$ зависит от взаимного расположения тел. Если оно в процессе движения не будет изменяться, т.е. $f(n) = \text{const}$, то ускорение (11.95)

или сила (11.98) будут отличаться от силы всемирного тяготения (11.1) только постоянным коэффициентом. Следовательно, движение каждого из n тел будет происходить под действием центральной силы (11.98) аналогично движению одного тела, находящегося под воздействием другого. Траектории их будут коническими сечениями, в фокусе которых находится центр масс.

В связи с одинаковым видом сил (11.98) и (11.1) эти взаимодействия можно объединить, т.е. в центр масс (т. O на рис. 11.5) дополнительно поместить $n + 1$ тело с массой m_0, которое на каждое из n тел будет воздействовать силой (11.1) или сообщать ускорение

$$\vec{w}_0 = -\frac{Gm_0\vec{r}_0}{r_0^3}. \qquad (11.99)$$

Тогда суммарное ускорение каждого из n тел будет равно сумме ускорений (11.95) и (11.99):

$$\vec{w} = \frac{\mathbf{d}^2\vec{r}_0}{\mathbf{d}t^2} = -\frac{G\vec{r}_0}{r_0^3}\left[m_0 + m_1 f(n)\right]. \qquad (11.100)$$

Как мы показали в гл. 5, при кулоновском взаимодействии, справедливом и для данного случая, траектория описывается выражением (5.3), а время движения по ней – (5.22), (5.25), (5.27) и (5.30). Параметры движения определяются параметром траектории α_1, который зависит от параметра взаимодействия μ_1, входящего в уравнение относительного движения (4.63). Сопоставляя уравнения (4.63) и (11.100), получаем выражение для параметра взаимодействия в задаче осесимметрично расположенных n тел вокруг центрального тела m_0 в следующем виде:

$$\mu_1 = -G\left[m_0 + m_1 f(n)\right]. \qquad (11.101)$$

Соотношение (11.101) является ключевым в этой проблеме. С учетом (11.101) уравнение (11.100) может быть записано так:

$$\frac{\mathbf{d}^2\vec{r}_0}{\mathbf{d}t^2} = -\frac{\mu_1\vec{r}_0}{r_0^3}.$$

Оно имеет решение в виде уравнения траектории (5.3), где параметр траектории

$$\alpha_1 = -\frac{\mu_1}{r_{0p}\upsilon_{0p}^2}, \qquad (11.101a)$$

где r_{0p} и υ_{0p} – параметры перицентриев частиц по отношению к центру масс системы тел.

Радиальная скорость вычисляется согласно (5.1), а трансверсальная равна $\bar{\upsilon} = 1/\bar{r}_0$. Все величины здесь нормированы к параметрам в перицентрии υ_{0p} и r_{0p}. Время движения тел по траекториям определяется в соответствии с (5.21), (5.25), (5.26) и (5.30), где параметры нормированы к величинам в произвольной точке r_{00}, со скоростью υ_{0t0} и υ_{0r0} относительно центра O (рис.11.5). Движение каждого из n тел происходит при сохранении кинематического момента $h = \text{const}$. Если принять, что на рис. 11.5 тела изображены в перицентрии, то

линия апсид тела m_1 проходит по оси x. Апоцентрий его будет расположен на отрицательных значениях оси x. Линия апсид тела m_2 наклонена к оси x под углом $\varphi_1 = 2\pi/n$, тела m_3 – под углом $\varphi_2 = 2\bullet 2\pi/n$; $m_4 - \varphi_3 = 3\bullet 2\pi/n$ и т.д. Центральное тело с массой m_0 будет неподвижно находиться в т. O.

Итак, осесимметричная задача n тел сводится к задаче взаимодействия двух тел. Движение каждого из них происходит по неизменной в пространстве траектории, которая принадлежит к семейству кривых конического сечения и определяется параметром α_1. Решение этой задачи имеет важное теоретическое значение. Например, в случае $m_0 >> m_i$ система представляет собой центральную звезду и обращающихся вокруг нее n планет. В этом случае, несмотря на воздействия планет друг на друга, их орбиты постоянны в пространстве и перицентрии не прецессируют. Имеется много других вопросов, на которые решения этой задачи дают точный ответ. Практическое значение данной задачи заключается в возможности определения реальной погрешности вычислительных алгоритмов проблемы многих тел.

11.5. ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ НЕСКОЛЬКИХ ТЕЛ.

Проанализируем результаты решения программы Galactica, алгоритм которой описан в п. 11.3. Вначале рассмотрим взаимодействие двух тел разной массы: $m_1 = 2m_2$. В начальный момент времени $t = 0$ задаются положение частиц в точке апсид и трансверсальная скорость v_{t0}. Рассматриваются траектории движения тел при изменении $v_{t0} = 0$ до некоторого значения, характерного для гиперболических траекторий. При нулевой трансверсальной скорости частицы движутся радиально до соприкосновения.

Движение происходит относительно центра масс O (рис. 11.6). Частицам задается скорость в перицентрии вращением их с угловой скоростью ω относительно т. O:

$$v_{p1} = \omega r_{01}, \quad v_{p2} = \omega r_{02}, \qquad \text{где } r_{01} + r_{02} = a.$$

Тогда скорость одной частицы относительно другой $v_p = v_{p1} + v_{p2} = \omega a$. Так как параметр траектории в данном случае определяется

$$\alpha_1 = -G(m_1 + m_2)/(av_p^2), \tag{11.102}$$

то, переходя к безразмерным параметрам, согласно (11.77а) и (11.79), получаем

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\tilde{\omega}^2}, \tag{11.103}$$

где

$$\tilde{\omega} = \omega\sqrt{a^3/Gm}, \qquad m = m_1 + m_2. \tag{11.104}$$

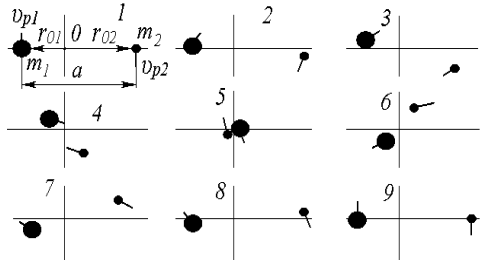


Рис. 11.6. Этапы движения двух тел при $\alpha_1 = -0.5597$ в моменты времени $2.31\,\tilde{t}$:
1 – 0.001; *2* – 0.5; *3* – 1.5; *4* – 2.5; *5* – 3.0; *6* – 3.5; *7* – 4.5; *8* – 5.5; *9* –6.0.

При $\alpha_1 = -1$, частицы движутся по окружностям, при $\alpha_1 > -1$ частицы движутся по эллипсам и расстояние между ними увеличивается. Если $\alpha_1 < -1$, что имеет место при малой угловой скорости $\tilde{\omega}$, то расстояние между частицами будет уменьшаться. То есть частицы начинают движение не с перицентрия, а с апоцентрия с параметрами R_a и v_a. Поэтому обозначим это значение α_1 как α_1^a и, согласно определению, имеем

$$\alpha_1^a = \frac{\mu_1}{R_a v_a^2} = \frac{\mu_1 R_a}{R_P^2 v_P^2} = \alpha_1 \frac{R_a}{R_P}. \tag{11.105}$$

После подстановки в (11.105) значения $\overline{R}_a$, согласно (5.7), получаем выражение для параметра траектории

$$\alpha_1 = -\frac{\alpha_1^a}{2\alpha_1^a + 1}, \tag{11.106}$$

где α_1^a – значение выражения (11.103) при $\alpha_1 > -1$.

На рис. 11.6 показаны моменты движения двух тел при начальной угловой скорости $\tilde{\omega}/2.31 = 0.2$. Изображения взяты с экрана монитора. Для каждого из девяти положений времена приведены с коэффициентом $2.31\,\tilde{t}$. Введение коэффициента обусловлено тем, что эта и все последующие иллюстрации рассчитаны по варианту программы Galactica, в которой параметры нормировались не к общей массе m, а к средней плотности ρ_0. В положении *1* тела находятся в апоцентриях. Штрихи у тел показывают направление скоростей тел. Тела сближаются во вращательном движении относительно друг друга и в положении *5* достигают перицентриев. Затем они удаляются друг от друга и в положении *9* приходят в апоцентрии.

На рис. 11.7 представлены траектории двух тел при изменении начальной скорости ($\tilde{\omega}/2.31$) от нуля до 0,7. Первоначальное расстояние между частицами равно единице. Начало координат расположено в апсиде одной из частиц. При $\tilde{\omega} = 0$ (траектория *1*) происходит радиальное сближение тел. При $\tilde{\omega}/2.31 = 0{,}1$ частицы движутся по вытянутым эллиптическим орбитам, начиная свое движение с апоцентрия. С увеличением $\tilde{\omega}$ эксцентриситет орбит уменьшается и для случая *6* траектории становятся окружностями. С дальнейшим увеличением начальной скорости $\tilde{\omega}$ частицы начинают разбегаться, т.е. начальная точка для них является перицентрием. Для ситуации *10* при ($\tilde{\omega}/2{,}31$) = 0,613 траектории частиц становятся параболами, а с дальнейшим

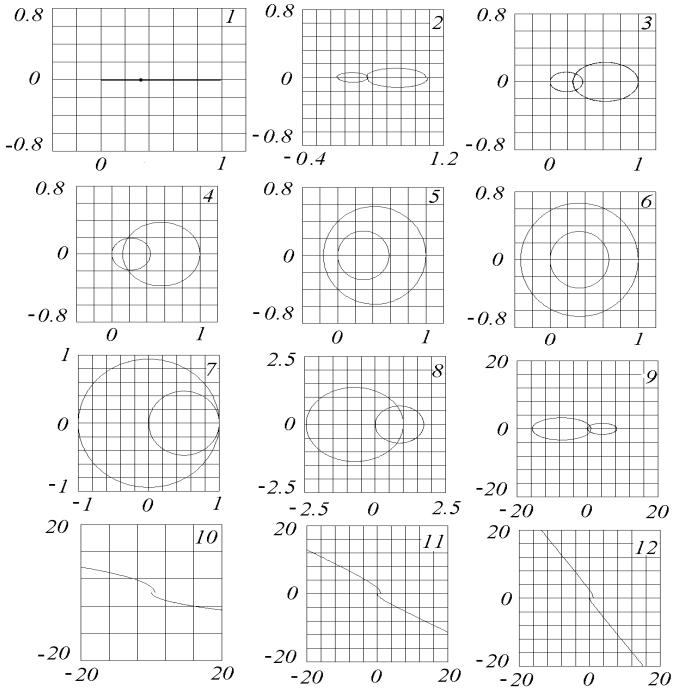


Рис. 11.7. Траектории движения двух частиц при вариации начальной трансверсальной скорости $\tilde{\omega}$/2.31 (в скобках указан параметр траектории α_1):
1 – 0 (0);
2 – 0.1 (– 0.514);
3 – 0.2 (– 0.5597);
4 – 0.3 (– 0.658);
5 – 0.4 (-0.872);
6 – 0.433 (– 1);
7 – 0.5 (– 0.75);
8 – 0.55 (– 0.62);
9 – 0.6 (– 0.521);
10 – 0.613 (– 0.5);
11 – 0.63 (– 0.473);
12 – 0.7 (– 0.3826).

увеличением $\tilde{\omega}$ они превращаются в гиперболы. С увеличением $\tilde{\omega}$ гиперболы выпрямляются и при $\tilde{\omega} \to \infty$ превращаются в вертикальные линии. Представленные на рис. 11.7 численные решения задачи двух тел с высокой степенью точности согласуются с аналитическими решениями. На рис. 11.7 это проиллюстрировано приведенными значениями параметра α_1, по которому рассчитывалось, согласно (11.103), задаваемое при численном счете значение $\tilde{\omega}$, чтобы получить траектории в виде окружности *6* и параболы *10*. В результате численного решения получались траектории в виде окружности и параболы и их параметры выдерживались с высокой точностью.

Запишем уравнения этих траекторий в системе центра масс (см. рис. 11.6). Так как расстояния частиц от центров масс находятся в соотношении

$$r_{01}m_1 = r_{02}m_2,$$

а сумма расстояний $r_{01} + r_{02} = R$, где R – расстояние между частицами, то

$$r_{01} = R\, m_2/m, \qquad r_{02} = R\, m_1/m. \tag{11.107}$$

Уравнение траектории (5.3) при положении перицентрия на угле φ_0 запишется в виде

$$R = \frac{R_P}{(\alpha_1 + 1)\cos(\varphi - \varphi_0) - \alpha_1}. \tag{11.108}$$

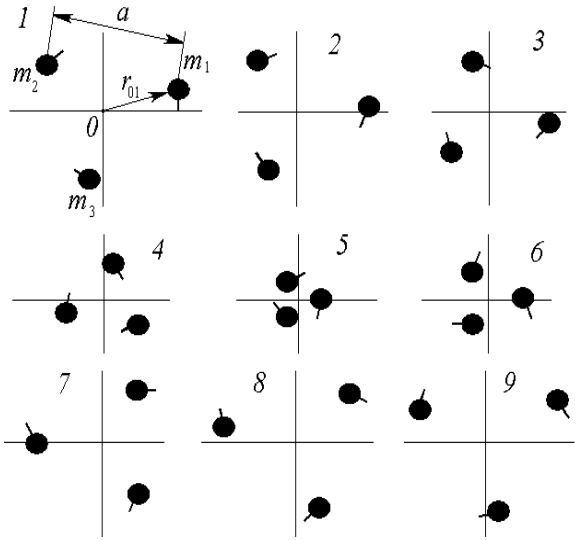


Рис. 11.8. Этапы движения трех тел при $\alpha_1 = -0.6356$ в моменты времени $3.27\,\tilde{t}$:
1 – 1.0; *2* – 2.0; *3* – 3.0; *4* – 4.0; *5* – 5.0; *6* – 6.0; *7* – 8.0; *8* – 9.0; *9* – 10.0.

Принимая расположение перицентрия для первого тела на угле $\varphi_0 = 0$, а для второго при $\varphi_0 = \pi$, в соответствии с (11.107) и (11.108) уравнения их траекторий относительно центра масс *O* получаем в следующем виде:

$$r_{01} = \frac{R_P m_2 / m}{(\alpha_1 + 1)\cos\varphi - \alpha_1}, \qquad r_{02} = \frac{R_P m_2 / m}{(\alpha_1 + 1)\cos(\varphi - \pi) - \alpha_1}. \tag{11.109}$$

Следует отметить, что направление вращения на рис. 11.6 и последующих в силу обратного направления осей на экране монитора происходят по часовой стрелке. Это необходимо учитывать при сопоставлении выражений для траекторий (11.109) с их изображениями на рисунках.

Теперь рассмотрим осесимметричное движение трех тел. На рис. 11.8 показаны движения трех тел при начальной угловой скорости $\tilde{\omega}$/3,27 = 0,2. При такой начальной трансверсальной скорости частицы сближаются и в положении *5* достигают перицентриев, затем снова начинают удаляться друг от друга и в положении *9* приближаются к апоцентрию.

На рис. 11.9 представлено влияние начальной трансверсальной скорости $\tilde{\omega}$/3,27 на траектории движения трех тел. При $\tilde{\omega}$ = 0 происходит трехлучевое радиальное сближение трех тел (траектория *1*). При ненулевом значении $\tilde{\omega}$ частицы сближаются до перицентриев (траектории *2*, *3*, *4*), а затем возвращаются в апоцентрий. При начальной трансверсальной скорости, соответствующей $\alpha_1 = -1$, все частицы движутся по окружности *5*. При еще большей величине $\tilde{\omega}$ частицы удаляются друг от друга (траектория *6*), достигают апоцентриев и снова возвращаются в перицентрии. При $\tilde{\omega}$, соответствующей $\alpha_1 = -0{,}5$, частицы движутся по параболам *7*. При еще большей начальной скорости $\tilde{\omega}$ частицы движутся по гиперболам *8* и *9*.

Определим аналитические выражения для траекторий трех частиц. Для трех тел без центрального ($m_0 = 0$), согласно (11.101) и (11.101а), параметр траектории будет

$$\alpha_1 = -Gm_1 \big/ (\sqrt{3} r_{0p} v_{0p}^2). \tag{11.110}$$

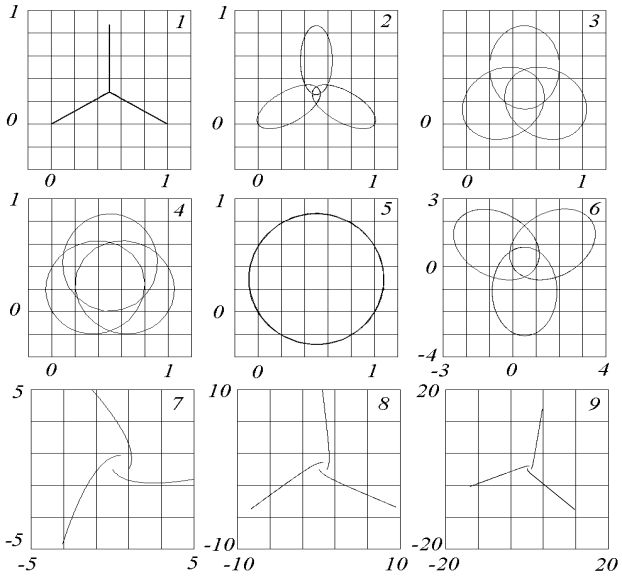


Рис. 11.9. Траектории движения трех частиц при вариации начальной трансверсальной скорости $\tilde{\omega}$/3.27 (в скобках указан параметр траектории α_1):
1 – 0 (0); *2* – 0.1 (– 0.528);
3 – 0.2 (-0.6356);
4 –0.25 (– 0.675);
5 – 0.306 (-1);
6 – 0.4 (– 586);
7 – 0.433 (– 0.5);
8 – 0.5 (– 0.375);
9 – 0.6 (– 0.26).

Из рис. 11.8 видно, что расстояние каждой частицы до центра масс *O* и начальный полярный угол могут быть записаны

$$r_{0p} = a/\sqrt{3} = R_p/\sqrt{3}, \quad \varphi_{0i} = \pi/6 + 2\pi(i-1)/3. \qquad (11.111)$$

Тогда уравнение траектории каждой частицы, согласно (11.108), относительно центра масс *O* запишется так:

$$r_{0i} = \frac{r_{0p}}{(\alpha_1+1)\cos(\varphi - \varphi_{0i}) - \alpha_1}, \quad i = 1, 2, 3, \qquad (11.112)$$

где $r_{0p} = R_p/\sqrt{3}$ - наименьшее расстояние траекторий до центра масс *O*.

Как и в случае двух тел, при решении уравнений по программе Galactica, начальная скорость в апсидной точке задается вращением области вокруг центра масс *O* с угловой скоростью $\omega = v_{0p}/r_{0p}$. После подстановки ее в (11.110) и выполнения преобразований получаем выражение для параметра траектории

$$\alpha_1 = -1/\tilde{\omega}^2, \qquad (11.113)$$

которое идентично выражению (11.103) при взаимодействии двух тел. Здесь, как и в случае двух тел, при $\alpha_1 < -1$ движение начинается с апоцентрия, поэтому, согласно (11.106), необходимо привести α_1 к параметрам в апоцентрии.

На рис. 11.10 показано осесимметрическое движение четырех тел при $\tilde{\omega}$ = 0,2. Тела начинают движение в апоцентриях, в положении *4* достигают перицентриев, затем начинают удаляться и в положении *8* приходят в апоцентрий.

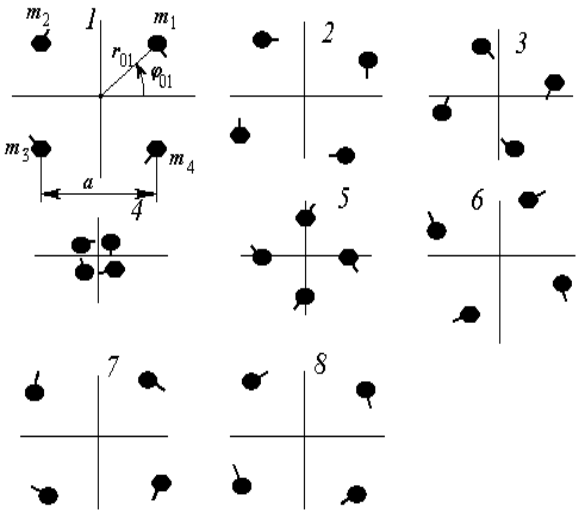


Рис. 11.10. Этапы движения 4 – х тел при $\alpha_1 = -0.587$ в моменты времени $2\tilde{t}$:
1 – 0.01; *2* – 1.0; *3* – 2.0; *4* – 3.0;
5 – 4.0; *6* – 5.0; *7* – 6.0; *8* – 7.0.

На рис. 11.11 показано влияние начальной трансверсальной скорости $\tilde{\omega}/2$ на траектории движения четырех тел. При $\tilde{\omega}$ = 0 происходит (см. траекторию *1*) четырехлучевое радиальное сближение тел. С увеличением $\tilde{\omega}$ тела приближаются к центру масс по эллиптическим траекториям, эксцентриситет которых с ростом $\tilde{\omega}$ уменьшается, и при $\tilde{\omega}$ = 0,822 траекторией становится окружность *6*. Дальнейшее увеличение $\tilde{\omega}$ приводит к разлету частиц, вначале по эллиптическим орбитам *7*, затем по параболам *8* и гиперболам *9*. В случае четырех частиц, согласно (11.101) и (11.101а), параметр траектории запишется в виде

$$\alpha_1 = -\frac{G\left(0{,}25 + \sqrt{2}/2\right)m_1}{r_{0p}v_{0p}^2}. \qquad (11.114)$$

Начальный угол перицентриев частиц $\varphi_{0i} = \pi/4 + \pi(i-1)/2$. Тогда в соответствии с (11.108) траектория каждой из четырех частиц будет определяться тем же уравнением (11.112) что и для случая трех частиц. При численном решении уравнений задается вращение области вокруг центра масс *O* (см. рис. 11.10) со скоростью $\omega = v_{0p}/r_{0p}$, где $r_{0p} = \sqrt{2}a/2$. Выражая (11.114) через $\tilde{\omega}$, получаем

$$\alpha_1 = -\frac{1+\sqrt{2}/4}{2\tilde{\omega}^2}. \qquad (11.115)$$

При $\alpha_1 < -1$ параметры траектории пересчитываются по формуле (11.106).

Осесимметричное движение трех и четырех тел мы рассматривали без центрального тела. Наличие его приводит, согласно (11.101), к увеличению по абсолютной величине значений μ_1 и α_1. Поэтому для тех же траекторий, в соответствии с (11.103) и (11.115), необходимо увеличивать начальную трансверсальную скорость путем увеличения $\tilde{\omega}$. Во всех случаях центральное тело будет находиться неподвижно в центре масс системы.

Итак, мы сопоставили точные решения (11.112) осесимметричнного взаимодействия многих тел с численными. Точные решения стабильны в

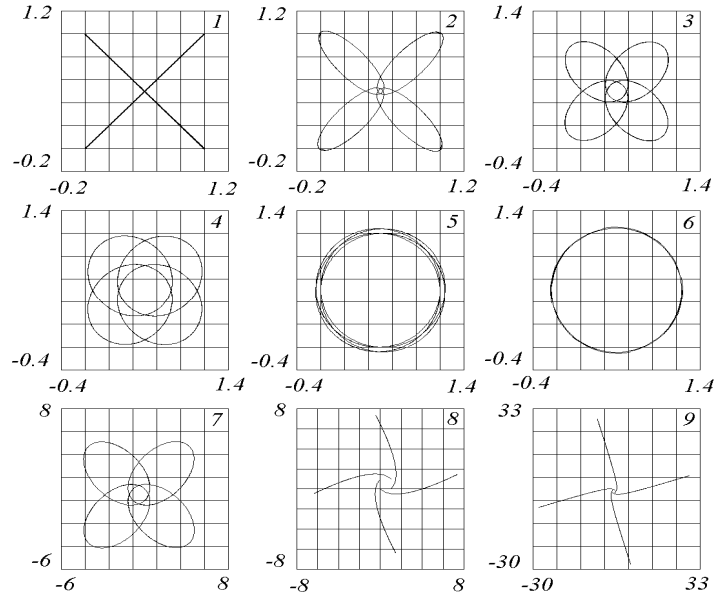


Рис. 11.11. Траектории движения четырех частиц при вариации начальной трансверсальной скорости 0.5 $\tilde{\omega}$ (в скобках указан параметр траектории α_1):
1 – 0 (0);
2 – 0.1 (– 0.515);
3 – 0.2 (– 0.587);
4 – 0.3 (– 0.681);
5 – 0.4 (-0.948);
6 – 0.411 (– 1);
7 – 0.5 (– 0.559);
8 – 0.582 (– 0.5);
9 – 0.6 (– 0.47).

пространстве. Однако численные решения дают незамкнутые траектории: у них смещается перицентрий и тем сильнее чем больше эксцентриситет орбиты (см. траекторию *2* на рис. 11.7). При совершенствовании численного метода удается существенно уменьшить изменение орбит в течение нескольких периодов, но ликвидировать его полностью невозможно. Оно проявляется по прошествии большего числа периодов. Эти изменения обусловлены тем, что интегрирование происходит не в соответствии с точным ускорением, которое определяется всемирным законом тяготения (11.1), а выполняется с погрешностью. Следовательно, приближенные решения задачи многих тел, например в виде выражения (11.2), использованного У. Леверье, также будут приводить к изменению орбиты, даже если его и нет. В связи с этим мы считаем, что проблема вековых изменений параметров орбит планет Солнечной системы далека до завершения и требует дальнейшего исследования.

11.6. ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧЕСКАЯ АККРЕЦИЯ

При аккреции вещества происходят соударения притягивающихся частей и механическая энергия движения переходит в тепловую. Численные эксперименты с программой Galactica показали, что этот процесс вызывает большие алгоритмические трудности. Например, необходимо зафиксировать момент соприкосновения. Кроме того, одновременно может происходить соударение нескольких тел. В связи с этим возникают вопросы, на которые могут дать ответы точные решения по аккреции.

Рассмотрим столкновение двух частиц. Ранее мы определили радиальную скорость (5.27) при радиальном движении и время (5.30). При столкновении частицы сливаются в одну, которая находится в центре их масс. Скорость каждой относительно центра

$$\upsilon_{r1} = \upsilon_r\, m_2/m; \qquad \upsilon_{r2} = \upsilon_r\, m_1\, /m,$$

где υ_r – относительная радиальная скорость сближения частиц в момент столкновения. Тогда тепловая энергия, выделяющаяся при столкновении двух частиц, будет

$$E_t = \frac{m_1\upsilon_{r1}^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_{r2}^2}{2} = \frac{m\upsilon_r^2}{2}.$$

Если на расстоянии R_0 между частицами их скорость сближения υ_{r0}, то в точке столкновения $R = d$ их радиальная скорость определится выражением (5.27), а тепловая энергия примет вид

$$E_t = \frac{m_{re}\upsilon_{r0}^2}{2} - \mu_1 m_{re}\left[\frac{1}{d} - \frac{1}{R_0}\right], \qquad (11.116)$$

где

$$m_{re} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (11.117)$$

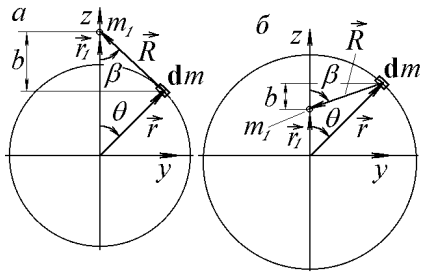
В безразмерных переменных (11.77)-(11.79) выражение для тепловой энергии (11.116) запишется так:

$$\tilde{E}_t = \frac{\tilde{m}_{re}\tilde{\upsilon}_{r0}^2}{2} + \tilde{m}_1\tilde{m}_2\left[\frac{1}{\tilde{d}} - \frac{1}{\tilde{R}_0}\right], \qquad (11.118)$$

где

$$\tilde{E}_t = E_t\frac{a}{Gm^2}. \qquad (11.119)$$

Рассмотрим центрально-симметрическое распределение тел в пространстве с плотностью $\rho(r)$, радиусом r_0 и скоростью $\upsilon_r(r,0) = 0$. Пусть в начальный момент $t = 0$ плотность по всему пространству постоянна, т.е. $\rho = \rho_0$. На тело с массой m_1, находящееся на расстоянии от центра $r_1 < r_0$, воздействуют тела внутренней системы ($r \le r_1$) и внешней с $r > r_1$. Рассчитаем силу воздействия внутренней системы (рис. 11.12, *а*) в проекции на ось *z*.



В силу осевой симметрии элементы кольца сферы

$$\mathbf{d}m = \rho r\mathbf{d}r2\pi r\sin\theta\mathbf{d}\theta$$

Рис. 11.12. Сила воздействия центрально-симметрически распределенного вещества в сферическом слое радиусом *r* на массу m_1, расположенную: *а* – вне вещества; *б* – внутри его.

воздействуют одинаково на тело m_1, поэтому сила воздействия кольца будет

$$\mathbf{dd}F_z = -\frac{2\pi G\rho m_1 r^2 \sin(\theta)\mathbf{d}\theta\cos(\beta)\mathbf{d}r}{R^2}. \qquad (11.120)$$

Это справедливо для всех углов $0 \le \theta \le \pi$. Из геометрических соображений следует

$$b = r_1 - r\cos(\theta), \quad R = \sqrt{b^2 + r^2\sin^2(\theta)}, \quad \cos(\beta) = b/R. \qquad (11.121)$$

Тогда (11.120) можно записать в виде интеграла

$$\mathbf{d}F_z = 2\pi\rho G m_1 \mathbf{d}r \int_1^{-1} \frac{(\bar{r}_1 - \gamma)\mathbf{d}\gamma}{\left(\bar{r}_1^2 + 1 - 2\bar{r}_1\gamma\right)^{3/2}}, \qquad (11.122)$$

где $\bar{r}_1 = r_1/r$, $\gamma = \cos(\theta)$.

Обозначим $x = \bar{r}_1^2 + 1 - 2\bar{r}_1\gamma$, тогда $\gamma = \left(\bar{r}_1^2 + 1 - x\right)/\left(2\bar{r}_1\right)$ и $\mathbf{d}\gamma = -\mathbf{d}x/2\bar{r}_1$. После подстановки в (11.122) получаем

$$\mathbf{d}F_z = -\frac{\pi G\rho m_1 \mathbf{d}r}{2r_1^2}\int\left[\frac{\bar{r}_1^2 - 1}{x^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right]\mathbf{d}x. \qquad (11.123)$$

После интегрирования (11.123) и возвращения к переменной γ сила запишется в виде

$$\mathbf{d}F_z = -\frac{2\pi G\rho m_1 \mathbf{d}r}{r_1^2}\frac{1 - \bar{r}_1\gamma}{\sqrt{\bar{r}_1^2 + 1 - 2\bar{r}_1\gamma}}\Bigg|_1^{-1}. \qquad (11.124)$$

Процесс подстановки пределов рассмотрим детальнее, так как он представляет большой интерес:

$$\mathbf{d}F_z = -\frac{2\pi G\rho m_1 \mathbf{d}r}{r_1^2}\left[\frac{1 + \bar{r}_1}{\sqrt{\bar{r}_1^2 + 1 + 2\bar{r}_1}} - \frac{1 - \bar{r}_1}{\sqrt{\bar{r}_1^2 + 1 - 2\bar{r}_1}}\right]. \qquad (11.125)$$

Подкоренные выражения представляют собой квадраты двучленов, поэтому они положительны, и извлекаемое из них число также положительно. Второе слагаемое при $\bar{r}_1 > 1$

$$-\frac{1 - \bar{r}_1}{\sqrt{\bar{r}_1^2 - 2\bar{r}_1 + 1}} = -\frac{1 - \bar{r}_1}{(\bar{r}_1 - 1)} = 1. \qquad (11.126)$$

Отметим, что при $\bar{r}_1 < 1$ это слагаемое будет равно (-1). После подстановки (11.126) в (11.125) сила воздействия сферической поверхности толщиной $\mathbf{d}r$ на тело m_1 запишется так:

$$\mathbf{d}F_z = -\frac{Gm_1}{r_1^2}\,4\pi\rho r^2\mathbf{d}r,$$

а сила воздействия всего вещества, содержащегося в шаре радиусом r, будет

$$F_z = -\frac{Gm_1}{r_1^2}\int_0^r 4\pi\rho r^2\mathbf{d}r. \qquad (11.127)$$

Эта сила справедлива при любом положении оси z относительно шаровой области вещества, т.е. она направлена по радиусу внутрь сферы. Так как масса вещества, содержащегося в шаре радиусом r, равна

$$m_2 = \int_0^r 4\pi\rho r^2\,\mathbf{d}r, \qquad (11.128)$$

то сила воздействия шарового скопления вещества с центрально-симметричным распределением плотности $\rho(r)$ на массу m_1, в соответствии с (11.127) и (11.128) запишется:

$$F_z = -\frac{Gm_1m_2}{r_1^2}, \qquad (11.129)$$

где $r_1 \ge r$. То есть вне зависимости от распределения плотности вещества в шаре выражение для силы совпадает с законом всемирного тяготения (11.1).

Рассмотрим теперь силу воздействия сферического слоя радиусом r на тело массой m_1, находящееся внутри сферы (см. рис. 11.12, *б*). Проекция силы на ось z запишется так же, как и (11.120), но с обратным знаком:

$$\mathbf{dd}F_z = \frac{2\pi G\rho m_1 r^2\sin(\theta)\mathbf{d}\theta\cos(\beta)\mathbf{d}r}{R^2}. \qquad (11.130)$$

Из геометрических соотношений следуют те же выражения (11.121), что и в первом случае. С их учетом выражение (11.130) перепишем в виде

$$\mathbf{d}F_z = 2\pi G\rho m_1\mathbf{d}r\int_1^{-1}\frac{(\bar{r}_1 - \gamma)\mathbf{d}\gamma}{\left(\bar{r}_1^2 + 1 - 2\bar{r}_1\gamma\right)^{3/2}}. \qquad (11.131)$$

Выражение (11.122) идентично (11.131), однако здесь $\bar{r}_1 < 1$. Интеграл (11.131) имеет решение (11.125), но при подстановке граничного значения $\gamma = 1$ во второе слагаемое при $\bar{r}_1 < 1$, согласно (11.126), оно будет равно (– 1), а интеграл (11.125) и, следовательно, (11.131) будет

$$\mathbf{d}F_z = 0. \qquad (11.132)$$

Таким образом, сферическая оболочка толщиной $\mathbf{d}r$ не оказывает воздействия на находящуюся внутри нее массу. Так как этот вывод справедлив для каждого сферического слоя, то сложение сил по всем элементам $\mathbf{d}r$ шара с полостью радиусом r дает равную нулю силу на находящуюся внутри полости частицу. Отметим, что этот результат известен в электростатике: внутри заряженной сферы нет сил воздействия на заряженную частицу.

Рассмотрим теперь обусловленное собственным притяжением движение вещества в центрально-симметричном массиве. На любое тело, находящееся на радиусе $r_1 \le r_0$, воздействовать будет только вещество внутренних слоев $r \le r_1$. Величина силы определяется выражением (11.129), где $m = m(r_1)$

– масса вещества в шаре радиусом r_1. Тогда ускорение тела при $r = r_1$ запишется

$$w = \frac{\mathbf{d}^2 r_1}{\mathbf{d}t^2} = -\frac{Gm(r_1)}{r_1^2}. \qquad (11.133)$$

В начальный момент плотность вещества везде одинакова, поэтому

$$m(r_1) = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r_{10}^3 , \qquad (11.134)$$

где $r_{10} = r_1(0)$ – положение тела m_1 в начальный момент времени ($t = 0$). Будем считать, что в процессе движения вещества не происходит обгона одних частей относительно других, поэтому масса вещества внутри сферы радиусом $r_1(t)$ остается все время постоянной, т.е. $m(r_1) = \text{const}$. Тогда уравнение (11.133) идентично уравнению радиального взаимодействия двух тел, в результате решения которого мы получили радиальную скорость движения (5.27) и время движения (5.30). При нулевой начальной скорости радиальная скорость и время запишутся так:

$$\upsilon_r(r_1) = \sqrt{2Gm(r_1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{10}}\right)}, \qquad (11.135)$$

$$t = \sqrt{\frac{r_{10}^3}{2Gm(r_1)}}\left[\frac{r_1\upsilon_r}{\sqrt{2Gm(r_1)r_{10}}} + \operatorname{arctg}\left(\upsilon_r\sqrt{\frac{r_{10}}{2Gm(r_1)}}\right)\right]. \qquad (11.136)$$

Будем считать, что тела, начавшие движение с радиуса r_{10} будут продолжать двигаться до тех пор, пока не произойдет их столкновение с центральной массой. На первом этапе можно считать, что плотность центральной массы во время аккреции не изменяется и равна некоторой средней плотности, например плотности Земли $\rho_f = 5000$ кг/м^3. При этой плотности радиус центральной массы, с которой столкнется тело m_1, будет

$$r_{1f} = \left(\frac{3m(r_1)}{4\pi\rho_f}\right)^{1/3} = r_{10}\left(\frac{\rho_0}{\rho_f}\right)^{1/3}. \qquad (11.137)$$

После подстановки (11.137) в (11.135) и (11.136) с учетом (11.134) получаем радиальную скорость движения массы m_1 при столкновении ее с центральным телом и время движения до столкновения:

$$\upsilon_r(r_{10}) = r_{10}\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}\left[\left(\frac{\rho_f}{\rho_0}\right)^{1/3} - 1\right]}, \qquad (11.138)$$

$$t = \sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho_0}}\left[\frac{\upsilon_r(\rho_0/\rho_f)^{1/3}}{r_{10}\sqrt{8\pi G\rho_0/3}} + \operatorname{arctg}\left(\upsilon_r\sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho_0 r_{10}^2}}\right)\right]. \qquad (11.139)$$

Со скоростью υ_r, согласно (11.138), шаровой слой массой $\mathbf{d}m = 4\pi r_{10}^2\rho_0\mathbf{d}r_{10}$ приблизится к центральному телу радиусом r_{1f}. В результате столкновения он передает телу кинетическую энергию, которая превратится в тепловую:

$$\mathbf{d}E_t = \frac{\mathbf{d}m\,\upsilon_r^2}{2} = \frac{16}{3}\pi^2 G\rho_0^2\left[\left(\frac{\rho_f}{\rho_0}\right)^{1/3} - 1\right]r_{10}^4\mathbf{d}r_{10}. \qquad (11.140)$$

Полную энергию аккреции получаем в результате интегрирования по всему массиву вещества:

$$E_t = \int_0^{r_0}\mathbf{d}E_t\mathbf{d}r_{10} = \frac{16\pi^2 G\rho_0^2 r_0^5}{15}\left[\left(\frac{\rho_f}{\rho_0}\right)^{1/3} - 1\right]. \qquad (11.141)$$

Время полной аккреции определяется при подстановке $r_{10} = r_0$ в выражение (11.139). Энергию E_t можно еще записать через массу центрального тела, равную массе области аккреции $m = 4\pi\rho_f r_f^3/3 = 4\pi\rho_0 r_0^3/3$, выражая в (11.141) плотность через нее:

$$E_t = \frac{3Gm^2}{5r_0}\left(\frac{r_0}{r_f} - 1\right). \qquad (11.142)$$

Энергия аккреции, как видно из (11.142), увеличивается с увеличением размера области r_0. Однако при $r_0/r_f > 100$ единицей в скобках можно пренебречь и энергия E_t уже от размера области не будет зависеть:

$$E_t = \frac{3Gm^2}{5r_f}. \qquad (11.143)$$

Еще Э. Кант и П. Лаплас рассматривали гипотезу, согласно которой Солнце и планеты образовались в результате сгущения первоначальной газовой туманности. На этой основе Г. Гельмгольц и У. Томсон развили контракционную теорию образования Солнца. Н.А. Колосовский [23] приводит вывод выражения (11.143), исследуя работу, выполняемую силами тяготения при падении массы $\mathbf{d}m$ с поверхности шара в его центр:

$$\mathbf{d}A = \frac{Gm\mathbf{d}m}{r^2}\,r. \qquad (11.144)$$

После подстановки массы шара m, сферического объема $\mathbf{d}m$ и интегрирования по радиусу от 0 до r получаем значение работы A, равной E_t согласно (11.143). В этом выводе имеется изъян, так как сила не постоянна при движении объема к центру. Следовательно, работу необходимо записывать как:

$$\mathbf{d}\mathbf{d}A = \mathbf{d}F\mathbf{d}r = \frac{Gm\mathbf{d}m}{r^2}\,\mathbf{d}r.$$

По-видимому, эта неточность несущественна при $r_0 >> r_f$.

В (11.143) входит радиус r_f – это конечное расстояние до центра, пройденное притягиваемой частицей. Видимый радиус Солнца $R_c > r_f$ и он определяет газовую оболочку Солнца. Притягиваемое тело движется с большой скоростью и проникает в Солнце на значительную глубину. Поэтому переданную механическую энергию центральному телу необходимо рассчитывать по конечной глубине проникновения. Так как r_f определяется средней плотностью ρ_f, то, варьируя последнюю, будем получать разные тепловые энергии аккреции.

Ниже приведены рассчитанные конечные (при $r_{10} = r_0$) скорость (11.138), время (11.139) и энергия аккреции (11.142) применительно к Солнцу в трех вариантах:

1) радиус начальной области вещества взят равным удвоенной большой полуоси орбиты Плутона ($r_0 = 1.2 \cdot 10^{13}$ м) и средняя плотность центрального тела при аккреции $\rho_f = 5000$ кг/ м^3;

2) в отличие от первого варианта увеличена в 2 раза плотность ρ_f;

3) в отличие от первого варианта радиус области равен половине расстояния до ближайшей звезды α-Центавра ($r_0 = 1.2 \cdot 10^{16}$ м). Полученные результаты аккреции Солнца сведены в таблицу:

N	r_0, м	ρ_f, кг/м^3	v_r, км/с	t, лет	E_t, Дж	t°, C$^\circ$	ρ, кг/м^3
1	$1.2 \cdot 10^{13}$	5 000	760	127.7	$3.42 \cdot 10^{41}$	$4.14 \cdot 10^{7}$	$2.72 \cdot 10^{-10}$
2	$1.2 \cdot 10^{13}$	10 000	853	127.7	$4.30 \cdot 10^{41}$	$5.22 \cdot 10^{7}$	$2.72 \cdot 10^{-10}$
3	$1.2 \cdot 10^{16}$	5 000	760	$4.04 \cdot 10^{6}$	$3.42 \cdot 10^{41}$	$4.14 \cdot 10^{7}$	$2.72 \cdot 10^{-19}$
4	$1.4 \cdot 10^{18}$	5 000	760	$5.1 \cdot 10^{9}$	$3.42 \cdot 10^{41}$	$4.14 \cdot 10^{7}$	$1.71 \cdot 10^{-25}$

Здесь также приведена условная температура центрального тела при условии, что средняя теплоемкость вещества равна теплоемкости воды: $C = 1$ ккал/(кг•град).

Как видно из таблицы, энергия аккреции E_t достигает достаточно большой величины. Конечная скорость падения вещества равна 760 км/с. В действительности еще до достижения $r_f = 5.55 \cdot 10^8$м (в первом варианте) тело столкнется с атмосферой Солнца ($r_s = 6.945 \cdot 10^8$ м). Поэтому реальная скорость падения будет меньше, однако переданная энергия Солнцу не изменит своей величины. Аккреция завершится за 127.7 лет, а средняя температура превысит 40 млн градусов. С увеличением плотности ρ_f в 2 раза (вариант 2) энергия аккреции возрастает в 1.26 раза. Увеличение в 1000 раз области аккреции (вариант 3) приводит к увеличению времени аккреции до 4 млн лет. В таблице есть еще вариант 4, в котором задана такая величина первоначальной плотности ρ_0 области, при которой аккреция будет продолжаться 5 млрд лет. Из представленных вариантов следует, что время аккреции может изменяться в широких пределах, а энергия аккреции в рассмотренной постановке является более консервативной.

Н.А. Колосовский [23] приводит расчет времени, за которое энергия аккреции будет излучена Солнцем. Полное излучение Солнца $L = 3{,}86 \cdot 10^{26}$ Вт рассчитывают на основании измеренного количества тепла, получаемого

единицей земной поверхности. Тогда время излучения Солнца энергии аккреции:

$$t_s = E_t/L = 0{,}89 \cdot 10^{15} \text{ с} = 28 \text{ млн. лет}$$

Так как возраст Солнечной системы предполагается равным 5 млрд лет, то это служит основанием для заключения о существовании иных источников энергии Солнца.

Однако имеются обстоятельства, которые не учитываются рассматриваемой центрально-симметричной постановкой задачи аккреции. Реальная аккреция происходит несимметрично, что, как показали наши расчеты по программе "Galactica", приводит к образованию циркулирующего по замкнутым орбитам вещества. В результате столкновений частицы могут терять орбитальную скорость и притягиваться центральным телом, так что аккреция происходит не за 127.7 лет, как получено для варианта 1, а растягивается на долгие годы.

В солнечной системе аккреция не закончилась: все планеты, спутники и астероиды испещрены ударными кратерами. В атмосферу Земли непрерывно внедряются метеориты, болиды, а временами и более крупные объекты. Недавнее падение фрагментов кометы Леви - Шумекера на Юпитер является убедительным тому доказательством. В связи с этим рассмотрим условия, при которых энергия современной аккреции Солнца совпадала бы с его излучением.

Выражения (11.138), (11.139) и (11.141) получены для вещества, распределенного с плотностью ρ_0 в области радиусом r_0, которое собирается в массу m. Рассмотрим задачу, когда вещество распределено с плотностью ρ_0 по области радиусом $r_{20} < r_0$. Тогда после аккреции вещества, заключенного в сфере радиусом r_{20}, на центральное тело будут осаждаться частицы, находившиеся на расстоянии $r_{10} > r_{20}$. Процесс аккреции описывается теми же выражениями, но в соотношении (11.141) вместо r_0 будет r_{10}:

$$E_t = \frac{16\pi^2 G \rho_0^2 r_{10}^5}{15}\left[\left(\frac{\rho_f}{\rho_0}\right)^{1/3} - 1\right]. \qquad (11.145)$$

Это энергия аккреции вещества, заключенного в сфере r_{10}.

Подставляя (11.138) в (11.139), запишем время аккреции в следующем виде:

$$t = \sqrt{\frac{3}{8\pi G \rho_0}}\left[\left(\frac{\rho_f}{\rho_0}\right)^{1/3}\sqrt{\left(\frac{\rho_f}{\rho_0}\right)^{1/3} - 1} + \operatorname{arctg}\left[\left(\frac{\rho_f}{\rho_0}\right)^{1/3} - 1\right]\right]. \qquad (11.146)$$

Как видим, время аккреции не зависит от размера области, а определяется только соотношением плотностей: первоначальной и конечной. То есть в рассматриваемой постановке внешние слои одновременно подходят к мес-

ту, где они должны столкнуться с центральным телом, и слияние происходит мгновенно. Это обусловлено тем, что с удалением частицы от центра области сила воздействия на нее, а следовательно, и ускорение увеличиваются за счет увеличения массы внутреннего объема вещества. Так, согласно (11.133), с учетом массы (11.134) внутренних слоев ускорение частицы на начальном радиусе r_{01} равно

$$w = \frac{4\pi G\rho_0}{3} r_{01}, \qquad (11.147)$$

т.е. начальное ускорение частицы пропорционально удалению ее от центра.

В центрально-симметричной постановке мы суммировали воздействие всех остальных частиц на рассматриваемую частицу и получили силу (11.129) воздействия вещества в объеме с радиусом r_{10}. Однако кроме этого всеобщего воздействия существуют локальные взаимодействия, в результате которых близко расположенные частицы устремляются друг к другу и сливаются. Из численных расчетов аккреции при разных количествах частиц и разных формах областей видно, что аккреция вначале начинается на периферии: при кубической форме в области главных диагоналей образуются множественные центры аккреции. Более массивные поглощают более мелкие. Затем самые массивные, сливаясь, образуют центральное тело, к которому затем в течение долгого времени стремятся остальные тела, которые оставались на периферии из-за малой скорости движения. Итак, реальная аккреция происходит непрерывно во всем объеме и энергия аккреции запасается в отдельных фрагментах. Поэтому полная энергия аккреции будет превышать величину, рассчитанную в задаче сферической аккреции. Чтобы выяснить насколько большие эти превышения, необходимо проводить дальнейшие численные исследования процесса аккреции.

По результатам сферической аккреции оценим среднюю мощность аккреции в виде $N = E_t/t$. При больших значениях (ρ_f/ρ_0) выражения для энергии (11.145) и времени (11.146) упрощаются:

$$E_t \approx \frac{16\pi^2 G\rho_0^2 r_{10}^5}{15}\left(\frac{\rho_f}{\rho_0}\right)^{1/3}, \quad t \approx \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho_0}}. \qquad (11.148)$$

Тогда средняя мощность аккреции:

$$N = \frac{64\sqrt{2}(0{,}75)^{5/3}\rho_0^{5/6}G^{1.5}m^{5/3}}{15\sqrt{3}\pi^{1/6}}. \qquad (11.149)$$

Данное выражение записано в зависимости от плотности области ρ_0 и массы m центрального тела, а начальный радиус r_{10} исключен. Для рассмотренных ранее значений плотности ρ_0 рассчитаем по этой формуле мощность аккреции для Солнца

N	ρ, кг/м^3	N, Вт
1	$2.72\cdot10^{-10}$	$3.2\cdot10^{27}$
2	$2.72\cdot10^{-19}$	$1.0\cdot10^{20}$
3	$1.71\cdot10^{-25}$	$6.9\cdot10^{14}$

Как видим, мощность излучения Солнца ($L = 3{,}86\cdot10^{26}$ Вт) находится внутри диапазона расчетных мощностей аккреции. То есть выделяемая Солнцем энергия могла бы пополняться за счет аккреции, если при этом будут реальные значения массы вещества, поступающего на него. При скорости аккреции υ_r = 760 км/с приток вещества в год

$$m_{yr} = \frac{LT_{yr}}{0.5\upsilon_r^2} = 4.24\cdot10^{22} \text{ кг/год}.$$

Это составляет 0,7% от массы Земли. По оценкам приток метеорного вещества на Землю составляет $5\cdot10^7$ кг/год [7]. Если считать, что поток метеорного вещества в Солнечной системе обусловлен притяжением Солнца, а на Землю попадают лишь те метеориты, которые перекрываются ее сечением πR_E^2, то годовой приток метеорного вещества на Солнце может быть оценен величиной

$$m_m = 5\cdot10^7 4\pi r_E^2/(\pi R_E^2) = 1.2\cdot10^{17} \text{ кг/год},$$

где r_E – расстояние Земли до Солнца; R_E – радиус Земли.
Полученная величина на пять порядков меньше необходимой величины притока массы для поддержания стабильной излучательной способности Солнца.

Выполненные расчеты показывают, что энергия аккреции может быть достаточно большой при образовании Солнца, но не достаточна (по имеющимся данным наблюдения) для поддержания в стабильном состоянии его теплосодержания. Центрально-симметричная модель аккреции дает заниженные значения энергии аккреции и необходимы дальнейшие исследования этого процесса, чтобы выяснить первоначальные запасы энергии Солнца и установить роль других источников энергии.

Отметим интересный результат, следующий из задачи о сферической аккреции. Из (11.135) следует, что радиальная скорость стягивающегося вещества увеличивается по мере приближения r_1 к радиусу аккреции r_f. Как мы уже неоднократно отмечали, результаты не зависят от направления интегрирования, поэтому их можно применить к разлету вещества, например к взрыву тела радиусом r_f. Если в момент взрыва скорость частиц тела будет подчиняться закону (11.138), т.е. такая же как в момент аккреции, то по достижению частицами расстояний $r_1 > r_f$ их скорость будет определяться выражением (11.135). Поэтому скорость частиц с удалением от центра взрыва будет уменьшаться и при достижении радиуса $r = r_{10}$ будет равна нулю.

Полученный результат совершенно естествен, так как при разлете вещества оно движется против равнодействующей сил тяготения и тормозится. В теориях расширяющейся Вселенной и "большого взрыва" скорость частиц с удалением от центра взрыва растет. Эти теории основаны на объяснении "покраснения" света галактик эффектом Допплера, согласно которому (см. формулу (8.75)) частота света удаляющегося источника уменьшается. Как видим, данное объяснение противоречит законам природы: при наличии тя-

готения скорость удаляющихся объектов должна падать. "Покраснение" света обусловлено другими причинами. Вселенная не была рождена взрывом и нет оснований считать ее расширяющейся. В этом плане представляются интересными работы рано ушедшего из жизни финского астронома Тойво Яаколла о равновесной Вселенной [95].

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ

Ниже представлены определения понятий и некоторые вытекающие из них следствия.

Все состоит из двух: окружающий мир и его описание.

Окружающий мир – часть всего, что не зависит от рассуждений человека.

Описание окружающего мира – понимание, толкование окружающего мира, т.е. представление о нем.

Знание – представление об окружающем мире, которое не претерпит существенных изменений со временем.

Истина – знание, при использовании которого результаты действий человека соответствуют его намерениям.

В виде истины обычно принимается какая-то принципиальная часть знания, играющая важную роль всегда или в определенный момент.

Наука – область человеческой деятельности, направленная на получение новых знаний об окружающем мире.

Теория – описание свойств объектов окружающего мира, методов человеческой деятельности и их результатов.

Время – характеризует изменчивость объектов и определяется в результате сопоставления изменения объектов с изменением эталонного тела (объекта).

Время существования, время жизни, длительность явления или объекта – количество циклов эталонного изменения, эквивалентных изменению рассматриваемых объекта или явления.

Момент времени в изменении объекта – привязка некоторого этапа его изменения к определенному этапу или циклу эталонного изменения.

Промежуток времени между двумя разными этапами изменения объекта – количество циклов эталонного изменения, произошедших между этими этапами.

Математическое время – результат сравнения изменений объектов со стабильным циклическим изменением воображаемого эталона.

Математическое время используется при теоретическом описании окружающего мира.

Величина объекта (тела) – результат сравнения при наложении эталона на объект; выражается количеством эталонов или количеством долей эталона, которые можно наложить на объект.

Величина объекта определяется в трех взаимно перпендикулярных направлениях, которые по мере убывания называются: длина, ширина и толщина.

Название величины объекта может быть привязано к вертикали: высота (глубина); к горизонтали: ширина (толщина); к сторонам света: широта, долгота, и т.п.

Величина промежутка между объектами – результат сравнения размещением эталонов между объектами; выражается количеством эталонов или их долей.

Промежутки между объектами располагаются в трех взаимно перпендикулярных направлениях.

Величины промежутков называются расстояниями.

Пространство – совокупность объектов и промежутков между ними.

Это физическое определение пространства следует отличать от слова «пространство», используемое в математике, поэзии, фантастике и других областях человеческой деятельности.

Математическое пространство – воображаемая система координат, в которой положение точек зафиксировано тремя числами.

Систему координат следует рассматривать синонимом математического пространства

Систему прямолинейных и взаимно перпендикулярных осей координат называют декартовой.

Математическое пространство используют для теоретического описания окружающего мира.

Скорость движения одного объекта относительно другого – изменение расстояния между ними за единицу времени.

Скорость характеризует движение объекта по отношению ко второму объекту. Один и тот же объект по отношению к нескольким имеет разные скорости.

Инерциальная система – воображаемая система координат, которая движется без ускорения, т.е. по инерции.

Ускорение движения объекта – изменение его скорости по отношению к инерциальной системе за единицу времени при условии, что в начальный момент измерения их скорости совпадали, а изменение скоростей рассматривается за бесконечно малый промежуток времени.

Ускорение движения объекта характеризует его движение безотносительно других объектов, т.е. ускорение есть собственная характеристика объекта (если пренебречь зависимостью от выбора инерциальной системы). Это свойство ускорения является математическим. При измерении ускорения вместо математических координат и времени применяются реальные эталоны длины и времени, а вместо инерциальной системы используется

объект, например земная поверхность, который движется ускоренно. Измеренное ускорение выражено по отношению к использованным эталонам.

Воздействие одного объекта на другой – способность объекта привести в движение второй объект либо изменить его движение, т.е. сообщить ускорение второму объекту.

Если на объект не оказывается воздействие, то он не имеет ускорения, т.е. покоится или движется прямолинейно и равномерно (первый закон механики).

Сила воздействия одного объекта на другой – характеристика воздействия, выраженная в изменении свойств третьего объекта, который противодействует взаимодействию первых двух.

Например, пружина, находящаяся между телом и притягивающей его земной поверхностью, уменьшает свою длину на величину Δl, которая характеризует силу воздействия Земли на тело.

Сила направлена вдоль ускорения тела.

Взаимодействующие тела имеют противоположно направленные ускорения.

Сила воздействия имеет отношение к двум телам, а величина ее одна и та же. Отсюда, силы взаимодействия двух тел, которые при описании взаимодействия человеком мысленно прикладываются к телам, равны по величине и противоположны по направлению (третий закон механики).

Масса тела – количество эталонных тел, которые при воздействии, характеризуемом некоторым ускорением, приводят к такому же изменению свойств противодействующего тела, как и рассматриваемое тело.

Например, на камень и на гири Земля воздействует с одинаковым ускорением. Масса камня равна такому количеству гирь, которые деформируют пружину, противодействующую их падению, на ту же величину, что и камень.

Масса тела, другими словами, – количество эталонных тел, которые при воздействии, характеризуемом одинаковой силой, приобретают то же ускорение, что и тело.

При воздействии на эталон (килограмм), которое характеризуется ускорением 1 м/с^2, изменение противодействующего тела принято за единицу силы F в 1 ньютон (Н).

Воздействие на эталон, характеризуемое ускорением w м/с^2, также определяется величиной силы

$$F = w.$$

Воздействие на группу из m эталонов, которое характеризуется ускорением w м/с^2, описывается также силой

$$F = mw.$$

При воздействиях на тело и на группу из m эталонов, которые характеризуются одинаковым ускорением w, сила воздействия на тело равна

$F = mw$ (второй закон механики).

Из определения массы следует, что она не зависит от вида воздействия.

Нет гравитационной и инерционной массы. Масса у тел одна и находится в соответствии с определением.

Масса может быть только у тех объектов, на которые можно оказать воздействие, т.е. ускорять.

Частицам, не испытывающим воздействие, например фотону, гравитону, нейтрино и т.п. , присваивать массу нельзя.

Масса тела – это коэффициент соответствия между силой воздействия на тело и его ускорением, который показывает во сколько раз при одинаковом по силе воздействии ускорение тела меньше ускорения эталона.

Сила воздействия на тело есть не что иное, как ускорение тела, но выраженное в других единицах.

Связь между силой и ускорением может быть только в виде $F = mw$ и другой зависимости силы от ускорения быть не может.

Законы механики не являются законами природы, это следствия принятого метода описания взаимодействия.

Законы механики одинаковы для любых взаимодействий. Они не могут быть изменены без изменения способа описания взаимодействий.

Работа силы $\vec{F}$ при перемещении тела на расстояние $\mathbf{d}\vec{l}$ – произведение перемещения $\mathbf{d}\vec{l}$ на проекцию на него силы: $\mathbf{d}A = \vec{F}\,\mathbf{d}\vec{l}$.

Потенциальная энергия взаимодействия тел – величина, равная работе с обратным знаком.

Кинетическая энергия тела – половина произведения массы тела на квадрат его скорости.

Электрический заряд – сила воздействия между одинаково наэлектризованными телами, находящимися на расстоянии в одну единицу длины.

Электромагнитная волна, создаваемая заряженным или намагниченным телом – это переменное воздействие в каждой отдаленной от тела точке, которое испытает помещенное в нее другое заряженное или намагниченное тело.

Поле – математический термин для обозначения распределения какой-либо функции A по пространственной системе координат x, y, z в момент времени t, которое записывается $A(x, y, z, t)$.

Электромагнитное поле – математический термин для обозначения характеристик электромагнитного воздействия, например электрической напряженности $E(x, y, z, t)$.

Гравитационное поле – математический термин для обозначения характеристики гравитационного воздействия, например распределения ускорения земного тяготения $g(x, y, z, t)$.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Мы проанализировали основания механики: время, пространство, скорость, ускорение, массу, силу и установили их суть. Пространство, время и масса не могут зависеть от скорости движения, поэтому введение такой зависимости в теории относительности являлось ошибкой.

Мы определились с познанием мира: есть окружающий мир и есть его описания. Описание придумываем мы, а окружающий мир не зависит от наших рассуждений. Эта позиция позволяет просто решать проблему реальности различных теоретических представлений. Все, что придумано воображением, является нереальным, т.е. его нет в окружающем мире. Нет субстанций типа: пространство, время, масса, сила, энергия, поле, эфир. Масса не может переходить в энергию, а время в вещество. Не существует пространственно-временного континуума, нет криволинейного мира, не было «Большого взрыва» и нет расширяющейся Вселенной.

Мы пришли к выводу, что многие построения современной физики являются искривленным описанием окружающего мира. Предстоит большая работа по его исправлению и созданию нового описания. Мы надеемся, что оно будет построено на безгипотезной основе. Физические науки больше не будут собранием сакральных положений, непонятных даже для посвященных. Они дадут людям четкое и ясное знание о мире, которое позволит им обустраивать свою жизнь осознанно, целеустремленно и оптимально.

Мы уверены, что в мире нет ничего потустороннего и необъяснимого. И есть много нам неизвестного и интересного. Мы надеемся, что вместе с теорией относительности уйдет в небытие мистическое восприятие окружающего мира и высшей целью общества станет стремление к новым знаниям о мире. Ближайшими задачами в направлении движения к этому являются: получение сверхсветовых частиц и пересмотр физики, начиная с опытов Э. Резерфорда. По-видимому, Эрнст Резерфорд в 20-м веке был последний ученый, который, подобно Исааку Ньютону, стремился не вносить гипотетических построений в научные результаты. Для описания явлений призываем использовать безгипотезный подход, который мы здесь пытались продемонстрировать на примерах различных взаимодействий. Рассмотренные в книге способы ускорения частиц до сверхсветовых скоростей мы предлагаем бу-

дущим физикам-экспериментаторам и ниже приводим наше обращение к ним, опубликованное в двух диссидентских научных журналах:

1. Smulsky J.J. Appeal to Physicists-Experimentalists // Apeiron. –1998.– Vol. 5, N.1–2.–P. 107;

2. Smulsky J.J. Appeal to Physicists-Experimentalists // Galilean Electrodynamics.– 1998.– Vol. 9, N.5.–P. 88.

ОБРАЩЕНИЕ К ФИЗИКАМ-ЭКСПЕРИМЕНТАТОРАМ

Уважаемые коллеги!

Я хочу привлечь Ваше внимание к ускорению элементарных частиц до сверхсветовой скорости. Нет никаких препятствий для достижения таких скоростей, кроме мировоззренческих, обусловленных теорией относительности.

Суть препятствия ТО в следующем. В природе объективно существуют воздействие тел друг на друга. Электромагнитные взаимодействия зависят не только от расстояния между телами, но и от их относительной скорости. Описание взаимодействий в ТО построено так, чтобы уравнения для взаимодействий неподвижных друг относительно друга тел и уравнения для взаимодействий относительно движущихся тел были одинаковыми. Поэтому, чтобы удовлетворить эмпирическим данным, необходимо параметры при покое преобразовать к параметрам при движении по известным релятивистским преобразованиям.

Если же взаимодействия между движущимися телами описывать такими же, как они есть, то есть зависящими от скорости их относительного движения, то преобразования пространства, времени и массы не нужны. Это во-первых.

Во-вторых, создатели ТО, увлекшись эфиром, впали в заблуждение предполагая, что они строят не описание взаимодействий, а создают мир, в котором материальные тела подвергаются изменениям в соответствии с релятивистскими соотношениями. А так как релятивистские преобразования при сверхсветовой скорости становились мнимыми, то в ТО сверхсветовые движения запретили. Кроме релятивистского описания взаимодействий имеются другие описания. Отдельные фрагменты описаний, основанных на классической физике, опубликованы в работах Г.И. Сухорукова и соавторов [64], T.G. Barnes и соавторов [83], C.W.Lucas,Jr. [102] и многих других. Например, Oleg D.Jefimenko в своей книге [98] представил восходящий к О. Хевисайду метод запаздывающих полей, который может полностью заменить теорию относительности.

В результате своих исследований я разработал силовой метод описания, основанный на выражении для силы взаимодействия двух тел, зависящей от расстояния и скорости между телами. Сверхсветовые движения существуют в природе: струи вещества и отдельные фрагменты галактик в далеком кос-

мосе движутся со скоростями, превосходящими скорость света в несколько раз; в атмосферу Земли внедряются космические частицы со сверхсветовыми скоростями. Я призываю получить сверхсветовые движения на Земле.

Предлагаю организациям и ученым принять участие в этой работе. Во многих организациях имеется все необходимое, чтобы ускорить частицы до сверхсветовой скорости по предложенных в моих работах схеме. При необходимости схема эксперимента может быть изменена и адаптирована к имеющимся условиям. Предлагаю также использовать разработанные мной методы для расчета ускорителей и ядерных превращений. Они точнее релятивистских.

Зачем нужны на Земле сверхсветовые движения ?

1. Это новые движители для межзвездных ракет.
2. Это мощный инструмент в противоастероидной защите Земли.
3. Это новые наземные технологии.
4. Это новые цели и перспективы для человечества.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Адо И.М., Журавлев А.А. и др.** Доклад о состоянии 76 ГэВ ускорителя ИФВЭ // Proc. Int. Conf. High-Energy Accelerators. CERN, Geneva.– 1971.– P.14– 16.
2. **Ангерс Б. и др.** Электрические поля для очистки пучка протонов от электронов в накопительных кольцах ЦЕРН // Proc. Int. Conf. High-Energy Accelerators. Geneva: CERN, 1971.– P. 298-300.
3. **Антиппа А.Ф.** Одномерная причинная теория тахионов // Nuovo Cimento– 1970. A10, N 3.– P. 389-406.
4. **Ацюковский В.А.** Эксперименты на Маунт-Вилсон: “Что действительно дали поиски “эфирного ветра?”// Химия и жизнь.-1982. N 8.– С. 85-87.
5. **Болотовский Б.** Относительность за пределами теории относительности // Наука и жизнь.– 1995.– N5.– С. 32-37.
6. **Бондарев Б.А.** Логическое опровержение теории относительности.– Краснодар: Краснодар. эксперимент. центр развития образования.-1995.– 12 с.
7. **Бронштейн В.А.** Метеоры, метеориты, метеороиды.– М.: Наука, 1987.– 176 с.
8. **Бриллюэн Л.** Новый взгляд на теорию относительности.– М., 1972.
9. **Вавилов С.И.** Экспериментальные основания теории относительности.– М.; Л.: Госиздат., 1928.
10. **Гольданский В.И., Жданов Г.Б.** О черенковском излучении космических частиц в атмосфере // ЖЭТФ.-1954.– N26.– С. 405.
11. **Горожанин О.О.** О времени, часах и отдельных аналогиях // ИР.-1988.– N 8.
12. **Градштейн И.С., Рыжик И.Н.** Таблицы интегралов, Сумм, рядов и произведений.,– М.: Физматгиз, 1962.
13. **Демин В.Н., Селезнев В.П.** Мироздание постигая...– М.: Молодая гвардия.– 1989.– 269с.
14. **Денисов А.А.** Мифы теории относительности / ЛитНИИНТИ. Вильнюс, 1989.– 52с.
15. **Добротин Н.А.** Космические лучи.– М., 1954.
16. **Завельский Ф.С.** Взвешивание миров, атомов и элементарных частиц.– М.: Атомиздат, 1970.– 176с.
17. **Иваненко Д., Соколов А.** Классическая теория поля.– М.: ГТТИ, 1949.
18. **Имбри Дж., Имбри К.П.** Тайны ледниковых эпох.– М.: Прогресс, 1988.–264 с.
19. **Камменринд М.** Теория относительности и свободные тахионы // Gen. Relat. and Gravit.– 1970.– V.I, N 1.– P. 44-62.
20. **Канарев Ф.М.** Новый анализ фундаментальных проблем квантовой механики.– Краснодар. кн. изд-во, 1990.– 176 с.

21. **Кауфман У.** Космические рубежи теории относительности.– М.: Мир.– 1981.– 352 с.
22. **Кифи Д.** Доклад о состоянии работ по ускорителям электронных колец в Беркли // Proc. Int. Conf. High-Energy Accelerators.CERN, Geneva, 1971.– P. 397-402.
23. **Колосовский Н.А.** Химическая термодинамика.– Л.: Госхимтехиздат. Ленингр. отд-ние,– 1932.– 446 с.
24. **Корн Г. и Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров.– М.: Физматгиз, 1968.– 720 с.
25. **Крылов А.Н.** Лекции о приближенных вычислениях.– М.: Гостехиздат.– 1954.– С. 273 .
26. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теория поля.– М.: Наука, 1973.– 504 с.
27. **Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.** Гидродинамика.– Москва: М.: Наука, 1986.– С. 131.
28. **Левин М.Л. и др.** Генератор вращающихся релятивистских электронных кольцеобразных сгустков // Докл. АН СССР.– 1972.\– Т.204, N 4.– С. 840-843.
29. **Ломакин Г.Д.** О массе и взаимодействии при относительном движении // Вопросы физики: Материалы юбилейной научн. конф. Ч. 3.\– Челябинск: ЧИМЭСХ, 1963.– С. 5-45.
30. **Ломакин Г.Д.** К объяснению “парадокса времени”// Вопросы физики: Материалы юбилейной научн. конф. Ч. 3. Челябинск: ЧИМЭСХ, 1963.– С. 65-74.
31. **Ломоносов М.В.** Явление Венеры на Солнце, наблюдаемое в Санкт-Петербургской Академии наук майя 26 дня 1761г. // Избранные Труды по химии и физике.– М.: Изд-во АН СССР, 1961.– С. 343-355.
32. **Лоренц Г.А.** Теория электронов.– М.: ГТТИ, 1956.
33. **Лоренц Г.А., Пуанкаре А., Эйнштейн А., Минковский А.** Принцип относительности // ОНТИ.– 1935.
34. **Манеев А.К.** К критике обоснования теорию относительности.– Минск.– 1960.– 61 с.
35. **Матвеенко Л.И.** Видимые сверхсветовые скорости разбегания компонентов экстрагалактических объектов // УФН.– 1983.– Т. 140, N 3.– С. 612-632.
36. **Мах Э.** Механика. Историческо-практический очерк ее развития. С.-Пб.,– 1909.
37. **Миткевич В.Ф.** Магнитный поток и его преобразование.– М.: Изд-во АНСССР.– 1945.
38. **Нестерова Н.М., Чудаков А.Е.** О наблюдении черенковского излучения, сопровождающего широкие атмосферные ливни космических лучей // ЖЭТФ, 1955.– Т. 28: 384.
39. **Ольховский В.С., Реками Е.** Проблема сверхсветовых частиц в рамках Теории относительности. //Вісник Київ. ун-ту. Сер. фіз.-1970.– N 11.– С. 58-63.
40. **Парсел Е.М.** Электричество и магнетизм.– М.: Наука, 1971.– 448 с.
41. **Пещевицкий Б.И.** Некоторые “штрихи” к преобразованиям Лоренца. Краткое изложение. Ин-т неорг. химии СО АН СССР.– Препр. 86-3.– Новосибирск, 1986.- 42 с.
42. **Пещевицкий Б.И.** Основной тормоз науки // Наука в Сибири.– 1989.– N 22.
43. **Пещевицкий Б.И.** Модель Лоренца и преобразование Галилея // Ред. кол. журн. Изв. вузов. Физика.– Томск, 1988.– 10с. Деп. в ВИНИТИ 09.02.88, N 1082– В88.
44. **Победоносцев Л.А., Паршин П.Ф.** Экспериментальное исследование угловой зависимости в эффекте Допплера // Журнал русской физической мысли.– 1992.– N. 1-12.– С. 71-79.
45. **Роузвер Н.Т.** Перигелий Меркурия. От Леверье до Эйнштейна.– М.: Мир, 1985.– 264 с.

46. **Саранцев В.П.** Перспективы развития коллективных методов ускорения //Вестник АН СССР. 1971.– N.– 11.
47. **Секерин В.И.** Очерк о теории относительности.– Новосибирск: Новосиб. кн. изд-во, 1988.-39 с.
48. **Секерин В.** Олаф Ремер против Альберта Эйнштейна // Наука в Сибири.– 1996.– N 47.– С. 7.
49. **Сербуленко М.Г.** Численное моделирование образования протопланет пояса Земля-Меркурий // Геология и геофизика.– 1996.-Т.37, N 9.– С. 166– 174.
50. **Сиама Д.** Физические принципы общей теории относительности.– М., 1971.– С. 74.
51. **Скобельцин Д.В.** Парадокс близнецов и теории относительности.– М.: Наука, 1966.
52. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т.2.– М.: Физматгиз, 1967.
53. **Смульский И.И.** О некоторых вопросах физики / Ин-т проблем освоения Севера СО АН СССР.– Тюмень.– 1988.– 52с.– Деп. в ВИНИТИ 28.02.1989, N 2032-В89.
54. **Смульский И.И.** Об электрических силах или описание воздействия на быстро движущиеся заряженные тела в нерелятивистских понятиях / Ин-т проблем освоения Севера СО АН СССР.– Тюмень.– 1988.– 59с.– Деп. в ВИНИТИ 26.12. 1988, N 8989-В88.
55. **Смульский И.И.** Получение сверхсветовых частиц / Ин-т проблем освоения Севера СО АН СССР.– Тюмень.– 1990.– 52с.– Деп. в ВИНИТИ 22.08.1990, N 4744-В90.
56. **Смульский И.И.** Эксперимент Бухерера и новый подход к рассмотрению взаимодействия быстродвижущихся тел / Ин-т проблем освоения Севера СО АН СССР.– Тюмень.– 1990.– 25с.– Деп. в ВИНИТИ 01.08.1990, N 4411-В90.
57. **Смульский И.И.** Когда исчезнут тормоза // Наука в Сибири.-1990.– N 22.
58. **Смульский И.И.** Аэродинамика и процессы в вихревых камерах. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние 1992.– 301с.
59. **Смульский И.И.** Электромагнитное и гравитационное воздействие (нерелятивистские трактаты).– Новосибирск: ВО “Наука”. Сиб. издат. фирма, 1994.– 224 с.
60. **Смульский И.И.** Траектории при взаимодействии двух тел, зависящем от относительных расстояния и скорости // Мат. моделирование.– 1995.– Т.7.– N.7.– С. 111-125.
61. **Смульский И.И.** Нерелятивистская картина мира и экология разума // Наука в Сибири.– 1995.– N. 36.– С. 11.
62. **Смульский И.И. С**токовая теория смерча // ИФЖ.– 1997.– Т.70.– N.6.– С. 979-989.
63. **Сухоруков В.И., Сухоруков Г.И. и Сухоруков Р.Г.** Спектры водородо– и гелиеподобных атомов.– Братск: Брат. индустр. ин-т, 1990.– Деп. в ВИНИТИ, 1990, N 5744-В90.
64. **Сухоруков Г.И., Сухоруков В.И. и Сухоруков Р.Г.** Реальный физический мир без парадоксов.– Иркутск: Иркут. Гос. Ун-т.– 1993.– 168 с.
65. **Тамм И.Е.** Основы теории электричества.– М.: Физматгиз, 1966.
66. **Терлецкий Я.П.** Парадоксы теории относительности.– М, 1966.
67. **Тяпкин А.А.** Об истории формирования идей специальной теории относительности // Принцип относительности.– М.:Атомиздат, 1973.– С. 271-330.
68. **Ходатаев К.В.** “Зеркальный захват” сильноточного самофокусирующего пучка релятивистских электронов на замкнутую орбиту // Атомная энергия.– 1972.– Т.32, N 5.– С.379-382.

69. **Чешев В.В.** Проблема реальности в классической и современной физике.– Томск: Из-во Том. ун-та, 1984.– 257с.
70. **Чешев В.В.** Исторические корни тормоза // Наука в Сибири.– 1989.– N 29.
71. **Чешев В.В.** Три статьи о принципе относительности.– Томск: Том. науч. центр СО АН СССР, 1992.– 40 с.– Препр. 4.
72. **Чудаков А.Е., Нестерова Н.М., Зацепин В.И., Тупин Е.Н.** Черенковское излучение широких атмосферных ливней космических лучей // Труды междунар. конф. по космическим лучам. Т.2: Широкие атмосферные ливни и каскадные процессы.– М, 1960.– С. 48.
73. **Шалагин А.** Как В.Секерин “срезал” А.Эйнштейна // Наука в Сибири.– 1996.– N47.– С. 7.
74. **Шапошников К.Н.** К Статье Н.П. Кастерина: “Sur la concordance doprincipe de relativite d'Einstein // Известия Иваново-Вознесенского политех. ин-та, вып.1.– 1919.– Вып.1.
75. **Широков М.Ф.** О правильном понимании теории относительности // Вопросы философии.– 1961.– N. 5.– С. 133-137.
76. **Эйнштейн А.** Объяснение движения перигелия Меркурия в общей теории относительности / А Эйнштейн. Собр. науч. трудов: В 4 т.– М.: Наука.– 1965.– Т. 1.– С. 439-447.
77. **Эйнштейн А.** Собрание научных трудов: В 4 т.– М.: Наука.– 1966.– Т.1.
78. **Яноши Л.** Дальнейшие соображения о физической интерпретации преобразований Лоренца // УФН.– 1957.– Т. 62, вып. 1.– С. 149.
79. **Яноши Л.** Значение философии для физических исследований // Вопр. философии.– 1958.– N. 4.– С. 101.
80. **Assis A.K.T.** Modern Experiments Related to Weber's Electrodynamics // Proc. Conf. Foundations of Mathematics and Physics. Perugia, 1989 / U. Bartocci and J.P. Wesley (ed.), Benjamin Wesley Publisher. Blumberg, Germany. 1990.– P. 8-22.
81. **Assis A.K.T. and Caluzi J.J.** A Limitation on Weber's Law // Phys. Lett. A.– 1991.– Vol. 160.– P. 25-30.
82. **Assis A.K.T.** Acceleration Dependent Forces: Reply to Smulsky// Apeiron.– 1995.– Vol. 2, N.1.– P. 25.
83. **Barnes T.G.** New Proton and Neutron Models // Creation Res. Soc. Quarterly.– 1980.– Vol. 17. N.1.– P. 42-47.
84. **Barnes T.G., Pemper R.R., Armstrong H.L.** A Classical Foundations for Electrodynamics // Creation Res. Soc. Quarterly.– 1977.– Vol. 14, June.– P. 38-45.
85. **Bergman D.L.** Spinning Charged Ring Model of Elementary Particles // Galilean Electrodynamics.– 1991. Vol. 2(2). P. 30-32.
86. **Bucherer A.H.** Die experimentelle Bestatigung des Relativitats Prinzips // Ann. Phys.– 1909.– Band 28. S. 513.
87. **Builder G.** Ether and Relativity //Aust. J. Phys.– 1958.– Vol. 11. N. 4.– P. 279-297.
88. **Cure J.C.** The Perihelic Rotation of Mercury by Newton's Original Method // Galilean Electrodynamics.– 1991.– Vol. 2.– N. 3.– P. 43-47.
89. **Fritcius R.S.** Эмиссия-поглощение-рассеяние (ЭПР). Физика частиц / Докл. Междунар. Ньютоновской конф. 22-27 марта 1993 г. E-mail: rsf1@ra.msstate.edu.- 16 р.
90. **Galbraith W., Jelley J.V.** Сообщения о световых вспышках ночного неба, связанных с ливнями в космических лучах. //Nature. 1953.– Vol. 171.– P. 349.
91. **Gerber P.** Die raumliche und reitliche Aubreitung der Gravitation // Z. Math. Phis.– 1898.– Vol. 43.– P. 93-104.

92. **Hannon R.J.** Einstein's 1905.– Derivation of his Transformation of Coordinates and Times // Special Relativity Letters.– 1997.– Vol. 1.– N. 4.-P. 66-72.
93. **Hsu J.P.,Hsu L.** A Physical Theory Based Solely on the First Postulate of Relativity // Phys. Lett. A.-1994.– N. 196.– P. 1-3.
94. **Heaviside Oliver.** The Electromagnetic Effects of a Moving Change // The Electrician.– 1888.– N. 22.– P. 147-148.
95. **Jaakola T.** Equilibrium Cosmology: Progress in New Cosmologies // Proc. XIII Krakov School in Cosmology, Sept. 1992 / Eds. H. Arp, K. Rudnicky and C.R. Keys.– Plenum Publ. Co. 1993.
96. **Jefimenko O.D.** Electricity and Magnetism.– Star City: Electret Sci. Co. (USA, West Virginia University). 1989.– 597 p.
97. **Jefimenko O.D.** Causality Electromagnetic Induction and Gravitation.– Star City: Electret Sci. Co. (USA,West Virginia University), 1992.– 180 p.
98. **Jefimenko O.D.** Electromagnetic Retardation and Theory of Relativity.– Star City: Electret Sci. Co. 1997.– 306 p.
99. **Laplace P.C.** Mecanique celeste // Courcier, Paris, 1805.– Vol. 4, Livre 10, Chap. 7, Sect. 22.
100. **Lee Coe.** Galilean-Newton Relativity versus Einsteinian Relativity (Berkeley, California) // Report presentating at the Second Intern. Conf. Problems of Space and Time in Natural Science, Leningrad. 15-22 September, 1991.– P. 1-38. (См. также: Журнал Русской физической мысли.– 1992.– N. 1-12.– С. 48-70).
101. **Le Verrier U.J.J.** Theorie du mouvement de Mercure // Ann. Observ. imp. Paris (Mem.).– 1859.– N. 5.– P. 1-96.
102. **Lucas C.W, Jr, Lucas J.W.** Electrodynamics of Real Particles vs. Maxwell's equations, Relativity Theory and Quantum Mechanics // Proc. 1992 Twin-Cities Creation Conference, July 29 to Aug.1, Northwestern College.– P. 243-252.
103. **Marinov S.** The coordinate Transformations of the Absolute Space-Time Theory // Foundations of Physics.– 1979.– Vol. 9, N. 5/6.– P. 445-460.
104. **Marinshek J.** Rationale Physik oder Science Fiction?– Graz: Verlag fur die Technische Universität, 1989.– 282 P.
105. **Marmet P.** Absurdities in Modern Physics: a Solution.– Cap-Saint-Ignace (Quebec): Ateliers Graphiques Marc Veilleux Inc.,– 1993.– 144 p.
106. **Mirabel I.F., Rodriguez L.F.** Superluminal Motions in our Galaxy // Seventeenth Texas Symp. Relativistic Astronomics and Cosmology: Ann. New York Academy of Sciences, 1995.– Vol. 759.– P. 21– 37.
107. **Phipps T.E., Jr.** Heretical Varities: Mathematical Themes in Physical Description.– Urbanna: Classic Non-Fiction Library, 1986.– 637 p.
108. **Phipps T.E., Jr.** Weber-types laws of Action-at-a-Distance in Modern Physics // Apeiron.– 1990.– N. 8.– P. 8-14.
109. **Peshchevitskiy B.I.** Relativity Theory: Alternativa or Fiasco? //Galilean Electrodynamics.– 1992.– Vol. 3, N. 6.– P. 103-105.
110. **Renshaw C.** Apparent Superluminal Jets as a Test of Special Relativity // Apeiron.– 1996.– Vol. 3, N. 2.– P. 46-49.
111. **Simon R.S., Hall J., Johuston K.J.** et al. / Сверхсветовое движение по направлению к стационарному пятну в радиоядре квазара 3С395 // Astrophys. J.– 1988.– Vol. 326, N. 1, Pt. 2.– L5-L8.
112. **Smulsky J.J.** A New Approach to Electrodynamics and to Theory of Gravitation // What physics for the next century? Prospects for renewal, open problems, "heretical" truths: Proc. Interna. Conf., Ishia, Italy, 29.09– 1.10.1991.– Bologna: Editrice Andromeda, 1992.– P. 336 –344.

113. **Smulsky J.J.** The Main Problem of Modern Physics// Apeiron.– 1992.– N. 14. P. 18.
114. **Smulsky J.J.** Force Cannot Depend on Acceleration // Apeiron.– 1994.– N. 20.– P. 43-44.
115. **Smulsky J.J.** The New Approach and Superluminal Particle Production // Physics Essays.– 1994.– Vol. 7, N. 2.– P. 153-166.
116. **Smulsky J.J.** Yes, Science is Confronted by a Great Revolution // Chinese J. of Systems Engineering and Electronics.– 1994.– Vol. 5, N. 2.– P. 72-76.
117. **Smulsky J.J.** The "Black Hole": Superstition of the 20-th Century // Apeiron.– 1996.– Vol. 3, N. 1.– P. 22-23.
118. **Smulsky J.J.** Producing Superluminal Particles //Apeiron.– 1997.– Vol. 4.– N. 2-3.– P. 92-93.
119. **Twain M.** The Undiscovered Physics.– Menlo Park: Plasmotronics, Inc. Rost Office Box E, 1995.
120. **Vermaulen R.C., Tayler G.B.** Красные смещения внегалактических радиоисточников, являющихся кандидатами в объекты со сверхсветовыми движениями // Astron. J.– 1995.– Vol. 109.– P. 1983-1987.
121. **Waldron R.A.** Notes on the Form of the Force Law // Physics Essays.– 1991.– Vol. 4, N. 2.– P. 247-248.
122. **Wallace B.G.** Radar Testing of the Relative Velocity of Light in Space // Spectr. Lett.,– 1969.– N. 2(12).– P. 361-367.
123. **Weber W.** // Ann. Phys. (Germany) 73 (1848) 193: English translation in Scientific Memoirs / Ed. R. Taylor.– N. Y.: Jonson Reprint Corp., 1966.– Vol. 5.– P. 489.
124. **Wesley J.P.** Weber Electrodynamics with Fields, Waves, and Absolute Space // Progress in Space-Time Physics.– Blumberg: Benjamin Wesley Publisher, 1987.– P. 193-209.
125. **Wesley J.P.** Selected Topics in Advanced Fundamental Physics.– Blumberg: Benjamin Wesley Publisher, 1991.– 431 p.
126. **Xowusu S.X.K.** The Confrontation Between Relativity and the Principle of Reciprocal Action // Apeiron, 1993.– Vol. 15.– P. 7-10.
127. **Xu Shaozhi and Xu Xiangqun.** Systematical Scrutiny into Special Relativity //Chinese J. System Engineering and Electronics.– 1993.– Vol. 4(2).– P. 75-85.
128. **Xu Shaozhi, Xu Xiangqun.** A New Explanation of the "Mass-Velocity Relation" // Chinese J. of System Engineering and Electronics.– 1994.–N. 5(2).– P. 68-71.

Приложение 1

ПРОГРАММА В СРЕДЕ MATHCAD ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПСОВИДНЫХ ОРБИТ

Исходные параметры

$rn := 1.00001$ - начальный радиус интегрирования;

$n := 10$ - количество участков интегрирования;

$b := 1.21996$ - радиус апоцентрия - конечный радиус интегрирования. Задается приближенно, а затем рассчитывается из условия равенства нулю радиальной скорости.

$al1 := -.70 \qquad bt := .70$

Нахождение радиуса апоцентрия

$$root\left[\left[1-\frac{bt^2}{b^2}-\left(1-bt^2\right)\cdot\exp\left[2\cdot al1\cdot bt^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{b^2-bt^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-bt^2}}\right)\right]\right],b\right]=1.21996726$$

Вычисление шага h участков и других параметров

$$h := \frac{b-rn}{n} \qquad i := 1..n \qquad j := 0..n \qquad j1 := 0..n+1 \qquad r_0 := rn$$

$$z := rn+h, rn+2\cdot h..b \qquad r_{j1+1} := r_{j1}+h \qquad a_i := r_i - h$$

$$bt0 := \sqrt{\left(1-al1^2\right)} \qquad bt0 = 0.7141 \qquad al := 2\cdot al1\cdot bt^2$$

Вычисление радиальной скорости

$$vr(z) := \frac{\sqrt{1-\frac{bt^2}{z^2}-\left(1-bt^2\right)\cdot\exp\left[2\cdot al1\cdot bt^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{z^2-bt^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-bt^2}}\right)\right]}}{bt}$$

Вычисление поправки в начальной точке rn

$$t_0 := \left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{al1}{\sqrt{1-bt^2}}}}\right]\cdot\left(\ln\left(\sqrt{rn^2-1}+rn\right)\right) \qquad fi_0 := \left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{al1}{\sqrt{1-bt^2}}}}\right]\cdot\frac{\sqrt{rn^2-1}}{rn}$$

Интегрирование времени t и угловой координаты fi

$$f(z) := \frac{1}{z^2\cdot vr(z)} \qquad ft(z) := \frac{1}{vr(z)} \qquad t_0 = 3.1779\cdot 10^{-2} \qquad fi_0 = 3.1779\cdot 10^{-2}$$

$$dt_i := \int_{a_i}^{r_i} ft(z)\,dz \qquad dfi_i := \int_{a_i}^{r_i} f(z)\,dz \qquad vor_j := vr\left(r_j\right)$$

Вычисление поправки в апоцентрии

$$dfi_{n+1} := acos\left[\frac{\sqrt{(al1+1)^2-\left(vor_n\right)^2}}{1+al1}\right]\cdot\left[\sqrt{\frac{al1+1}{1+\frac{al1}{\sqrt{1-(bt)^2}}}}\right] \qquad dt_{n+1} := dfi_{n+1}\cdot b^2$$

Суммирование по участкам

$$t_i := t_{i-1}+dt_i \qquad fi_i := fi_{i-1}+dfi_i \qquad t_{n+1} := t_n+dt_{n+1} \qquad fi_{n+1} := fi_n+dfi_{n+1}$$

$$vor_{n+1} := 0 \qquad r_{n+1} := b \qquad x_{j1} := r_{j1}\cdot\cos\left(fi_{j1}\right) \qquad y_{j1} := r_{j1}\cdot\sin\left(fi_{j1}\right)$$

Результаты вычислений

$al1 = -0.7 \qquad bt = 0.7 \qquad rn = 1 \qquad b = 1.22$

r_{j1}	vor_j	fi_{j1}	x_{j1}	y_{j1}	dfi_{j1}	t_{j1}
1	$6.2934\cdot10^{-4}$	$3.1779\cdot10^{-2}$	0.9995	$3.1774\cdot10^{-2}$	0	$3.1779\cdot10^{-2}$
1.022	$2.8816\cdot10^{-2}$	1.4797	$9.3004\cdot10^{-2}$	1.0178	1.4479	1.5014
1.044	$3.9224\cdot10^{-2}$	2.0831	-0.5118	0.91	0.6034	2.1445
1.066	$4.5617\cdot10^{-2}$	2.5473	-0.8832	0.5969	0.4642	2.6609
1.088	$4.9288\cdot10^{-2}$	2.9455	-1.0671	0.2119	0.3983	3.1227
1.11	$5.0668\cdot10^{-2}$	3.3087	-1.0945	-0.1846	0.3631	3.5612
1.132	$4.9866\cdot10^{-2}$	3.6557	-0.9857	-0.5566	0.347	3.9971
1.154	$4.6751\cdot10^{-2}$	4.0028	-0.7519	-0.8754	0.3471	4.4507
1.176	$4.0825\cdot10^{-2}$	4.3711	-0.3936	-1.1081	0.3683	4.9506
1.198	$3.0589\cdot10^{-2}$	4.805	0.1108	-1.1928	0.4339	5.5625
1.22	$5.8579\cdot10^{-4}$	5.7342	1.0407	-0.6366	0.9292	6.9282
1.22		5.7418	1.0455	-0.6287	$7.5999\cdot10^{-3}$	6.9395

Формирование выводной матрицы

$$P_{0,0} := al1 \qquad P_{0,1} := bt \qquad P_{0,2} := vor_0 \qquad P_{0,3} := vor_n$$

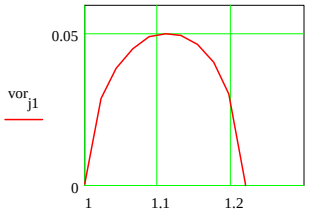
$$P_{0,4} := al \qquad P_{0,5} := rn \qquad P_{0,6} := b$$

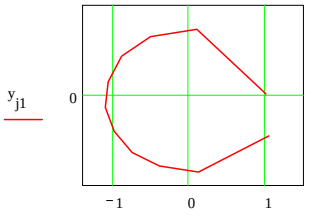
$$P_{j1+1,0} := r_{j1} \qquad P_{j1+1,1} := vor_{j1} \qquad P_{j1+1,2} := fi_{j1} \qquad P_{j1+1,3} := x_{j1}$$

$$P_{j1+1,4} := y_{j1} \qquad P_{j1+1,5} := dfi_{j1} \qquad P_{j1+1,6} := t_{j1}$$

Запись результатов в файл R_7070.prn $\qquad WRITEPRN("R_7070.prn") := P$

Построение графиков





ИСХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ТРАЕКТОРИЙ И ЗНАЧЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАСЧЕТНЫХ ТОЧКАХ

Основные обозначения

Al1 = α_1, Bt = β_p; Btc = $\beta_{pc} = (1 - \alpha_1^2)^{0.5}$;
Al10 = α_1^0; Bto = β_{t0}; Btc0 = $\beta_{pc0} = (1 - (\alpha_1^0)^2)^{0.5}$; Br0 = β_{r0};
Al = $\alpha = 2\alpha_1\beta_p^2$; ficl = φ_{cl}; Tcl = $\bar{t}_{cl}$; Racl =. $\bar{R}_{acl} = R_{acl}/R_p$.

Индексом «cl» обозначены параметры классической траектории:
для гиперболической и параболической ($\alpha_1 >= -0.5$) φ_{cl} и $\bar{t}_{cl}$ - угол и относительное время при конечных значениях *Rr*;
для эллиптических орбит ($\alpha_1 < -0.5$) φ_{cl}, $\bar{t}_{cl}$ и $\bar{R}_{acl}$ - угол, время и относительный радиус в апоцентрии.

Rr = R/R_p; Vor = $\bar{v}_r = v_r/v_p$; Vor0 = $\bar{v}_r^0 = v_r/v_{t0}$; Fi = φ;
X = x/R_p; Y = y/R_p; dFi = $\Delta\varphi$; T = $\bar{t} = t\, v_p/R_p$.

У траекторий с Bt = Btc нижний предел интегрирования равен 1.001.
Номера траекторий соответствуют номерам траекторий в таблицах значений всех расчетных точек [59].

Rr Vor Fi X Y dFi T

1. Притяжение (Al1 < 0)

1.1. Al1 = var

1.1.1. Al1 = -.1

1.1.1.1. Al1 = -.100 Bt = .100 Btc = .995
Al = -.002 Ficl = 1.681 Tcl = .1117E+04
.1000E+04 .8950E+00 .1680E+01-.1085E+03 .9941E+03 .1228E-03 .1117E+04

1.1.1.2. Al1 = -.100 Bt = .300 Btc = .995
Al = -.018 Ficl = 1.681 Tcl = .1117E+04
.1000E+04 .8990E+00 .1681E+01-.1095E+03 .9940E+03 .1223E-03 .1112E+04

1.1.1.3. Al1 = -.100 Bt = .500 Btc = .995
Al = -.050 Ficl = 1.681 Tcl = .1117E+04
.1000E+04 .9070E+00 .1683E+01-.1125E+03 .9937E+03 .1212E-03 .1102E+04

1.1.1.4. Al1 = -.100 Bt = .700 Btc = .995
Al = -.098 Ficl = 1.681 Tcl = .1117E+04
.1000E+04 .9200E+00 .1685E+01-.1144E+03 .9934E+03 .1194E-03 .1086E+04

1.1.1.5. Al1 = -.100 Bt = .900 Btc = .995
Al = -.162 Ficl = 1.681 Tcl = .1117E+04
.1000E+04 .9460E+00 .1693E+01-.1223E+03 .9925E+03 .1162E-03 .1057E+04

1.1.1.6. Al1 = -.100 Bt = .995 Btc = .995
Al = -.198 Ficl = 1.681 Tcl = .1117E+04
.1000E+01 .0000E+00 - - - - -
.1000E+04 .9680E+00 .1828E+01-.2547E+03 .9670E+03 .1135E-03 .1033E+04

1.1.2. AL1 = -0.2

1.1.2.1. Al1 = -.200 Bt = .100 Btc = .980

Rr Vor Fi X Y dFi T
Al = -.004 Ficl = 1.822 Tcl = .1288E+04
.1000E+04 .7760E+00 .1822E+01-.2485E+03 .9686E+03 .1417E-03 .1287E+04

1.1.2.2. Al1 = -.200 Bt = .300 Btc = .980
Al = -.036 Ficl = 1.822 Tcl = .1288E+04
.1000E+04 .7820E+00 .1825E+01-.2513E+03 .9679E+03 .1405E-03 .1277E+04

1.1.2.3. Al1 = -.200 Bt = .500 Btc = .980
Al = -.100 Ficl = 1.822 Tcl = .1288E+04
.1000E+04 .7960E+00 .1829E+01-.2552E+03 .9669E+03 .1381E-03 .1255E+04

1.1.2.4. Al1 = -.200 Bt = .700 Btc = .980
Al = -.196 Ficl = 1.822 Tcl = .1288E+04
1000E+04 .8190E+00 .1839E+01-.2648E+03 .9643E+03 .1341E-03 .1219E+04

1.1.2.5. Al1 = -.200 Bt = .900 Btc = .980
Al = -.324 Ficl = 1.822 Tcl = .1288E+04
.1000E+04 .8610E+00 .1890E+01-.3135E+03 .9496E+03 .1276E-03 .1161E+04

1.1.2.6. Al1 = -.200 Bt = .980 Btc = .980
Al = -.384 Ficl = 1.822 Tcl = .1288E+04
.1000E+01 .0000E+00 - - - - -
.1000E+04 .8700E+00 .2412E+01-.7452E+03 .6669E+03 .1262E-03 .1149E+04

1.1.3. AL1 = -.3

1.1.3.1. Al1 = -.300 Bt = .100 Btc = .954
Al = -.006 Ficl = 2.012 Tcl = .1574E+04
.1000E+04 .6340E+00 .2011E+01-.4264E+03 .9045E+03 .1733E-03 .1572E+04

1.1.3.2. Al1 = -.300 Bt = .300 Btc = .954
Al = -.054 Ficl = 2.012 Tcl = .1574E+04
.1000E+04 .6420E+00 .2017E+01-.4318E+03 .9020E+03 .1712E-03 .1553E+04

1.1.3.3. Al1 = -.300 Bt = .500 Btc = .954
Al = -.150 Ficl = 2.012 Tcl = .1574E+04
.1000E+04 .6580E+00 .2028E+01-.4416E+03 .8972E+03 .1669E-03 .1515E+04

1.1.3.4. Al1 = -.300 Bt = .700 Btc = .954
Al = -.294 Ficl = 2.012 Tcl = .1574E+04
.1000E+04 .6860E+00 .2061E+01-.4709E+03 .8822E+03 .1602E-03 .1455E+04

1.1.3.5. Al1 = -.300 Bt = .900 Btc = .954
Al = -.486 Ficl = 2.012 Tcl = .1574E+04
.1000E+04 .7210E+00 .2259E+01-.6352E+03 .7724E+03 .1524E-03 .1385E+04

1.1.3.6. Al1 = -.300 Bt = .930 Btc = .954
Al = -.519 Ficl = 2.012 Tcl = .1574E+04
.1000E+04 .7180E+00 .2438E+01-.7625E+03 .6469E+03 .1530E-03 .1391E+04

1.1.3.7. Al1 = -.300 Bt = .954 Btc = .954
Al = -.546 Ficl = 2.012 Tcl = .1574E+04
.1000E+01 .0000E+00 - - - - -
.1000E+04 .6990E+00 .3238E+01-.9953E+03-.9635E+02 .1572E-03 .1429E+04

1.1.3.8. Al10 = -.300 Bt0 = .960 Btc0 = .954 Br0 = .100
Al = -.576 Al1 = -.288 Ficl = 1.844 Tcl = .1416E+02
.1042E+02 .7540E+00 .2413E+01-.7772E+01 .6936E+01 .1300E-01 .1465E+02

1.1.3.9. Al10 = -.300 Bt0 = .960 Btc0 = .954 Br0 = .200
Al = -.576 Al1 = -.288 Ficl = 1.844 Tcl = .1416E+02
.1042E+02 .8890E+00 .1785E+01-.2214E+01 .1018E+02 .1100E-01 .1215E+02

1.1.3.10. Al10 = -.300 Bt0 = .960 Btc0 = .954 Br0 = .250
Al = -.576 Al1 = -.288 Ficl = 1.844 Tcl = .1416E+02
.1042E+02 .9790E+00 .1575E+01-.4379E-01 .1042E+02 .1000E-01 .1100E+02

1.1.3.11. A10 = -.300 Bt0 = .960 Btc0 = .954 Br0 = .280
Al = -.576 Al1 = -.288 Ficl = 1.844 Tcl = .1416E+02
.1042E+02 .1037E+01 .1476E+01 .9860E+00 .1037E+02 .1000E-01 .1037E+02

1.1.3.12. Al10 = -.300 Bt0 = .970 Btc0 = .954 Br0 = .100
Al = -.582 Al1 = -.291 Ficl = 1.848 Tcl = .1406E+02
.1031E+02 .7420E+00 .2413E+01-.7692E+01 .6864E+01 .1300E-01 .1458E+02

1.1.3.13. Al10 = -.300 Bt0 = .970 Btc0 = .954 Br0 = .200

Rr Vor Fi X Y dFi T

Al = -.582 Al1 = -.291 Ficl = 1.848 Tcl = .1406E+02
.1031E+02 .9260E+00 .1666E+01-.9800E+00 .1026E+02 .1100E-01 .1246E+02
1.1.3.14. Al10 = -.300 Bt0 = .970 Btc0 = .954 Br0 = .243
Al = -.582 Al1 = -.291 Ficl = 1.848 Tcl = .1406E+02
.1031E+02 .1026E+01 .1473E+01 .1007E+01 .1026E+02 .1000E-01 .1026E+02
1.1.3.15. Al10 = -.300 Bt0 = .980 Btc0 = .954 Br0 = .100
Al = -.588 Al1 = -.294 Ficl = 1.852 Tcl = .1397E+02
.1020E+02 .7110E+00 .2603E+01-.8760E+01 .5234E+01 .1400E-01 .1503E+02
1.1.3.16. Al10 = -.300 Bt0 = .980 Btc0 = .954 Br0 = .199
Al = -.588 Al1 = -.294 Ficl = 1.852 Tcl = .1397E+02
.1020E+02 .1015E+01 .1467E+01 .1057E+01 .1015E+02 .1000E-01 .1015E+02
1.1.3.17. Al10 = -.300 Bt0 = .987 Btc0 = .954 Br0 = .100
Al = -.592 Al1 = -.296 Ficl = .332 Tcl = .3410E+00
.1040E+01 .3000E-02 .7190E+00 .7822E+00 .6847E+00 .1690E+00 .7545E+00
1.1.3.18. Al10 = -.300 Bt0 = .987 Btc0 = .954 Br0 = .161
Al = -.592 Al1 = -.296 Ficl = 1.855 Tcl = .1391E+02
.1013E+02 .1008E+01 .1471E+01 .1009E+01 .1008E+02 .1000E-01 .1008E+02
1.1.4. Al1 = -.4
1.1.4.1. Al1 = -.400 Bt = .100 Btc = .917
Al = -.008 Ficl = 2.298 Tcl = .2211E+04
.1000E+04 .4490E+00 .2279E+01-.6506E+03 .7594E+03 .2447E-03 .2207E+04
1.1.4.2. Al1 = -.400 Bt = .300 Btc = .917
Al = -.072 Ficl = 2.298 Tcl = .2211E+04
.1000E+04 .4560E+00 .2311E+01-.6745E+03 .7382E+03 .2408E-03 .1959E+04
1.1.4.3. Al1 = -.400 Bt = .500 Btc = .917
Al = -.200 Ficl = 2.298 Tcl = .2211E+04
.1000E+04 .4710E+00 .2341E+01-.6963E+03 .7177E+03 .2335E-03 .2109E+04
1.1.4.4. Al1 = -.400 Bt = .700 Btc = .917
Al = -.392 Ficl = 2.298 Tcl = .2211E+04
.1000E+04 .4890E+00 .2434E+01-.7599E+03 .6500E+03 .2245E-03 .2050E+04
1.1.4.5. Al1 = -.400 Bt = .900 Btc = .917
Al = -.648 Ficl = 2.298 Tcl = .2211E+04
.1000E+04 .4450E+00 .3333E+01-.9817E+03-.1904E+03 .2469E-03 .2231E+04
1.1.4.6. Al1 = -.400 Bt = .917 Btc = .917
Al = -.673 Ficl = 2.298 Tcl = .2211E+04
.1000E+01 .0000E+00 - - - - -
.1000E+04 .4110E+00 .4512E+01-.1987E+03-.9801E+03 .2671E-03 .2412E+04
1.1.4.7. Al10 = -.400 Bt0 = .960 Btc0 = .917 Br0 = .200
Al = -.768 Al1 = -.384 Ficl = 2.242 Tcl = .2144E+04
.1042E+04 .7110E+00 .2142E+01-.5632E+03 .8763E+03 .1545E-03 .1523E+04
1.1.5. Al10 = -.498
1.1.5.1. Al10 = -.498 Bt0 = .500 Btc0 = .867 Br0 = .800
Al = -.498 Al1 = -.249 Ficl = 1.902 Tcl = .2791E+03
.2000E+03 .1848E+01 .1742E+01-.3407E+02 .1971E+03 .5352E-03 .2308E+03
1.1.5.2. Al10 = -.498 Bt0 = .930 Btc0 = .867 Br0 = .100
Al = -.926 Al1 = -.463 Ficl = .599 Tcl = .6400E+00
.1103E+01 .8979E-03 .1044E+01 .5547E+00 .9537E+00 .1490E+00 .3501E+01
1.1.5.3. Al10 = -.498 Bt0 = .930 Btc0 = .867 Br0 = .120
Al = -.926 Al1 = -.463 Ficl = .674 Tcl = .7340E+00
.1133E+01 .8174E-03 .1433E+01 .1557E+00 .1123E+01 .2890E+00 .1688E+01
1.1.5.4. Al10 = -.498 Bt0 = .930 Btc0 = .867 Br0 = .128
Al = -.926 Al1 = -.463 Ficl = .765 Tcl = .8550E+00
.1176E+01 .8828E-03 .2366E+01-.8399E+00 .8236E+00 .6650E+00 .4139E+01
1.1.5.5. Al10 = -.498 Bt0 = .930 Btc0 = .867 Br0 = .129
Al = -.926 Al1 = -.463 Ficl = 1.811 Tcl = .4384E+01
.2981E+01 .5892E-03 .9652E+01-.2904E+01-.6715E+00 .5450E+00 .2434E+02
1.1.5.6. Al10 = -.498 Bt0 = .930 Btc0 = .867 Br0 = .130

Rr Vor Fi X Y dFi T

Al = -.926 Al1 = -.463 Ficl = 1.822 Tcl = .4488E+01
.3035E+01 .9198E-03 .7565E+01 .8650E+00 .2910E+01 .5320E+00 .2150E+02
1.1.5.7. Al10 = -.498 Bt0 = .930 Btc0 = .867 Br0 = .200
Al = -.926 Al1 = -.463 Ficl = 2.611 Tcl = .3961E+06
.1172E+04 .1420E+00 .3420E+01-.1127E+04-.3221E+03 .7300E-01 .1076E+05
1.1.6. Al1 = -.5
1.1.6.1. Al1 = -.500 Bt = .100 Btc = .866
Al = -.010 Ficl = 3.137 Tcl = .7354E+08
.2300E+06 .3434E-03 .3145E+01-.2300E+06-.8302E+03 .8335E-03 .1429E+09
1.1.6.2. Al1 = -.500 Bt = .300 Btc = .866
Al = -.090 Ficl = 3.102 Tcl = .8691E+05
.2570E+04 .7453E-03 .3180E+01-.2568E+04-.9868E+02 .1100E-01 .1802E+06
1.1.6.3. Al1 = -.500 Bt = .500 Btc = .866
Al = -.250 Ficl = 3.015 Tcl = .2651E+04
2500E+03 .3000E-03 .3260E+01-.2482E+03-.2953E+02 .3500E-01 .5842E+04
1.1.6.4. Al1 = -.500 Bt = .700 Btc = .866
Al = -.490 Ficl = 2.831 Tcl = .1577E+03
.3728E+02 .1000E-02 .3502E+01-.3488E+02-.1315E+02 .9200E-01 .3700E+03
1.1.6.5. Al1 = -.500 Bt = .800 Btc = .866
Al = -.640 Ficl = 2.583 Tcl = .3524E+02
.1316E+02 .0000E+00 .3915E+01-.9417E+01-.9194E+01 .7000E-02 .8627E+02
1.1.6.6. Al1 = -.500 Bt = .866 Btc = .866
Al = -.750 Ficl = 2.257 Tcl = .1049E+02
.1000E+01 .0000E+00 - - - - -
.5456E+01 .0000E+00 .6695E+01 .5000E+01 .2184E+01 .5000E-01 .3193E+02
1.1.6.7. Al10 = -.500 Bt0 = .900 Btc0 = .866 Br0 = .200
Al = -.900 Al1 = -.450 Ficl = 2.529 Tcl = .3503E+05
.1111E+06 .2170E+00 .3268E+01-.1102E+06-.1399E+05 .5111E-04 .1010E+06
1.1.7. Al1 = -.6
1.1.7.1. Al1 = -.600 Bt = .100 Btc = .800
Al = -.012 Ficl = 3.142 Tcl = .2107E+02 Racl = .5000E+01
.4969E+01 .0000E+00 .3146E+01-.4969E+01-.2190E-01 .1000E-01 .2101E+02
1.1.7.2. Al1 = -.600 Bt = .300 Btc = .800
Al = -.108 Ficl = 3.142 Tcl = .2107E+02 Racl = .5000E+01
.4712E+01 .0000E+00 .3197E+01-.4705E+01-.2609E+00 .8000E-02 .1968E+02
1.1.7.3. Al1 = -.600 Bt = .500 Btc = .800
Al = -.300 Ficl = 3.142 Tcl = .2107E+02 Racl = .5000E+01
.4100E+01 .0000E+00 .3341E+01-.4019E+01-.8122E+00 .1700E-01 .1694E+02
1.1.7.4. Al1 = -.600 Bt = .700 Btc = .800
Al = -.588 Ficl = 3.142 Tcl = .2107E+02 Racl = .5000E+01
.2867E+01 .0000E+00 .3858E+01-.2162E+01-.1883E+01 .1600E-01 .1205E+02
1.1.7.5. Al1 = -.600 Bt = .800 Btc = .800
Al = -.768 Ficl = 3.142 Tcl = .2107E+02 Racl = .5000E+01
.1000E+01 .0000E+00 - - - - -
.1762E+01 .5518E-03 .9063E+01-.1648E+01 .6236E+00 .7020E+00 .1329E+02
1.1.8. Al1 = -.7
1.1.8.1. Al1 = -.700 Bt = .100 Btc = .714
Al = -.014 Ficl = 3.142 Tcl = .8693E+01 Racl = .2500E+01
.2482E+01 .0000E+00 .3148E+01-.2482E+01-.1590E-01 .2000E-01 .8632E+01
1.1.8.2. Al1 = -.700 Bt = .300 Btc = .714
Al = -.126 Ficl = 3.142 Tcl = .8693E+01 Racl = .2500E+01
.2334E+01 .0000E+00 .3220E+01-.2327E+01-.1828E+00 .2100E-01 .8172E+01
1.1.8.3. Al1 = -.700 Bt = .500 Btc = .714
Al = -.350 Ficl = 3.142 Tcl = .8693E+01 Racl = .2500E+01
.1991E+01 .0000E+00 .3446E+01-.1899E+01-.5968E+00 .1700E-01 .7203E+01
1.1.8.4. Al1 = -.700 Bt = .700 Btc = .714
Al = -.686 Ficl = 3.142 Tcl = .8693E+01 Racl = .2500E+01

Rr Vor Fi X Y dFi T
.1220E+01 .0000E+00 .5726E+01 .1035E+01-.6451E+00 .2600E-01 .6914E+01
1.1.8.5. Al1 = -.700 Bt = .714 Btc = .714
Al = -.714 Ficl = 3.142 Tcl = .8693E+01 Racl = .2500E+01
.1000E+01 .0000E+00 - - - - -
.1031E+01 .1925E-03 .2338E+02-.1845E+00-.1014E+01 .2877E+01 .2404E+02
1.1.8.6. Al10 = -.700 Bt0 = .800 Btc0 = .714 Br0 = .400
Al =-1.120 Al1 = -.560 Ficl = 3.142 Tcl = .4232E+02 Racl = .8333E+01
.1125E+05 .4140E+00 .2439E+01-.8586E+04 .7271E+04 .3350E-04 .3765E+05
1.1.9. Al1 = -.707
1.1.9.1. Al1 = -.707 Bt = .707 Btc = .707
Al = -.707 Ficl = 3.142 Tcl = .8338E+01 Racl = .2415E+01
Rn = 1.0001 Ra = 1.00045
.1000E+01 .0000E+00 - - - - -
.1000E+01 .0000E+00 .1061E+03 .7596E+00-.6504E+00 .9882E-04 .1062E+03
1.1.10. Al1 = -.8
1.1.10.1. Al1 = -.800 Bt = .100 Btc = .436
Al = -.016 Ficl = 3.142 Tcl = .5408E+01 Racl = .1667E+01
.1653E+01 .0000E+00 .3151E+01-.1653E+01-.1555E-01 .3000E-01 .5373E+01
1.1.10.2 Al1 = -.800 Bt = .300 Btc = .600
Al = -.144 Ficl = 3.142 Tcl = .5408E+01 Racl = .1667E+01
.1540E+01 .0000E+00 .3243E+01-.1532E+01-.1559E+00 .2800E-01 .5112E+01
1.1.10.3. Al1 = -.800 Bt = .500 Btc = .600
Al = -.400 Ficl = 3.142 Tcl = .5408E+01 Racl = .1667E+01
.1270E+01 .0000E+00 .3601E+01-.1138E+01-.5631E+00 .5700E-01 .4616E+01
1.1.10.4. Al1 = -.800 Bt = .599 Btc = .600
Al = -.574 Ficl = 3.142 Tcl = .8338E+01 Racl = .2415E+01
Rn = 1.001 Ra = 1.0042
.1004E+01 .0000E+00 .4366E+01-.3409E+00-.9444E+00 .2100E-01 .4362E+01
1.1.11. Al1 = -.9
1.1.11.1. Al1 = -.900 Bt = .100 Btc = .436
Al = -.018 Ficl = 3.142 Tcl = .3951E+01 Racl = .1250E+01
.1239E+01 .0000E+00 .3151E+01-.1239E+01-.1166E-01 .3100E-01 .3929E+01
1.1.11.2. Al1 = -.900 Bt = .300 Btc = .436
Al = -.162 Ficl = 3.142 Tcl = .3951E+01 Racl = .1250E+01
.1142E+01 .0000E+00 .3280E+01-.1131E+01-.1576E+00 .2700E-01 .3764E+01
1.1.11.3. Al1 = -.900 Bt = .400 Btc = .436
Al = -.288 Ficl = 3.142 Tcl = .3951E+01 Racl = .1250E+01
Rn = 1.001 Ra = 1.0462
.1046E+01 .0000E+00 .3411E+01-.1008E+01-.2784E+00 .2400E-01 .3565E+01
1.1.11.4. Al1 = -.900 Bt = .435 Btc = .436
Al = -.341 Ficl = 3.142 Tcl = .3951E+01 Racl = .1250E+01
Rn = 1.001 Ra = 1.00124
.1001E+01 .0000E+00 .2925E+01-.9776E+00 .2151E+00 .1300E-01 .2915E+01
1.1.11.5. Al10 = -.900 Bt0 = .600 Btc0 = .436 Br0 = .500
Al =-1.080 Al1 = -.540 Ficl = 3.142 Tcl = .7497E+02 Racl = .1250E+02
.1667E+05 .5850E+00 .2455E+01-.1289E+05 .1057E+05 .1896E-04 .4741E+05
1.2. Al = -0.3 = const
1.2.1. Al1 = -.900 Bt = .408 Btc = .436
Al = -.300 Ficl = 3.142 Tcl = .3951E+01 Racl = .1250E+01
.1036E+01 .0000E+00 .3315E+01-.1020E+01-.1788E+00 .1060E+00 .3426E+01
1.2.2. Al1 = -.700 Bt = .463 Btc = .714
Al = -.300 Ficl = 3.142 Tcl = .8693E+01 Racl = .2500E+01
.2074E+01 .0000E+00 .3377E+01-.2017E+01-.4837E+00 .1200E-01 .7417E+01
1.2.3. Al1 = -.500 Bt = .548 Btc = .866
Al = -.300 Ficl = 2.982 Tcl = .1324E+04
.1570E+03 .0000E+00 .3301E+01-.1550E+03-.2485E+02 .5679E-03 .3123E+04
1.2.4. Al1 = -.497 Bt = .550 Btc = .868

Rr Vor Fi X Y dFi T
Al = -.301 Ficl = 2.889 Tcl = .5838E+03
.1000E+03 .1030E+00 .3095E+01-.9989E+02 .4658E+01 .9000E-02 .6656E+03
1.2.5. Al1 = -.300 Bt = .707 Btc = .954
Al = -.300 Ficl = 1.998 Tcl = .1536E+03
.1000E+03 .6900E+00 .2050E+01-.4611E+02 .8874E+02 .1000E-02 .1430E+03
1.2.6. Al1 = -.200 Bt = .866 Btc = .980
Al = -.300 Ficl = 1.811 Tcl = .1274E+03
.1000E+03 .8530E+00 .1861E+01-.2861E+02 .9582E+02 .1000E-02 .1169E+03
1.2.7. Al1 = -.180 Bt = .913 Btc = .984
Al = -.300 Ficl = 1.780 Tcl = .1236E+03
.1000E+03 .8860E+00 .1786E+01-.2135E+02 .9769E+02 .1000E-02 .1128E+03
1.2.8. Al1 = -.154 Bt = .988 Btc = .988
Al = -.301 Ficl = 1.742 Tcl = .1191E+03
.1000E+01 .0000E+00 - - - - -
.1000E+03 .9240E+00 .2105E+01-.5092E+02 .8607E+02 .1000E-02 .1086E+03
1.2.9. Al10 = -.152 Bt0 = .992 Btc0 = .988 Br0 = .100
Al = -.302 Al1 = -.151 Ficl = 1.751 Tcl = .1208E+05
.1008E+05 .9760E+00 .1698E+01-.1278E+04 .9999E+04 .1138E-04 .1042E+05
1.2.10. Al1 = -.150 Bt = 1.000 Btc = .989
Al = -.300 Ficl = 1.736 Tcl = .1185E+03
.1000E+03 .1000E+01 .1562E+01 .8807E+00 .1000E+03 .9891E-03 .1000E+03
2. Отталкивание (Al1 > 0)
2.1. Al1 = .3
2.1.1. Al1 = .300 Bt = .100
Al = .006 Ficl = 1.337 Tcl = .7916E+03
.1000E+04 .1263E+01 .1338E+01 .2309E+03 .9730E+03 .8701E-04 .7930E+03
2.1.2. Al1 = .300 Bt = .500
Al = .150 Ficl = 1.337 Tcl = .7916E+03
.1000E+04 .1215E+01 .1342E+01 .2269E+03 .9739E+03 .9042E-04 .8235E+03
2.1.3. Al1 = .300 Bt = .900
Al = .486 Ficl = 1.337 Tcl = .7916E+03
.1000E+04 .1076E+01 .1380E+01 .1895E+03 .9819E+03 .1021E-03 .9294E+03
2.1.4. Al1 = .300 Bt = 1.000
Al = .600 Ficl = 1.337 Tcl = .7916E+03
.1000E+04 .1000E+01 .1569E+01 .1539E+01 .1000E+04 .1099E-03 .1000E+04
2.2. Al1 = .7
2.2.1. Al1 = .700 Bt = .100
Al = .014 Ficl = 1.146 Tcl = .6468E+03
.1000E+04 .1543E+01 .1147E+01 .4108E+03 .9117E+03 .7120E-04 .6490E+03
2.2.2. Al1 = .700 Bt = .500
Al = .350 Ficl = 1.146 Tcl = .6468E+03
.1000E+04 .1413E+01 .1163E+01 .3970E+03 .9178E+03 .7776E-04 .7084E+03
2.2.3. Al1 = .700 Bt = .900
Al = 1.134 Ficl = 1.146 Tcl = .6468E+03
.1000E+04 .1103E+01 .1277E+01 .2895E+03 .9572E+03 .9960E-04 .9062E+03
2.3. Al1 = 1.5
2.3.1. Al1 = 1.500 Bt = .100
Al = .030 Ficl = .927 Tcl = .5013E+03
.1000E+04 .1984E+01 .9289E+00 .5987E+03 .8010E+03 .5537E-04 .5051E+03
2.3.2. Al1 = 1.500 Bt = .500
Al = .750 Ficl = .927 Tcl = .5013E+03
.1000E+04 .1654E+01 .9703E+00 .5651E+03 .8251E+03 .6641E-04 .6050E+03
2.3.3. Al1 = 1.500 Bt = .900
Al = 2.430 Ficl = .927 Tcl = .5013E+03
.1000E+04 .1111E+01 .1205E+01 .3577E+03 .9339E+03 .9893E-04 .9132E+10

ПРОГРАММА В СРЕДЕ MATHCAD
ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ
ОКОЛОСВЕТОВОГО ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ

Исходные параметры (приведены к значениям в произвольной точке R0).

rn := 1 - начальный радиус интегрирования;

n := 10 - количество участков интегрировании;

b - конечный радиус интегрирования.

al10 := -4 bt := .7 br := 0.3 b := bt + .000002

Вычисление шага h участков и других параметров

$h := \frac{b - rn}{n}$ i := 1..n j := 0..n $r_0 := rn$ $r_{j+1} := r_j + h$ $z := rn + h, rn + 2 \cdot h .. b$

$a_i := r_i - h$ $bp := \sqrt{1 - bt^2}$ $fi_0 := 0$ $dfi_0 := 0$ $dfi_{n+1} := 0$ $t_0 := 0$ al1 := al10bt al := 2·al1

$ba := \sqrt{1 - bt^2 - \exp\left[2 \cdot al10 bt^2 \cdot \left(1 - bt^2\right)^{-.5}\right]}$ ba = 0.7112 bp = 0.7141

Вычисление радиальной скорости

$$vor(z) := \frac{\sqrt{1 - \frac{bt^2}{z^2} - \left(1 - br^2 - bt^2\right) \cdot \exp\left[2 \cdot al10 bt^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 - bt^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - bt^2}}\right)\right]}}{bt}$$

Интегрирование времени t и угловой координаты fi

$f(z) := \frac{1}{z^2 \cdot vor(z)}$ $ft(z) := \frac{1}{vor(z)}$ $dt_i := \int_{a_i}^{r_i} ft(z)\,dz$ $dfi_i := \int_{a_i}^{r_i} f(z)\,dz$

Суммирование по участкам Поправка в перицентрии при световой скорости

$t_i := t_{i-1} + dt_i$ $fi_i := fi_{i-1} + dfi_i$ $t_n := t_n - .002 \cdot bt^2$ $fi_n := fi_n - .002$

Приведение к параметрам в перицентрии

$z1_j := r_j$ $r_j := \frac{r_j}{bt}$ at := t_n afi := fi_n $fi_j := fi_j - afi$ $t_j := \frac{t_j - at}{bt^2}$

bt0 := bt br0 := br $x_j := r_j \cdot \cos(fi_j)$ $y_j := r_j \cdot \sin(fi_j)$

$vr_i := vor(z1_i) \cdot bt$ k := n..0 k1 := n + 1..1 $dfi_i := -dfi_i$

Результаты вычислений

al10 = −4 bt0 = 0.7 br0 = 0.3 b = 0.7

al = −5.6 al1 = −2.8 vor(rn) = 0.4286

r_k	vr_k	fi_k	x_k	y_k	dfi_{k1}	t_k
1	$2.3905 \cdot 10^{-3}$	0	1	0	0	0
1.0429	0.2837	0.2873	1.0001	0.2955	0.2853	0.2956
1.0857	0.3892	0.3997	1.0001	0.4225	0.1124	0.4226
1.1286	0.4611	0.4818	1.0001	0.523	$8.2152 \cdot 10^{-2}$	0.5231
1.1714	0.5107	0.5484	0.9996	0.6107	$6.6587 \cdot 10^{-2}$	0.6111
1.2143	0.5402	0.6056	0.9983	0.6912	$5.7194 \cdot 10^{-2}$	0.6924
1.2571	0.5495	0.657	0.9955	0.7678	$5.1368 \cdot 10^{-2}$	0.7708
1.3	0.5369	0.7051	0.99	0.8425	$4.8101 \cdot 10^{-2}$	0.8495
1.3429	0.4989	0.7523	0.9805	0.9176	$4.7194 \cdot 10^{-2}$	0.9319
1.3857	0.4276	0.8017	0.9638	0.9957	$4.9421 \cdot 10^{-2}$	1.0239
1.4286	0.3	0.8606	0.9314	1.0832	$5.8909 \cdot 10^{-2}$	1.1407

Формирование выводной матрицы

$P_{0,0} := al10$ $P_{0,1} := bt0$ $P_{0,2} := br0$ $P_{0,3} := al1$

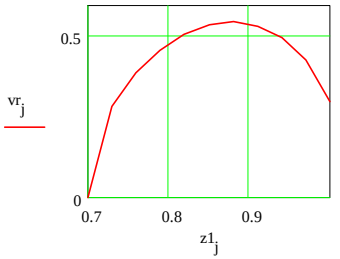
$P_{0,4} := al$ $P_{0,5} := rn$ $P_{0,6} := b$

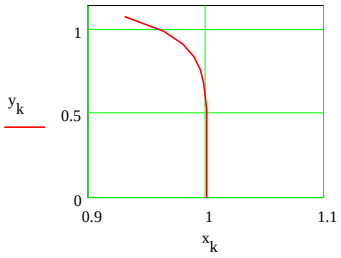
$P_{j+1,0} := r_j$ $P_{j+1,1} := vr_j$ $P_{j+1,2} := fi_j$ $P_{j+1,3} := x_j$

$P_{j+1,4} := y_j$ $P_{k+1,5} := dfi_k$ $P_{j+1,6} := t_j$

Запись результатов в файл R_407003.prn WRITEPRN("R_40703.prn") := P

Построение графиков





Приложение 4

ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ВНУТРИ «ЧЕРНЫХ ДЫР»

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p

1.1.1. $\alpha_1^0 = -2$ $\beta_{t0} = 0.5$ $\beta_{r0} = 0$ $\alpha_1 = -1$ $\alpha = -2$

1	0.002	0	1	0	0	0
1.1	0.3785	0.437	0.9966	0.4656	0.436	0.4701
1.2	0.4346	0.6209	0.976	0.6982	0.1839	0.7124
1.3	0.4405	0.7667	0.9363	0.9019	0.1457	0.9397
1.4	0.4251	0.8932	0.8777	1.091	0.1265	1.17
1.5	0.3972	1.009	0.7994	1.269	0.1155	1.413
1.6	0.3599	1.119	0.6992	1.439	0.1098	1.677
1.7	0.3137	1.227	0.5722	1.601	0.1089	1.973
1.8	0.2567	1.342	0.4086	1.753	0.1143	2.324
1.9	0.1814	1.475	0.1821	1.891	0.133	2.78
2	0	1.759	-0.3746	1.965	0.2844	3.879

1.1.2. $\alpha_1^0 = -2$ $\beta_{t0} = 0.5$ $\beta_{r0} = 0.1$ $\alpha_1 = -1$ $\alpha = -2$

1	0.002	0	1	0	0	0
1.1	0.3791	0.4369	0.9967	0.4654	0.4359	0.4699
1.2	0.4364	0.6203	0.9764	0.6976	0.1834	0.7116
1.3	0.4437	0.7652	0.9376	0.9005	0.1449	0.9376
1.4	0.43	0.8906	0.8805	1.088	0.1254	1.166
1.5	0.4038	1.005	0.8047	1.266	0.114	1.405
1.6	0.3687	1.112	0.7083	1.435	0.1077	1.664
1.7	0.3253	1.218	0.5874	1.595	0.1057	1.952
1.8	0.2725	1.327	0.4344	1.747	0.1091	2.286
1.9	0.2052	1.449	0.2305	1.886	0.1221	2.705
2	0.1	1.621	-0.0997	1.998	0.1715	3.361
2.003	0.09486	1.629	-0.1166	2	0.008032	3.393
2.006	0.08942	1.637	-0.1337	2.002	0.008466	3.427
2.009	0.08364	1.646	-0.1519	2.004	0.008987	3.463
2.013	0.07743	1.656	-0.1715	2.005	0.009627	3.502
2.016	0.07067	1.667	-0.1927	2.006	0.01044	3.545
2.019	0.0632	1.678	-0.2161	2.007	0.01151	3.592
2.022	0.05473	1.691	-0.2426	2.007	0.01302	3.645
2.025	0.04468	1.706	-0.2739	2.006	0.0154	3.708
2.028	0.03159	1.727	-0.3145	2.004	0.02001	3.79
2.031	0.0002414	1.774	-0.4107	1.989	0.04789	3.987

1.1.3. $\alpha_1^0 = -2$ $\beta_{t0} = 0.5$ $\beta_{r0} = 0.3$ $\alpha_1 = -1$ $\alpha = -2$

1	0.002	0	1	0	0	0
1.1	0.3833	0.4359	0.9971	0.4645	0.4349	0.4688
1.2	0.4504	0.6157	0.9797	0.693	0.1797	0.7055
1.3	0.4688	0.7545	0.9472	0.8904	0.1389	0.922
1.4	0.4667	0.8717	0.901	1.072	0.1172	1.135
1.5	0.4533	0.975	0.8418	1.242	0.1033	1.352
1.6	0.4325	1.069	0.7697	1.403	0.09393	1.578
1.7	0.4063	1.156	0.6844	1.556	0.08754	1.816
1.8	0.3755	1.24	0.5847	1.702	0.08351	2.072
1.9	0.3402	1.322	0.4686	1.841	0.08162	2.351
2	0.3	1.404	0.3326	1.972	0.08212	2.664
2.036	0.2843	1.434	0.2779	2.016	0.02985	2.786
2.071	0.2677	1.464	0.22	2.059	0.03051	2.914
2.107	0.2501	1.496	0.1579	2.101	0.03143	3.051

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
2.142	0.2312	1.528	0.09064	2.14	0.03269	3.199
2.178	0.2107	1.563	0.01717	2.177	0.03444	3.359
2.213	0.1881	1.6	-0.06428	2.212	0.03694	3.538
2.249	0.1626	1.641	-0.1566	2.243	0.04067	3.74
2.284	0.1325	1.687	-0.2656	2.269	0.04683	3.981
2.32	0.0935	1.747	-0.4057	2.284	0.05926	4.295
2.355	0.0004051	1.885	-0.727	2.24	0.138	5.053

1.1.4. $\alpha_1^0 = -2$ $\beta_{t0} = 0.5$ $\beta_{r0} = 0.5$ $\alpha_1 = -1$ $\alpha = -2$

1	0.002	0	1	0	0	0
1.1	0.3916	0.4341	0.998	0.4627	0.4331	0.4667
1.2	0.4772	0.607	0.9856	0.6845	0.1729	0.6943
1.3	0.5152	0.7358	0.9637	0.8725	0.1288	0.895
1.4	0.5327	0.8404	0.934	1.043	0.1047	1.085
1.5	0.5389	0.9292	0.8977	1.202	0.08877	1.272
1.6	0.538	1.007	0.8557	1.352	0.07732	1.457
1.7	0.5325	1.075	0.8085	1.495	0.06864	1.644
1.8	0.5238	1.137	0.7566	1.633	0.06184	1.833
1.9	0.5128	1.193	0.7002	1.766	0.05639	2.026
2	0.5	1.245	0.6395	1.895	0.05195	2.224
2.191	0.4722	1.335	0.5129	2.13	0.08952	2.617
2.382	0.4413	1.415	0.3707	2.353	0.08002	3.035
2.573	0.4081	1.488	0.2132	2.564	0.07329	3.484
2.764	0.3729	1.557	0.03943	2.763	0.0687	3.973
2.955	0.3357	1.622	-0.1526	2.951	0.06593	4.512
3.145	0.296	1.687	-0.3661	3.124	0.06499	5.117
3.336	0.2526	1.754	-0.6069	3.281	0.06628	5.814
3.527	0.2032	1.825	-0.8865	3.414	0.07113	6.652
3.718	0.1415	1.909	-1.234	3.507	0.08434	7.762
3.909	0.0006827	2.093	-1.949	3.389	0.1835	10.47

1.1.5. $\alpha_1^0 = -2$ $\beta_{t0} = 0.5$ $\beta_{r0} = 0.659$ $\alpha_1 = -1$ $\alpha = -2$

1	0.002	0	1	0	0	0
1.1	0.401	0.4321	0.9989	0.4606	0.4311	0.4614
1.2	0.5064	0.5981	0.9917	0.6757	0.166	0.6798
1.3	0.564	0.7176	0.9794	0.8548	0.1195	0.8659
1.4	0.5997	0.8119	0.9634	1.016	0.09431	1.037
1.5	0.623	0.8897	0.9444	1.165	0.07783	1.201
1.6	0.6383	0.9558	0.9232	1.307	0.06604	1.359
1.7	0.6482	1.013	0.9	1.442	0.05714	1.515
1.8	0.6543	1.063	0.8751	1.573	0.05017	1.668
1.9	0.6576	1.108	0.8489	1.7	0.04456	1.821
2	0.659	1.148	0.8213	1.824	0.03997	1.972
3.8	0.5926	1.519	0.1966	3.795	0.371	4.825
5.6	0.522	1.67	-0.5559	5.572	0.1512	8.069
7.4	0.4695	1.758	-1.375	7.271	0.08749	11.71
9.2	0.4297	1.816	-2.238	8.924	0.05877	15.73
11	0.3983	1.859	-3.131	10.54	0.04295	20.08
12.8	0.3728	1.893	-4.048	12.14	0.03315	24.76
14.6	0.3516	1.919	-4.984	13.72	0.02659	29.73
16.4	0.3336	1.941	-5.935	15.29	0.02194	34.99
18.2	0.3181	1.96	-6.9	16.84	0.01851	40.52
20	0.3046	1.976	-7.875	18.38	0.01588	46.31
201.8	0.09918	2.196	-118.1	163.6	0.22	1366
401.6	0.07044	2.225	-244.4	318.7	0.02906	3815
601.4	0.0576	2.238	-372.2	472.4	0.01292	6978

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
801.2	0.04992	2.246	-500.6	625.5	0.007714	10720
1001	0.04467	2.251	-629.6	778.2	0.005268	14960
1201	0.04079	2.255	-758.9	930.6	0.00389	19650
1401	0.03777	2.258	-888.4	1083	0.003025	24750
1600	0.03533	2.26	-1018	1235	0.002439	30220
1800	0.03332	2.262	-1148	1387	0.00202	36050
2000	0.03161	2.264	-1278	1538	0.001709	42210

1.1.6. α_1^0 = -2 β_{t0} = 0.5 β_{r0} = 0.7 α_1 = -1 α = -2

1	0.002	0	1	0	0	0
1.1	0.4038	0.4315	0.9992	0.46	0.4305	0.4637
1.2	0.5149	0.5956	0.9934	0.6732	0.1641	0.6795
1.3	0.5779	0.7126	0.9836	0.85	0.1171	0.8619
1.4	0.6186	0.8044	0.971	1.009	0.09174	1.029
1.5	0.6463	0.8796	0.9561	1.156	0.07524	1.187
1.6	0.6656	0.9431	0.9396	1.295	0.06349	1.339
1.7	0.6793	0.9978	0.9217	1.428	0.05466	1.488
1.8	0.6889	1.046	0.9026	1.557	0.04776	1.634
1.9	0.6955	1.088	0.8825	1.683	0.04223	1.778
2	0.7	1.125	0.8615	1.805	0.03771	1.921
3.8	0.6728	1.465	0.4017	3.779	0.3399	4.516
5.6	0.6279	1.595	-0.1333	5.598	0.1297	7.289
7.4	0.5947	1.666	-0.7005	7.367	0.071	10.24
9.2	0.5703	1.711	-1.285	9.11	0.04537	13.33
11	0.5517	1.743	-1.881	10.84	0.0317	16.54
12.8	0.5372	1.766	-2.485	12.56	0.02348	19.85
14.6	0.5255	1.784	-3.093	14.27	0.01813	23.24
16.4	0.5159	1.799	-3.706	15.98	0.01444	26.7
18.2	0.5079	1.81	-4.321	17.68	0.01178	30.22
20	0.5011	1.82	-4.938	19.38	0.009802	33.78
201.8	0.4279	1.917	-68.49	189.8	0.097	446
401.6	0.4232	1.923	-138.5	377	0.005793	916.1
601.4	0.4216	1.925	-208.5	564.1	0.001958	1389
801.2	0.4208	1.926	-278.5	751.2	0.0009845	864
1001	0.4203	1.926	-348.5	938.4	0.0005924	2339
1201	0.42	1.927	-418.5	1126	0.0003956	2814
1401	0.4197	1.927	-488.5	1313	0.000283	3290
1600	0.4196	1.927	-558.5	1500	0.0002124	3766
1800	0.4194	1.927	-628.6	1687	0.0001653	4243
2000	0.4193	1.928	-698.6	1874	0.0001323	4719

1.1.7. α_1^0 = -2 β_{t0} = 0.5 β_{r0} = 0.8 α_1 = -1 α = -2

1	0.002	0	1	0	0	0
1.1	0.4112	0.4299	0.9999	0.4585	0.4289	0.4619
1.2	0.5371	0.5892	0.9977	0.6668	0.1593	0.6713
1.3	0.6139	0.7004	0.994	0.8379	0.1112	0.8445
1.4	0.6667	0.7861	0.9892	0.9907	0.08575	1
1.5	0.7051	0.8555	0.9837	1.132	0.06939	1.146
1.6	0.7342	0.9134	0.9777	1.267	0.05788	1.285
1.7	0.7566	0.9627	0.9712	1.395	0.04931	1.419
1.8	0.7744	1.005	0.9643	1.52	0.04268	1.55
1.9	0.7885	1.043	0.9572	1.641	0.03741	1.677
2	0.8	1.076	0.9498	1.76	0.03313	1.803
3.8	0.8535	1.36	0.7948	3.716	0.2841	3.948
5.6	0.8517	1.459	0.6237	5.565	0.0991	6.057
7.4	0.8462	1.51	0.4471	7.386	0.05115	8.178

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
9.2	0.8413	1.542	0.2678	9.196	0.03133	10.31
11	0.8372	1.563	0.08718	11	0.02119	12.46
12.8	0.834	1.578	-0.09438	12.8	0.0153	14.61
14.6	0.8313	1.59	-0.2765	14.6	0.01157	16.77
16.4	0.8291	1.599	-0.4591	16.39	0.009055	18.94
18.2	0.8272	1.606	-0.6419	18.19	0.007282	21.11
20	0.8257	1.612	-0.825	19.98	0.005983	23.29
201.8	0.8089	1.667	-19.41	200.9	0.055	247.2
401.6	0.8079	1.67	-39.85	399.6	0.00305	494.4
601.4	0.8075	1.671	-60.3	598.4	0.001024	741.8
801.2	0.8074	1.672	-80.74	797.1	0.0005135	989.2
1001	0.8073	1.672	-101.2	995.9	0.0003086	1237
1201	0.8072	1.672	-121.6	1195	0.0002059	1484
1401	0.8071	1.672	-142.1	1393	0.0001472	1732
1600	0.8071	1.673	-162.5	1592	0.0001104	1979
1800	0.8071	1.673	-182.9	1791	8.593e-005	2227
2000	0.807	1.673	-203.4	1990	6.876e-005	2474

1.2.1. α_1^0 = -2 β_{t0} = 0.5516 β_{r0} = 0 α_1 -1.103 α = -2.206

1.813	0	1.572	-0.002003	1.813	0	3.051
1.772	0.138	1.39	0.3186	1.743	-0.1819	2.462
1.732	0.1949	1.311	0.4455	1.673	-0.07944	2.218
1.691	0.2383	1.247	0.5387	1.603	-0.06401	2.03
1.65	0.2745	1.19	0.6136	1.532	-0.05676	1.872
1.61	0.3058	1.137	0.6764	1.461	-0.0527	1.732
1.569	0.3335	1.087	0.7301	1.389	-0.05032	1.604
1.528	0.3581	1.038	0.7766	1.316	-0.04899	1.487
1.488	0.3799	0.9894	0.8171	1.243	-0.04842	1.377
1.447	0.3992	0.941	0.8524	1.169	-0.04843	1.272
1.406	0.4158	0.892	0.8831	1.095	-0.04897	1.173
1.366	0.4297	0.842	0.9096	1.019	-0.05002	1.077
1.325	0.4403	0.7904	0.9324	0.9417	-0.05159	0.9833
1.285	0.4473	0.7366	0.9515	0.8629	-0.05376	0.8918
1.244	0.4495	0.6799	0.9672	0.7821	-0.05668	0.8012
1.203	0.4456	0.6193	0.9797	0.6985	-0.0606	0.7105
1.163	0.4332	0.5533	0.9891	0.611	-0.06601	0.6182
1.122	0.408	0.4794	0.9954	0.5175	-0.0739	0.5218
1.081	0.3615	0.3927	0.999	0.4138	-0.08673	0.4167
1.041	0.2742	0.2799	1	0.2875	-0.1128	0.29
1	0.001904	0	1	0	-0.2789	0

1.3.1. α_1^0 = -2 β_{t0} = 0.7 β_{r0} = 0 α_1 = -1.4 α = -2.8

1	0.00169	0	1	0	0	0
1.043	0.2826	0.2872	1	0.2954	0.2862	0.2964
1.086	0.3756	0.4014	0.9994	0.4242	0.1142	0.4255
1.129	0.4211	0.4887	0.9965	0.5298	0.0873	0.5324
1.171	0.4366	0.5639	0.99	0.6261	0.07526	0.6318
1.214	0.4308	0.6331	0.9789	0.7185	0.06921	0.7303
1.257	0.4076	0.6999	0.9616	0.8098	0.06675	0.8322
1.3	0.3683	0.7673	0.9358	0.9024	0.06737	0.9424
1.343	0.3107	0.8393	0.897	0.9993	0.07205	1.068
1.386	0.2254	0.9248	0.8342	1.106	0.08549	1.228
1.429	0	1.111	0.6338	1.28	0.1863	1.6

1.3.2. α_1^0 = -2 β_{t0} = 0.7 β_{r0} = 0.1 α_1 = -1.4 α = -2.8

1	0.00169	0	1	0	0	0

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
1.043	0.2827	0.2872	1	0.2954	0.2862	0.2964
1.086	0.3759	0.4013	0.9994	0.4241	0.1141	0.4254
1.129	0.4219	0.4885	0.9966	0.5297	0.08719	0.5322
1.171	0.4384	0.5635	0.9903	0.6258	0.07503	0.6314
1.214	0.4339	0.6324	0.9795	0.7177	0.06883	0.7293
1.257	0.4125	0.6985	0.9627	0.8084	0.06613	0.8303
1.3	0.3755	0.7649	0.9379	0.9002	0.06636	0.9388
1.343	0.3215	0.8351	0.9012	0.9955	0.07021	1.061
1.386	0.2433	0.9163	0.8436	1.099	0.08119	1.213
1.429	0.1	1.041	0.7218	1.233	0.1248	1.461
1.429	0.0949	1.045	0.7172	1.236	0.004166	1.47
1.43	0.08951	1.05	0.7122	1.24	0.004398	1.478
1.431	0.08376	1.054	0.7068	1.244	0.004676	1.488
1.432	0.07757	1.059	0.7009	1.249	0.005016	1.498
1.433	0.07084	1.065	0.6945	1.253	0.005446	1.51
1.434	0.06338	1.071	0.6874	1.258	0.006015	1.522
1.434	0.05491	1.078	0.6792	1.263	0.006817	1.536
1.435	0.04485	1.086	0.6693	1.27	0.008073	1.553
1.436	0.03173	1.096	0.6564	1.277	0.0105	1.574
1.437	0.0009264	1.121	0.625	1.294	0.02466	1.625

1.3.3. α_1^0 = -2 β_{t0} = 0.7 β_{r0} = 0.3 α_1 = -1.4 α = -2.8

1	0.00169	0	1	0	0	0
1.043	0.2828	0.2872	1	0.2954	0.2862	0.2964
1.086	0.3781	0.401	0.9996	0.4238	0.1138	0.4251
1.129	0.4289	0.4873	0.9972	0.5284	0.08628	0.5307
1.171	0.4526	0.5606	0.9921	0.6228	0.07329	0.6276
1.214	0.4579	0.6266	0.9836	0.712	0.066	0.7214
1.257	0.4491	0.6883	0.9709	0.7986	0.06176	0.8157
1.3	0.4287	0.748	0.953	0.8842	0.05963	0.9132
1.343	0.3976	0.8073	0.9286	0.9701	0.0593	1.017
1.386	0.3555	0.8683	0.8954	1.058	0.06103	1.13
1.429	0.3	0.9342	0.8493	1.149	0.06589	1.261
1.438	0.2857	0.9494	0.8371	1.169	0.01537	1.293
1.447	0.2704	0.9653	0.8236	1.19	0.01598	1.326
1.456	0.2538	0.9821	0.8087	1.211	0.01673	1.361
1.466	0.2358	0.9998	0.7921	1.233	0.01769	1.399
1.475	0.2159	1.019	0.7735	1.256	0.01893	1.44
1.484	0.1937	1.039	0.7521	1.279	0.02062	1.485
1.493	0.1683	1.062	0.727	1.304	0.02304	1.536
1.503	0.1378	1.089	0.6959	1.332	0.02691	1.596
1.512	0.0977	1.124	0.6535	1.363	0.03454	1.675
1.521	0.0002855	1.206	0.543	1.421	0.08192	1.864

1.3.4. α_1^0 = -2 β_{t0} = 0.7 β_{r0} = 0.5 α_1 = -1.4 α = -2.8

1	0.00169	0	1	0	0	0
1.043	0.2832	0.2871	1	0.2953	0.2861	0.2964
1.086	0.3825	0.4004	0.9998	0.4232	0.1133	0.4244
1.129	0.4424	0.4849	0.9984	0.5261	0.08455	0.5279
1.171	0.4798	0.5551	0.9955	0.6174	0.07016	0.6206
1.214	0.5024	0.6164	0.9908	0.7019	0.06126	0.7077
1.257	0.5145	0.6715	0.9842	0.7822	0.05515	0.7919
1.3	0.5189	0.7222	0.9755	0.8593	0.0507	0.8747
1.343	0.5173	0.7695	0.9645	0.9344	0.04734	0.9574
1.386	0.5107	0.8143	0.9511	1.008	0.04477	1.041
1.429	0.5	0.8571	0.9352	1.08	0.04281	1.125

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
1.477	0.4836	0.9037	0.9139	1.16	0.04668	1.224
1.526	0.463	0.9491	0.8885	1.24	0.04542	1.326
1.574	0.4385	0.9939	0.8586	1.319	0.04476	1.433
1.622	0.41	1.039	0.8233	1.398	0.04471	1.548
1.671	0.3773	1.084	0.7817	1.477	0.04539	1.671
1.719	0.3396	1.131	0.7321	1.556	0.04703	1.806
1.768	0.2956	1.181	0.6716	1.635	0.05016	1.958
1.816	0.2423	1.237	0.5947	1.716	0.05606	2.139
1.865	0.1718	1.306	0.4877	1.8	0.06899	2.373
1.913	0.0008075	1.462	0.2075	1.902	0.1559	2.934

1.3.5. α_1^0 = -2 β_{t0} = 0.7 β_{r0} = 0.6676 α_1 = -1.4 α = -2.8

1	0.00378	0	1	0	0	0
1.043	0.2836	0.287	1	0.2952	0.284	0.2953
1.086	0.3877	0.3995	1	0.4223	0.1126	0.4224
1.129	0.4584	0.4821	1	0.5232	0.08258	0.5235
1.171	0.511	0.5489	0.9993	0.6112	0.06683	0.6118
1.214	0.5519	0.6056	0.9984	0.6912	0.05666	0.6924
1.257	0.5847	0.655	0.997	0.7658	0.04938	0.7677
1.3	0.6115	0.6988	0.9953	0.8363	0.04383	0.8393
1.343	0.6336	0.7382	0.9933	0.9037	0.03942	0.9081
1.386	0.6521	0.774	0.9909	0.9686	0.03582	0.9748
1.429	0.6676	0.8068	0.9883	1.032	0.0328	1.04
2.714	0.7312	1.265	0.8179	2.588	0.4577	2.801
4	0.6724	1.432	0.5516	3.962	0.1678	4.632
5.286	0.6174	1.527	0.2338	5.281	0.09409	6.629
6.571	0.5719	1.589	-0.1179	6.57	0.06219	8.795
7.857	0.5344	1.634	-0.4941	7.842	0.04499	11.12
9.143	0.5032	1.668	-0.8892	9.1	0.03449	13.6
10.43	0.4767	1.696	-1.299	10.35	0.02752	16.23
11.71	0.4539	1.718	-1.722	11.59	0.02262	19
13	0.434	1.737	-2.155	12.82	0.01902	21.89
14.29	0.4165	1.754	-2.597	14.05	0.01628	24.92
144.1	0.1385	1.977	-56.91	132.4	0.223	701.7
286.9	0.0985	2.006	-120.9	260.1	0.02911	1953
429.6	0.08057	2.019	-186	387.2	0.01293	3569
572.3	0.06984	2.026	-251.8	513.9	0.007719	5479
715	0.0625	2.032	-318	640.4	0.005271	7645
857.7	0.05708	2.036	-384.5	766.7	0.003892	10040
1000	0.05286	2.039	-451.1	892.9	0.003026	12640
1143	0.04945	2.041	-518	1019	0.002439	15430
1286	0.04663	2.043	-585	1145	0.002021	18410
1429	0.04424	2.045	-652.1	1271	0.00171	21550

1.3.6. α_1^0 = -2 β_{t0} = 0.7 β_{r0} = 0.7 α_1 = -1.4 α = -2.8

1	0.00169	0	1	0	0	0
1.043	0.2837	0.2871	1	0.2953	0.2861	0.2963
1.086	0.3889	0.3995	1	0.4223	0.1124	0.4233
1.129	0.4619	0.4816	1	0.5228	0.08215	0.5239
1.171	0.5178	0.5478	1	0.6101	0.06614	0.6113
1.214	0.5625	0.6035	0.9998	0.6892	0.05576	0.6906
1.257	0.5995	0.6519	0.9994	0.7627	0.04831	0.7643
1.3	0.6305	0.6945	0.9989	0.832	0.04263	0.8339
1.343	0.6571	0.7326	0.9983	0.8981	0.03813	0.9005
1.386	0.68	0.7671	0.9977	0.9617	0.03445	0.9645
1.429	0.7	0.7984	0.9969	1.023	0.03137	1.027

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
2.714	0.8727	1.212	0.9536	2.541	0.4138	2.597
4	0.8868	1.346	0.8912	3.899	0.1343	4.053
5.286	0.8848	1.415	0.8217	5.221	0.06861	5.504
6.571	0.8801	1.457	0.7485	6.529	0.04194	6.961
7.857	0.8755	1.485	0.6732	7.828	0.02836	8.426
9.143	0.8714	1.506	0.5965	9.123	0.02049	9.898
10.43	0.8679	1.521	0.519	10.42	0.01551	11.38
11.71	0.8648	1.533	0.4408	11.71	0.01215	12.86
13	0.8622	1.543	0.3622	12.99	0.009777	14.35
14.29	0.8599	1.551	0.2832	14.28	0.00804	15.84
144.1	0.8335	1.625	-7.864	143.9	0.0074	170.7
286.9	0.8318	1.63	-16.84	286.4	0.004145	342.1
429.6	0.8312	1.631	-25.81	428.8	0.001393	513.8
572.3	0.8309	1.632	-34.79	571.2	0.0006986	685.5
715	0.8307	1.632	-43.76	713.7	0.0004198	857.3
857.7	0.8306	1.632	-52.73	856.1	0.0002802	1029
1000	0.8305	1.633	-61.71	998.5	0.0002003	1201
1143	0.8304	1.633	-70.68	1141	0.0001503	1373
1286	0.8304	1.633	-79.66	1283	0.0001169	1545
1429	0.8303	1.633	-88.63	1426	9.356e-005	1717

1.3.7. $\alpha_1^0 = -2$ $\beta_{t0} = 0.7$ $\beta_{r0} = 0.7141$ $\alpha_1 = -1.4$ $\alpha = -2.8$

1	0.00169	0	1	0	0	0
1.043	0.2837	0.2871	1	0.2953	0.2861	0.2963
1.086	0.3894	0.3994	1	0.4222	0.1123	0.4233
1.129	0.4635	0.4814	1	0.5225	0.08196	0.5236
1.171	0.5208	0.5472	1	0.6095	0.06584	0.6106
1.214	0.5673	0.6026	1	0.6882	0.05536	0.6893
1.257	0.606	0.6504	1	0.7612	0.04785	0.7623
1.3	0.639	0.6926	1.001	0.8301	0.04212	0.8311
1.386	0.6923	0.764	1.001	0.9587	0.03387	0.9597
1.429	0.7141	0.7948	1.001	1.02	0.03078	1.021
2.714	0.9297	1.193	1.001	2.523	0.3981	2.524
4	0.9682	1.318	1.002	3.873	0.1246	3.874
5.286	0.9819	1.38	1.002	5.19	0.06234	5.191
6.571	0.9884	1.418	1.003	6.494	0.03757	6.496
7.857	0.9919	1.443	1.003	7.793	0.02515	7.794
9.143	0.994	1.461	1.004	9.088	0.01802	9.089
10.43	0.9954	1.474	1.004	10.38	0.01356	10.38
11.71	0.9963	1.485	1.005	11.67	0.01057	11.67
13	0.997	1.493	1.005	12.96	0.008471	12.96
14.29	0.9975	1.5	1.006	14.25	0.006942	14.25
144.1	1	1.563	1.057	144.1	0.063	144.1
286.9	1	1.567	1.114	286.9	0.003452	286.9
429.6	1	1.568	1.171	429.6	0.001158	429.6
572.3	1	1.569	1.228	572.3	0.0005805	572.3
715	1	1.569	1.285	715	0.0003488	715
857.7	1	1.569	1.342	857.7	0.0002327	857.7
1000	1	1.569	1.399	1000	0.0001663	1000
1143	1	1.57	1.456	1143	0.0001248	1143
1286	1	1.57	1.513	1286	9.709e-005	1286
1429	1	1.57	1.57	1429	7.769e-005	1429

1.4.1. $\alpha_1^0 = -2$ $\beta_{t0} = 0.722$ $\beta_{r0} = 0$ $\alpha_1 = -1.444$ $\alpha = -2.888$

1	0.001664	0	1	0	0.2716	0
1.039	0.2692	0.2726	1	0.2796	0.1085	0.2796

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
1.077	0.3616	0.3811	0.9997	0.4006	0.08263	0.4008
1.116	0.41	0.4637	0.9977	0.499	0.07096	0.5
1.154	0.4294	0.5347	0.9929	0.5881	0.06509	0.5913
1.193	0.4271	0.5998	0.9844	0.6731	0.06268	0.6809
1.231	0.4069	0.6625	0.9706	0.7572	0.06322	0.7729
1.27	0.3698	0.7257	0.9497	0.8425	0.06761	0.8718
1.308	0.3135	0.7933	0.9176	0.9322	0.08024	0.9841
1.347	0.2285	0.8735	0.8646	1.032	0.1745	1.126
1.385	0	1.048	0.6915	1.2	0	1.454

1.5.1. $\alpha_1^0 = -2$ $\beta_{t0} = 0.815$ $\beta_{r0} = 0$ $\alpha_1 = -1.63$ $\alpha = -3.26$

1	0.001567	0	1	0	0	0
1.023	0.2095	0.2105	1	0.2137	0.2095	0.2138
1.045	0.2902	0.2954	1	0.3043	0.08482	0.3044
1.068	0.3434	0.3593	0.9999	0.3756	0.06398	0.3758
1.091	0.3755	0.4134	0.9989	0.4382	0.05401	0.4387
1.113	0.3888	0.4621	0.9967	0.4964	0.04872	0.4979
1.136	0.3838	0.5083	0.9925	0.553	0.04626	0.5564
1.182	0.3137	0.6035	0.9729	0.6706	0.04897	0.6843
1.204	0.2343	0.6612	0.9505	0.7396	0.05778	0.7666
1.227	0	0.7859	0.8672	0.8681	0.1247	0.9519

1.6.1. $\alpha_1^0 = -2$ $\beta_{t0} = 0.9$ $\beta_{r0} = 0$ $\alpha_1 = -1.8$ $\alpha = -3.6$

1	0.001491	0	1	0	0	0
1.011	0.1478	0.1479	1	0.149	0.1469	0.1494
1.022	0.2073	0.2084	1	0.2115	0.06051	0.2119
1.033	0.2513	0.2543	1	0.2599	0.04584	0.2603
1.044	0.285	0.2926	1	0.3013	0.03833	0.3016
1.056	0.3081	0.3265	0.9998	0.3386	0.0339	0.339
1.067	0.3184	0.3579	0.9991	0.3737	0.03139	0.3744
1.078	0.3125	0.3884	0.9975	0.4082	0.03049	0.4094
1.089	0.2846	0.4199	0.9943	0.4439	0.0315	0.4464
1.1	0.2215	0.4562	0.9875	0.4845	0.03626	0.4898
1.111	0	0.532	0.9575	0.5637	0.07589	0.5829

1.6.2. $\alpha_1^0 = -2$ $\beta_{t0} = 0.9$ $\beta_{r0} = 0.1$ $\alpha_1 = -1.8$ $\alpha = -3.6$

1	0.001	0	1	0	0	0
1.011	0.1478	0.1479	1	0.149	0.1469	0.1494
1.022	0.2074	0.2084	1	0.2115	0.06051	0.2119
1.033	0.2513	0.2543	1	0.2599	0.04583	0.2603
1.044	0.2852	0.2926	1	0.3013	0.03832	0.3016
1.056	0.3087	0.3265	0.9998	0.3385	0.03386	0.3389
1.067	0.32	0.3577	0.9991	0.3735	0.03128	0.3742
1.078	0.316	0.388	0.9977	0.4078	0.03025	0.409
1.089	0.2915	0.419	0.9947	0.443	0.03098	0.4453
1.1	0.2358	0.4538	0.9887	0.4822	0.03485	0.4871
1.111	0.1	0.5066	0.9716	0.5391	0.05277	0.5516
1.111	0.095	0.5087	0.9706	0.5412	0.001654	0.554
1.112	0.0897	0.5104	0.9698	0.543	0.001745	0.5562
1.112	0.08402	0.5123	0.969	0.5449	0.001855	0.5585
1.112	0.0779	0.5142	0.9681	0.5469	0.00199	0.5609
1.112	0.07121	0.5164	0.9671	0.5491	0.00216	0.5636
1.112	0.06378	0.5188	0.9659	0.5515	0.002385	0.5666
1.113	0.05532	0.5215	0.9646	0.5542	0.002702	0.5699
1.113	0.04523	0.5247	0.963	0.5574	0.003199	0.5739
1.113	0.03203	0.5289	0.9609	0.5615	0.004162	0.579

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
1.113	0.0002331	0.539	0.9553	0.5713	0.01016	0.5916

1.6.3. $\alpha_1^0 = -2$ $\beta_{t0} = 0.9$ $\beta_{r0} = 0.3$ $\alpha_1 = -1.8$ $\alpha = -3.6$

1	0.001491	0	1	0	0	0
1.011	0.1478	0.147	1	0.149	0.1469	0.1494
1.022	0.2074	0.2084	1	0.2115	0.06051	0.2119
1.033	0.2516	0.2543	1	0.2599	0.04582	0.2603
1.044	0.2867	0.2925	1	0.3011	0.03822	0.3015
1.056	0.3138	0.326	1	0.338	0.03352	0.3384
1.067	0.3327	0.3565	0.9996	0.3722	0.03047	0.3727
1.078	0.3425	0.385	0.9989	0.4048	0.02856	0.4056
1.089	0.3418	0.4126	0.9975	0.4366	0.0276	0.438
1.1	0.3287	0.4402	0.9951	0.4687	0.02758	0.471
1.111	0.3	0.469	0.9911	0.5022	0.0288	0.5062
1.114	0.2897	0.4766	0.9898	0.511	0.007618	0.5154
1.117	0.278	0.4845	0.9882	0.5201	0.007874	0.5252
1.119	0.2644	0.4927	0.9863	0.5295	0.0082	0.5355
1.122	0.2489	0.5013	0.9841	0.5393	0.008621	0.5463
1.125	0.2309	0.5105	0.9816	0.5497	0.009178	0.5579
1.128	0.2097	0.5204	0.9785	0.5608	0.009944	0.5705
1.131	0.1844	0.5315	0.9746	0.573	0.01106	0.5846
1.133	0.1528	0.5444	0.9695	0.5869	0.01286	0.6011
1.136	0.1096	0.5608	0.9621	0.6043	0.01643	0.6222
1.139	0.0001998	0.5997	0.9402	0.6428	0.03894	0.6727

1.6.4. $\alpha_1^0 = -2$ $\beta_{t0} = 0.9$ $\beta_{r0} = 0.4$ $\alpha_1 = -1.8$ $\alpha = -3.6$

1	0.0014	0	1	0	0	0
1.011	0.1478	0.1479	1	0.149	0.1469	0.1494
1.022	0.2074	0.2084	1	0.2115	0.06051	0.2119
1.033	0.2518	0.2542	1	0.2599	0.0458	0.2602
1.044	0.288	0.2924	1	0.301	0.03812	0.3014
1.056	0.3183	0.3256	1	0.3376	0.03323	0.338
1.067	0.3435	0.3554	1	0.3712	0.02981	0.3716
1.078	0.3641	0.3827	0.9998	0.4025	0.0273	0.4029
1.089	0.3803	0.4081	0.9995	0.4322	0.02542	0.4328
1.1	0.3923	0.4321	0.9989	0.4607	0.02399	0.4615
1.111	0.4	0.455	0.9981	0.4883	0.02293	0.4895
1.123	0.4035	0.4791	0.9967	0.5178	0.0241	0.5201
1.135	0.4019	0.5026	0.9949	0.5469	0.02353	0.5501
1.147	0.395	0.5259	0.9924	0.576	0.02328	0.5804
1.16	0.3824	0.5493	0.9889	0.6054	0.02337	0.6115
1.172	0.3635	0.5731	0.9844	0.6353	0.02385	0.6439
1.184	0.3374	0.598	0.9783	0.6664	0.02486	0.6784
1.196	0.3022	0.6247	0.97	0.6993	0.02668	0.7162
1.208	0.2545	0.6547	0.9582	0.7355	0.03002	0.7595
1.22	0.1852	0.6919	0.9395	0.7783	0.03719	0.8144
1.232	0.001152	0.7766	0.8789	0.8635	0.08469	0.9421

1.6.5. $\alpha_1^0 = -2$ $\beta_{t0} = 0.9$ $\beta_{r0} = 0.435$ $\alpha_1 = -1.8$ $\alpha = -3.6$

1	0.001491	0	1	0	0	0
1.011	0.1478	0.1479	1	0.149	0.1469	0.1491
1.022	0.2074	0.2084	1	0.2115	0.06051	0.2116
1.033	0.2519	0.2542	1	0.2599	0.04579	0.26
1.044	0.2886	0.2923	1	0.301	0.03809	0.3011
1.056	0.3201	0.3254	1	0.3375	0.03311	0.3376
1.067	0.3479	0.355	1	0.3707	0.02954	0.3709

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
1.078	0.3728	0.3818	1	0.4016	0.02682	0.4017
1.089	0.3953	0.4064	1	0.4305	0.02465	0.4306
1.1	0.416	0.4293	1	0.4579	0.02287	0.458
1.111	0.435	0.4507	1	0.484	0.02136	0.4841
2.111	0.7946	1.099	0.9594	1.881	0.6481	1.923
3.111	0.7759	1.291	0.858	2.99	0.1923	3.188
4.111	0.7317	1.395	0.7198	4.048	0.1034	4.514
5.111	0.6886	1.462	0.5563	5.081	0.06692	5.924
6.111	0.6503	1.51	0.3742	6.1	0.04779	7.419
7.111	0.6169	1.546	0.1776	7.109	0.0363	8.999
8.111	0.5877	1.575	-0.03086	8.111	0.02878	10.66
9.111	0.5621	1.598	-0.249	9.108	0.02353	12.4
10.11	0.5394	1.618	-0.4755	10.1	0.01971	14.22
11.11	0.5192	1.635	-0.709	11.09	0.01681	16.11
112.1	0.1775	1.861	-32.08	107.4	0.226	428.2
223.1	0.1264	1.89	-70.06	211.8	0.02918	1187
334.1	0.1035	1.903	-109	315.8	0.01295	2165
445.1	0.08972	1.911	-148.5	419.6	0.007726	3322
556.1	0.08031	1.916	-188.3	523.3	0.005275	4633
667.1	0.07335	1.92	-228.3	626.8	0.003894	6082
778.1	0.06793	1.923	-268.5	730.3	0.003027	7657
889.1	0.06356	1.926	-308.8	833.8	0.00244	9347
1000	0.05993	1.928	-349.3	937.1	0.002022	11150
1111	0.05687	1.929	-389.8	1040	0.00171	13050

2.1.1. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.3$ $\beta_{r0} = 0$ $\alpha_1 = -1.2$ $\alpha = -2.4$

1	0.003651	0	1	0	0	0
1.233	0.5224	0.6397	0.9895	0.7363	0.6377	0.743
1.467	0.5731	0.8724	0.9431	1.123	0.2326	1.163
1.7	0.5623	1.036	0.866	1.463	0.164	1.572
1.933	0.5279	1.166	0.7612	1.777	0.1298	1.999
2.167	0.4813	1.276	0.629	2.073	0.1101	2.461
2.4	0.4267	1.375	0.4672	2.354	0.09862	2.975
2.633	0.3648	1.468	0.2703	2.619	0.0931	3.565
2.867	0.2934	1.562	0.0261	2.867	0.09373	4.274
3.1	0.204	1.667	-0.2977	3.086	0.1053	5.214
3.333	0	1.884	-1.027	3.171	0.2171	7.512

2.1.2. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.3$ $\beta_{r0} = 0.1$ $\alpha_1 = -1.2$ $\alpha = -2.4$

1	0.003651	0	1	0	0	0
1.233	0.5232	0.6395	0.9896	0.7361	0.6375	0.7427
1.467	0.5751	0.8716	0.9439	1.123	0.2321	1.161
1.7	0.5656	1.035	0.8681	1.462	0.1632	1.569
1.933	0.5326	1.164	0.7655	1.775	0.1289	1.993
2.167	0.4876	1.273	0.6365	2.071	0.1089	2.45
2.633	0.3755	1.461	0.2894	2.617	0.09093	3.532
2.4	0.4349	1.37	0.4793	2.352	0.09708	2.956
2.867	0.3078	1.551	0.05691	2.866	0.09028	4.215
3.1	0.2259	1.649	-0.2425	3.091	0.09815	5.091
3.333	0.1	1.787	-0.715	3.256	0.1379	6.529
3.339	0.09483	1.792	-0.7342	3.258	0.005474	6.59
3.345	0.08936	1.798	-0.7543	3.259	0.00577	6.654
3.351	0.08356	1.804	-0.7756	3.26	0.006124	6.723
3.357	0.07732	1.811	-0.7984	3.261	0.006559	6.797
3.363	0.07056	1.818	-0.823	3.261	0.007111	6.877
3.369	0.06308	1.826	-0.8501	3.26	0.007841	6.966

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
3.375	0.0546	1.835	-0.8805	3.258	0.008873	7.067
3.381	0.04456	1.845	-0.9163	3.254	0.01049	7.187
3.387	0.0315	1.859	-0.9622	3.247	0.01363	7.343
3.393	0.0002197	1.892	-1.07	3.22	0.03265	7.718

2.1.3. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.3$ $\beta_{r0} = 0.3$ $\alpha_1 = -1.2$ $\alpha = -2.4$

1	0.003651	0	1	0	0	0
1.233	0.529	0.638	0.9907	0.7345	0.636	0.7406
1.467	0.5906	0.8659	0.9503	1.117	0.2279	1.152
1.7	0.5913	1.024	0.8846	1.452	0.1576	1.545
1.933	0.5688	1.146	0.7976	1.761	0.122	1.946
2.167	0.5353	1.246	0.6909	2.054	0.1007	2.368
2.4	0.4958	1.333	0.565	2.333	0.0869	2.821
2.633	0.4523	1.411	0.4192	2.6	0.07778	3.313
2.867	0.4055	1.483	0.2516	2.856	0.07199	3.857
3.1	0.3551	1.552	0.05863	3.099	0.06896	4.471
3.333	0.3	1.621	-0.1664	3.329	0.06885	5.184
3.399	0.2832	1.641	-0.2381	3.391	0.01991	5.41
3.465	0.2657	1.661	-0.313	3.451	0.02034	5.649
3.531	0.2474	1.682	-0.3925	3.509	0.02096	5.906
3.596	0.2279	1.704	-0.4777	3.565	0.0218	6.182
3.662	0.207	1.727	-0.5696	3.618	0.02296	6.485
3.728	0.1843	1.752	-0.6703	3.667	0.02462	6.821
3.794	0.1588	1.779	-0.783	3.712	0.0271	7.205
3.86	0.1291	1.81	-0.914	3.75	0.0312	7.662
3.925	0.09081	1.849	-1.079	3.774	0.03948	8.261
3.991	0.0001922	1.942	-1.446	3.72	0.09218	9.713

2.1.4. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.3$ $\beta_{r0} = 0.5$ $\alpha_1 = -1.2$ $\alpha = -2.4$

1	0.003651	0	1	0	0	0
1.233	0.5404	0.635	0.9929	0.7316	0.633	0.7365
1.467	0.6207	0.8552	0.9623	1.107	0.2202	1.133
1.7	0.6395	1.003	0.914	1.433	0.148	1.502
1.933	0.6351	1.114	0.8522	1.735	0.1112	1.867
2.167	0.6198	1.203	0.7791	2.022	0.08865	2.239
2.4	0.5992	1.277	0.6961	2.297	0.07354	2.622
2.633	0.5759	1.339	0.6042	2.563	0.06279	3.019
2.867	0.5511	1.394	0.5039	2.822	0.05482	3.433
3.1	0.5257	1.443	0.3955	3.075	0.04874	3.866
3.333	0.5	1.487	0.2794	3.322	0.04401	4.321
3.671	0.4628	1.544	0.09733	3.67	0.05728	5.023
4.009	0.4257	1.596	-0.1006	4.007	0.05162	5.783
4.346	0.3887	1.643	-0.3156	4.335	0.04757	6.613
4.684	0.3514	1.688	-0.549	4.652	0.0448	7.526
5.022	0.3135	1.731	-0.8032	4.957	0.04316	8.543
5.359	0.2743	1.774	-1.082	5.249	0.04267	9.693
5.697	0.2325	1.818	-1.393	5.524	0.04363	11.03
6.035	0.1859	1.865	-1.748	5.776	0.04693	12.64
6.372	0.1288	1.92	-2.183	5.987	0.05575	14.8
6.71	0.0006003	2.042	-3.046	5.979	0.1216	20.08

2.1.5. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.3$ $\beta_{r0} = 0.6632$ $\alpha_1 = -1.2$ $\alpha = -2.4$

1	0.003651	0	1	0	0	0
1.233	0.5537	0.6315	0.9954	0.7282	0.6295	0.7319
1.467	0.6545	0.8436	0.975	1.096	0.212	1.114
1.7	0.6924	0.9822	0.9439	1.414	0.1386	1.459

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
1.933	0.7057	1.084	0.9052	1.708	0.1014	1.792
2.167	0.7072	1.162	0.8606	1.988	0.07878	2.122
2.4	0.7025	1.226	0.8113	2.259	0.06362	2.453
2.633	0.6946	1.279	0.7581	2.522	0.05283	2.787
2.867	0.6849	1.324	0.7015	2.78	0.0448	3.125
3.1	0.6742	1.362	0.6419	3.033	0.03863	3.468
3.333	0.6632	1.396	0.5798	3.283	0.03376	3.817
6.333	0.542	1.629	-0.3699	6.323	0.2332	8.849
9.333	0.4652	1.73	-1.478	9.216	0.1005	14.85
12.33	0.4133	1.789	-2.671	12.04	0.05928	21.71
15.33	0.3754	1.829	-3.919	14.82	0.04021	29.34
18.33	0.3463	1.859	-5.208	17.58	0.02957	37.67
21.33	0.323	1.882	-6.527	20.31	0.02292	46.65
24.33	0.3038	1.9	-7.871	23.03	0.01844	56.24
27.33	0.2877	1.915	-9.235	25.73	0.01525	66.39
30.33	0.2739	1.928	-10.62	28.42	0.01288	77.08
33.33	0.2619	1.939	-12.01	31.09	0.01107	88.29
336.3	0.08427	2.094	-168.2	291.3	0.155	2673
669.3	0.05981	2.115	-346.5	572.7	0.02053	7478
1002	0.04889	2.124	-526.7	852.8	0.009132	13690
1335	0.04237	2.129	-707.8	1132	0.005452	21040
1668	0.03791	2.133	-889.6	1411	0.003724	29370
2001	0.03462	2.136	-1072	1690	0.00275	38570
2334	0.03205	2.138	-1254	1969	0.002138	48580
2667	0.02999	2.14	-1437	2247	0.001724	59330
3000	0.02828	2.141	-1620	2525	0.001428	70780
3333	0.02683	2.142	-1803	2803	0.001209	82880

2.1.6. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.3$ $\beta_{r0} = 0.7$ $\alpha_1 = -1.2$ $\alpha = -2.4$

1	0.003651	0	1	0	0	0
1.233	0.5572	0.6307	0.9961	0.7273	0.6287	0.7307
1.467	0.6631	0.8407	0.9782	1.093	0.21	1.109
1.7	0.7057	0.9771	0.9511	1.409	0.1364	1.448
1.933	0.7232	1.076	0.9175	1.702	0.09923	1.774
2.167	0.7285	1.153	0.8791	1.98	0.07668	2.095
2.4	0.7273	1.215	0.8369	2.249	0.06161	2.416
2.633	0.7227	1.266	0.7915	2.512	0.0509	2.738
2.867	0.716	1.308	0.7434	2.769	0.04296	3.062
3.1	0.7083	1.345	0.6931	3.022	0.03686	3.39
3.333	0.7	1.377	0.6407	3.271	0.03206	3.721
6.333	0.6053	1.593	-0.1395	6.332	0.2158	8.349
9.333	0.5466	1.681	-1.025	9.277	0.08797	13.58
12.33	0.5084	1.73	-1.957	12.18	0.04938	19.29
15.33	0.4817	1.762	-2.917	15.05	0.03204	25.36
18.33	0.462	1.785	-3.894	17.92	0.02261	31.72
21.33	0.4467	1.802	-4.882	20.77	0.01688	38.33
24.33	0.4346	1.815	-5.879	23.61	0.01311	45.14
27.33	0.4248	1.825	-6.882	26.45	0.0105	52.13
30.33	0.4166	1.834	-7.89	29.29	0.008601	59.26
33.33	0.4096	1.841	-8.901	32.12	0.007182	66.52
336.3	0.3361	1.913	-113	316.8	0.072	934.2
669.3	0.3314	1.918	-227.7	629.4	0.004432	1934
1002	0.3298	1.919	-342.4	942	0.001501	2941
1335	0.329	1.92	-457.1	1255	0.0007554	3952
1668	0.3285	1.921	-571.8	1567	0.0004547	4966

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
2001	0.3282	1.921	-686.5	1880	0.0003038	5980
2334	0.3279	1.921	-801.2	2193	0.0002173	6995
2667	0.3277	1.921	-915.9	2505	0.0001631	8011
3000	0.3276	1.921	-1031	2818	0.000127	9027
3333	0.3275	1.922	-1145	3130	0.0001017	10040

2.1.7. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.3$ $\beta_{r0} = 0.9$ $\alpha_1 = -1.2$ $\alpha = -2.4$

1	0.003651	0	1	0	0	0
1.233	0.5787	0.6253	1	0.7219	0.6233	0.7235
1.467	0.7158	0.8238	0.9965	1.076	0.1985	1.08
1.7	0.7854	0.9483	0.9913	1.381	0.1245	1.39
1.933	0.8262	1.036	0.9848	1.664	0.08804	1.679
2.167	0.852	1.103	0.9777	1.934	0.06635	1.957
2.4	0.8692	1.155	0.9699	2.195	0.05212	2.228
2.633	0.8811	1.197	0.9617	2.451	0.04218	2.494
2.867	0.8895	1.232	0.9531	2.704	0.03491	2.758
3.1	0.8956	1.261	0.9442	2.953	0.02941	3.019
3.333	0.9	1.286	0.9352	3.199	0.02515	3.279
6.333	0.9111	1.443	0.8103	6.281	0.1565	6.579
9.333	0.9079	1.498	0.6761	9.309	0.05578	9.877
12.33	0.9047	1.527	0.5394	12.32	0.02875	13.19
15.33	0.9022	1.545	0.4016	15.33	0.01756	16.51
18.33	0.9003	1.556	0.2631	18.33	0.01184	19.84
21.33	0.8987	1.565	0.1243	21.33	0.008527	23.17
24.33	0.8975	1.571	-0.01484	24.33	0.006434	26.51
27.33	0.8966	1.576	-0.1541	27.33	0.005028	29.86
30.33	0.8958	1.58	-0.2935	30.33	0.004038	33.21
33.33	0.8951	1.584	-0.433	33.33	0.003314	36.56
336.3	0.8881	1.614	-14.56	336	0.03	377.3
669.3	0.8877	1.616	-30.09	668.7	0.001666	752.3
1002	0.8876	1.616	-45.61	1001	0.0005592	1127
1335	0.8875	1.617	-61.14	1334	0.0002803	1503
1668	0.8875	1.617	-76.67	1667	0.0001684	1878
2001	0.8874	1.617	-92.2	1999	0.0001124	2253
2334	0.8874	1.617	-107.7	2332	8.032e-005	2628
2667	0.8874	1.617	-123.3	2664	6.027e-005	3004
3000	0.8874	1.617	-138.8	2997	4.689e-005	3379
3333	0.8874	1.617	-154.3	3330	3.752e-005	3754

2.2.1. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.5$ $\beta_{r0} = 0$ $\alpha_1 = -2$ $\alpha = -4$

1	0.002828	0	1	0	0	0
1.1	0.4151	0.429	1	0.4576	0.427	0.458
1.2	0.5361	0.5872	0.999	0.6648	0.1582	0.6661
1.3	0.5891	0.7005	0.9939	0.838	0.1133	0.8426
1.4	0.602	0.7924	0.983	0.9969	0.09186	1.01
1.5	0.587	0.8722	0.9647	1.149	0.07981	1.177
1.6	0.5499	0.9453	0.9369	1.297	0.07305	1.353
1.7	0.4924	1.016	0.8961	1.445	0.07031	1.544
1.8	0.412	1.088	0.8364	1.594	0.07199	1.765
1.9	0.2967	1.17	0.742	1.749	0.08206	2.046
2	0	1.341	0.4559	1.947	0.1712	2.708

2.2.2. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.5$ $\beta_{r0} = 0.1$ $\alpha_1 = -2$ $\alpha = -4$

1	0.002828	0	1	0	0	0
1.1	0.4152	0.429	1	0.4576	0.427	0.458
1.2	0.5363	0.5872	0.999	0.6648	0.1581	0.666

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
1.3	0.5898	0.7004	0.9939	0.8379	0.1132	0.8425
1.4	0.6034	0.7921	0.9833	0.9966	0.09171	1.009
1.5	0.5894	0.8717	0.9653	1.148	0.07956	1.176
1.6	0.5536	0.9444	0.938	1.296	0.07267	1.351
1.7	0.4979	1.014	0.8983	1.443	0.0697	1.541
1.8	0.4204	1.085	0.8405	1.592	0.07091	1.758
1.9	0.3107	1.165	0.7508	1.745	0.07959	2.031
2	0.1	1.291	0.5524	1.922	0.1264	2.516
2.001	0.09488	1.294	0.5471	1.925	0.002876	2.528
2.002	0.08947	1.297	0.5416	1.928	0.003037	2.54
2.003	0.0837	1.3	0.5356	1.93	0.00322	2.553
2.004	0.0775	1.304	0.5292	1.933	0.00346	2.567
2.006	0.07076	1.307	0.5222	1.936	0.003763	2.582
2.007	0.06329	1.312	0.5145	1.94	0.004157	2.598
2.008	0.05482	1.316	0.5056	1.943	0.00471	2.617
2.009	0.04477	1.322	0.495	1.947	0.005584	2.64
2.01	0.03166	1.329	0.4811	1.952	0.007267	2.669
2.11	0.000289	1.347	0.447	1.961	0.0176	2.74

2.2.3. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.5$ $\beta_{r0} = 0.3$ $\alpha_1 = -2$ $\alpha = -4$

1	0.002828	0	1	0	0	0
1.1	0.4153	0.429	1	0.4576	0.427	0.458
1.2	0.5381	0.5869	0.9992	0.6646	0.1579	0.6657
1.3	0.5953	0.6995	0.9947	0.837	0.1126	0.841
1.4	0.6146	0.79	0.9854	0.9945	0.09049	1.006
1.5	0.6082	0.8676	0.97	1.144	0.07765	1.169
1.6	0.5824	0.9374	0.947	1.29	0.0698	1.336
1.7	0.5402	1.003	0.9146	1.433	0.06533	1.514
1.8	0.482	1.067	0.8697	1.576	0.06376	1.71
1.9	0.4053	1.132	0.8068	1.72	0.0657	1.935
2	0.3	1.207	0.7125	1.869	0.07431	2.218
2.011	0.285	1.217	0.6974	1.887	0.009724	2.257
2.023	0.269	1.227	0.6821	1.904	0.01015	2.298
2.034	0.2519	1.238	0.6655	1.922	0.01067	2.342
2.046	0.2335	1.249	0.6473	1.941	0.01133	2.39
2.057	0.2134	1.261	0.6271	1.959	0.01217	2.441
2.069	0.1911	1.274	0.6043	1.978	0.01329	2.497
2.08	0.1656	1.289	0.578	1.998	0.01491	2.561
2.092	0.1354	1.307	0.5459	2.019	0.01747	2.637
2.103	0.09582	1.329	0.5031	2.042	0.02249	2.736
2.114	0.0002458	1.383	0.3952	2.077	0.05359	2.975

2.2.4. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.5$ $\beta_{r0} = 0.5$ $\alpha_1 = -2$ $\alpha = -4$

1	0.002828	0	1	0	0	0
1.1	0.4156	0.429	1	0.4576	0.427	0.458
1.2	0.5417	0.5864	0.9995	0.6641	0.1574	0.665
1.3	0.6062	0.6977	0.9962	0.8352	0.1113	0.8383
1.4	0.6363	0.7859	0.9895	0.9904	0.08819	0.9987
1.5	0.6441	0.8601	0.9786	1.137	0.07421	1.155
1.6	0.6362	0.925	0.9629	1.278	0.06497	1.31
1.7	0.6161	0.9837	0.9418	1.415	0.05862	1.47
1.8	0.5862	1.038	0.9144	1.55	0.05428	1.636
1.9	0.5474	1.089	0.8796	1.684	0.05151	1.812
2	0.5	1.14	0.8359	1.817	0.05017	2.003
2.044	0.4764	1.162	0.8126	1.875	0.02184	2.092

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
2.087	0.4509	1.184	0.7876	1.933	0.02204	2.186
2.131	0.4231	1.206	0.7596	1.991	0.02242	2.286
2.174	0.3928	1.229	0.7281	2.049	0.02305	2.393
2.218	0.3595	1.253	0.6923	2.107	0.02402	2.509
2.262	0.3222	1.279	0.6509	2.166	0.02549	2.637
2.305	0.2795	1.307	0.6018	2.225	0.02778	2.782
2.349	0.2285	1.338	0.5411	2.286	0.03168	2.953
2.392	0.1617	1.378	0.4583	2.348	0.03972	3.177
2.436	0.0004409	1.47	0.2453	2.424	0.09188	3.714

2.2.5. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.5$ $\beta_{r0} = 0.7$ $\alpha_1 = -2$ $\alpha = -4$

1	0.002828	0	1	0	0	0
1.1	0.4161	0.4289	1	0.4575	0.4269	0.4579
1.2	0.547	0.5857	1	0.6633	0.1567	0.664
1.3	0.6222	0.6951	0.9984	0.8326	0.1094	0.8344
1.4	0.6676	0.7801	0.9952	0.9847	0.08506	0.989
1.5	0.6946	0.85	0.99	1.127	0.06983	1.136
1.6	0.7092	0.9093	0.9829	1.262	0.05931	1.278
1.7	0.7151	0.9609	0.9738	1.393	0.05159	1.418
1.8	0.7145	1.007	0.9626	1.521	0.04569	1.558
1.9	0.7091	1.048	0.9493	1.646	0.04105	1.698
2	0.7	1.085	0.934	1.769	0.03733	1.84
2.202	0.673	1.152	0.896	2.012	0.06684	2.135
2.405	0.6377	1.21	0.8488	2.25	0.05824	2.443
2.607	0.5964	1.262	0.7916	2.484	0.05226	2.771
2.81	0.5502	1.31	0.7232	2.715	0.04815	3.124
3.012	0.4992	1.356	0.642	2.943	0.04554	3.51
3.215	0.4431	1.4	0.5453	3.168	0.04432	3.94
3.417	0.3804	1.445	0.4285	3.39	0.04471	4.432
3.62	0.3076	1.493	0.2829	3.609	0.04751	5.021
3.822	0.2153	1.548	0.0855	3.821	0.05585	5.796
4.025	0.001043	1.669	-0.3943	4.005	0.1205	7.681

2.2.6. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.5$ $\beta_{r0} = 0.8$ $\alpha_1 = -2$ $\alpha = -4$

1	0.002828	0	1	0	0	0
1.1	0.4164	0.4289	1	0.4575	0.4269	0.4579
1.2	0.5504	0.5852	1	0.6629	0.1563	0.6634
1.3	0.6319	0.6935	0.9997	0.831	0.1083	0.832
1.4	0.6864	0.7768	0.9985	0.9814	0.08327	0.9834
1.5	0.7243	0.8442	0.9965	1.121	0.06746	1.125
1.6	0.7512	0.9007	0.9937	1.254	0.05645	1.26
1.7	0.7705	0.949	0.9903	1.382	0.0483	1.392
1.8	0.7841	0.991	0.9861	1.506	0.04203	1.52
1.9	0.7936	1.028	0.9813	1.627	0.03705	1.647
2	0.8	1.061	0.9759	1.746	0.03302	1.772
5.693	0.6532	1.484	0.4917	5.672	0.4233	6.774
9.386	0.5169	1.602	-0.2896	9.381	0.1173	13.17
13.08	0.4233	1.666	-1.237	13.02	0.06384	21.09
16.77	0.3526	1.709	-2.308	16.61	0.04335	30.67
20.46	0.2949	1.742	-3.488	20.16	0.03321	42.14
24.16	0.2448	1.77	-4.774	23.68	0.02767	55.89
27.85	0.1986	1.794	-6.178	27.16	0.02475	72.62
31.54	0.1531	1.818	-7.73	30.58	0.02389	93.72
35.24	0.1028	1.844	-9.518	33.93	0.02595	122.8
38.93	0.0005904	1.896	-12.46	36.88	0.05216	196.5

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p

2.2.7. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.5$ $\beta_{r0} = 0.8066$ $\alpha_1 = -2$ $\alpha = -4$

1	0.002828	0	1	0	0	0
1.1	0.4164	0.4289	1	0.4575	0.4269	0.4579
1.2	0.5506	0.5852	1	0.6628	0.1563	0.6633
1.3	0.6326	0.6934	0.9998	0.8309	0.1082	0.8318
1.4	0.6877	0.7765	0.9987	0.9811	0.08315	0.983
1.5	0.7264	0.8438	0.9969	1.121	0.0673	1.124
1.6	0.7541	0.9001	0.9945	1.253	0.05626	1.259
1.7	0.7743	0.9482	0.9914	1.381	0.04809	1.39
1.8	0.7889	0.99	0.9877	1.505	0.0418	1.518
1.9	0.7993	1.027	0.9834	1.626	0.03681	1.644
2	0.8066	1.06	0.9785	1.744	0.03277	1.768
3.8	0.7713	1.354	0.8174	3.711	0.294	4.014
5.6	0.6959	1.469	0.5703	5.571	0.1148	6.473
7.4	0.6342	1.534	0.2724	7.395	0.0652	9.187
9.2	0.5852	1.577	-0.05992	9.2	0.04333	12.14
11	0.5456	1.609	-0.4174	10.99	0.03144	15.33
12.8	0.5128	1.633	-0.7945	12.78	0.02415	18.74
14.6	0.4852	1.652	-1.187	14.55	0.0193	22.35
16.4	0.4616	1.668	-1.593	16.32	0.01588	26.16
18.2	0.4411	1.681	-2.01	18.09	0.01336	30.15
20	0.4231	1.693	-2.436	19.85	0.01144	34.31
201.8	0.14	1.85	-55.65	194	0.157	971.2
401.6	0.09952	1.871	-118.7	383.7	0.02058	2705
601.4	0.0814	1.88	-183	572.9	0.009144	4943
801.2	0.07056	1.885	-247.9	761.9	0.005457	7591
1001	0.06314	1.889	-313.3	950.7	0.003727	10590
1201	0.05766	1.892	-378.9	1139	0.002752	13910
1401	0.0534	1.894	-444.8	1328	0.002139	17510
1600	0.04996	1.896	-510.9	1517	0.001725	21390
1800	0.04711	1.897	-577.1	1705	0.001429	25510
2000	0.0447	1.898	-643.5	1894	0.001209	29860

2.3.1. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.7$ $\beta_{r0} = 0$ $\alpha_1 = -2.8$ $\alpha = -5.6$

1	0.00378	0	1	0	0	0
1.043	0.2837	0.2869	1	0.2951	0.2839	0.2952
1.086	0.3892	0.3993	1	0.4221	0.1124	0.4222
1.129	0.4605	0.4815	1	0.5226	0.08219	0.5228
1.171	0.5085	0.5482	0.9998	0.6105	0.06675	0.611
1.214	0.5343	0.6058	0.9982	0.6915	0.05761	0.6929
1.257	0.5366	0.6581	0.9946	0.7689	0.05223	0.7726
1.3	0.5124	0.7078	0.9877	0.8452	0.04976	0.854
1.343	0.4547	0.7583	0.9749	0.9235	0.05046	0.9421
1.386	0.3455	0.8153	0.9501	1.009	0.05701	1.048
1.429	0	0.9328	0.8509	1.148	0.1175	1.283

2.3.2. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = \beta_{r0} = 0.1$ $\alpha_1 = -2.8$ -2.8 $\alpha = -5.6$

1	0.00239	0	1	0	0	0
1.043	0.2837	0.2873	1	0.2955	0.2853	0.2956
1.086	0.3892	0.3997	1	0.4225	0.1124	0.4226
1.129	0.4606	0.4819	1	0.523	0.08219	0.5232
1.171	0.5087	0.5486	0.9995	0.6109	0.06673	0.6113
1.214	0.5349	0.6062	0.998	0.6918	0.05757	0.6932
1.257	0.5381	0.6583	0.9944	0.7691	0.05214	0.7728
1.3	0.5152	0.7079	0.9877	0.8453	0.04957	0.8538

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
1.343	0.4598	0.7579	0.9753	0.9231	0.05006	0.9413
1.386	0.3555	0.8139	0.9515	1.007	0.05598	1.046
1.429	0.1	0.9062	0.8811	1.124	0.09225	1.229
1.429	0.09491	0.9076	0.8797	1.126	0.001617	1.232
1.429	0.08952	0.9093	0.8779	1.128	0.001708	1.236
1.43	0.08378	0.9111	0.8761	1.13	0.001817	1.24
1.43	0.0776	0.9131	0.8741	1.132	0.001951	1.243
1.43	0.07087	0.9152	0.8719	1.134	0.002119	1.248
1.431	0.06341	0.9176	0.8694	1.136	0.002342	1.253
1.431	0.05494	0.9202	0.8666	1.139	0.002656	1.258
1.431	0.04488	0.9234	0.8632	1.142	0.003148	1.264
1.431	0.03175	0.9275	0.8587	1.145	0.004098	1.273
1.432	0.0004817	0.9373	0.8475	1.154	0.009873	1.293

2.3.3. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.7$ $\beta_{r0} = 0.3$ $\alpha_1 = -2.8$ $\alpha = -5.6$

1	0.00239	0	1	0	0	0
1.043	0.2837	0.2873	1	0.2955	0.2853	0.2956
1.086	0.3892	0.3997	1	0.4225	0.1124	0.4226
1.129	0.4611	0.4818	1	0.523	0.08215	0.5231
1.171	0.5107	0.5484	0.9996	0.6107	0.06659	0.6111
1.214	0.5402	0.6056	0.9983	0.6912	0.05719	0.6924
1.257	0.5495	0.657	0.9955	0.7678	0.05137	0.7708
1.3	0.5369	0.7051	0.99	0.8425	0.0481	0.8495
1.343	0.4989	0.7523	0.9805	0.9176	0.04719	0.9319
1.386	0.4276	0.8017	0.9638	0.9957	0.04942	1.024
1.429	0.3	0.8606	0.9314	1.083	0.05891	1.141
1.432	0.2858	0.8665	0.9271	1.091	0.005529	1.152
1.435	0.2707	0.8723	0.9229	1.099	0.005793	1.164
1.439	0.2543	0.8784	0.9183	1.107	0.006113	1.177
1.442	0.2364	0.8849	0.9132	1.116	0.00651	1.19
1.445	0.2167	0.892	0.9074	1.125	0.007017	1.205
1.448	0.1946	0.8997	0.9008	1.134	0.007694	1.221
1.452	0.1693	0.9083	0.8929	1.145	0.008657	1.239
1.455	0.1388	0.9185	0.8833	1.156	0.01018	1.261
1.458	0.09852	0.9316	0.87	1.171	0.01315	1.289
1.462	0.0003	0.9632	0.8345	1.2	0.03152	1.356

2.3.4. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.7$ $\beta_{r0} = 0.5$ $\alpha_1 = -2.8$ $\alpha = -5.6$

1	0.00239	0	1	0	0	0
1.043	0.2837	0.2873	1	0.2955	0.2853	0.2956
1.086	0.3893	0.3997	1	0.4225	0.1123	0.4226
1.129	0.462	0.4817	1	0.5229	0.08208	0.523
1.171	0.5146	0.548	0.9999	0.6103	0.0663	0.6106
1.214	0.5507	0.6045	0.9991	0.6902	0.05647	0.6909
1.257	0.5717	0.6545	0.9974	0.7653	0.04993	0.7671
1.3	0.5779	0.7	0.9943	0.8375	0.04553	0.8415
1.343	0.569	0.7427	0.9892	0.9081	0.04271	0.9161
1.386	0.5438	0.784	0.9812	0.9785	0.04128	0.9929
1.429	0.5	0.8253	0.969	1.05	0.04135	1.075
1.442	0.4819	0.8381	0.9644	1.072	0.01313	1.102
1.455	0.4614	0.8515	0.9587	1.095	0.01342	1.13
1.468	0.4379	0.8654	0.9521	1.118	0.01382	1.16
1.482	0.4112	0.8797	0.9444	1.142	0.01437	1.191
1.495	0.3806	0.8949	0.9353	1.166	0.01514	1.225

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
1.508	0.3449	0.9111	0.9244	1.192	0.01623	1.261
1.522	0.3025	0.929	0.9109	1.219	0.01787	1.302
1.535	0.25	0.9495	0.8934	1.248	0.02056	1.35
1.548	0.1789	0.9756	0.868	1.282	0.02602	1.412
1.561	0.0002995	1.036	0.7953	1.344	0.06083	1.559

2.3.5. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.7$ $\beta_{r0} = 0.7$ $\alpha_1 = -2.8$ $\alpha = -5.6$

1	0.00239	0	1	0	0	0
1.043	0.2837	0.2873	1	0.2955	0.2853	0.2956
1.086	0.3894	0.3997	1	0.4225	0.1123	0.4226
1.129	0.4634	0.4816	1	0.5228	0.08197	0.5229
1.171	0.5204	0.5475	1	0.6098	0.06587	0.6099
1.214	0.566	0.603	1	0.6886	0.05545	0.6887
1.257	0.6034	0.6509	1	0.7618	0.048	0.762
1.3	0.6345	0.6933	0.9999	0.8308	0.04236	0.8312
1.343	0.6604	0.7312	0.9996	0.8967	0.03791	0.8974
1.386	0.682	0.7655	0.9991	0.9602	0.03431	0.9612
1.429	0.7	0.7968	0.9985	1.022	0.03132	1.023
1.637	0.75	0.9196	0.9925	1.302	0.1226	1.309
1.846	0.7586	1.011	0.9805	1.564	0.09125	1.585
2.055	0.7412	1.084	0.9612	1.816	0.07318	1.863
2.263	0.7055	1.146	0.9331	2.062	0.06189	2.151
2.472	0.6555	1.201	0.8945	2.305	0.05469	2.457
2.681	0.5927	1.251	0.843	2.545	0.05035	2.791
2.89	0.5164	1.299	0.7747	2.784	0.04847	3.167
3.098	0.4228	1.349	0.6819	3.022	0.04951	3.612
3.307	0.2989	1.405	0.5454	3.262	0.05623	4.19
3.516	0.001635	1.523	0.1697	3.512	0.1174	5.58

2.3.6. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.7$ $\beta_{r0} = 0.7112$ $\alpha_1 = -2.8$ $\alpha = -5.6$

1	0.00239	0	1	0	0	0
1.043	0.2837	0.2873	1	0.2955	0.2853	0.2956
1.086	0.3894	0.3997	1	0.4225	0.1123	0.4226
1.129	0.4635	0.4816	1	0.5228	0.08197	0.5229
1.171	0.5207	0.5475	1	0.6098	0.06585	0.6099
1.214	0.567	0.6028	1	0.6885	0.05538	0.6886
1.257	0.6055	0.6507	1	0.7615	0.04788	0.7617
1.3	0.638	0.6929	1	0.8304	0.04217	0.8306
1.343	0.666	0.7305	1	0.8961	0.03765	0.8963
1.386	0.6901	0.7645	1	0.9592	0.03396	0.9594
1.429	0.7112	0.7954	1	1.02	0.03089	1.021
2.714	0.8692	1.203	0.9761	2.533	0.408	2.572
4	0.8378	1.341	0.9118	3.895	0.1379	4.072
5.286	0.7901	1.415	0.8184	5.222	0.07452	5.652
6.571	0.7447	1.464	0.7036	6.534	0.04817	7.329
7.857	0.7045	1.498	0.5726	7.836	0.03434	9.105
9.143	0.6694	1.524	0.4287	9.133	0.02604	10.98
10.43	0.6386	1.545	0.2741	10.42	0.02061	12.95
11.71	0.6114	1.561	0.1107	11.71	0.01684	15
13	0.5873	1.575	-0.06021	13	0.01408	17.15
14.29	0.5657	1.587	-0.2377	14.28	0.01201	19.38
144.1	0.1951	1.748	-25.45	141.9	0.161	502.1
286.9	0.139	1.769	-56.47	281.2	0.02065	1390
429.6	0.1138	1.778	-88.41	420.4	0.009162	2534

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
572.3	0.09866	1.784	-120.8	559.4	0.005465	3886
715	0.08832	1.787	-153.6	698.3	0.003731	5419
857.7	0.08066	1.79	-186.5	837.2	0.002754	7113
1000	0.07471	1.792	-219.7	976	0.002141	8954
1143	0.0699	1.794	-252.9	1115	0.001726	10930
1286	0.06592	1.795	-286.3	1254	0.00143	13030
1429	0.06254	1.797	-319.8	1392	0.00121	15260

2.4.1. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.9$ $\beta_{r0} = 0$ $\alpha_1 = -3.6$ $\alpha = -7.2$

1	0.003333	0	1	0	0	0
1.011	0.1479	0.1481	1	0.1492	0.1451	0.1492
1.022	0.2074	0.2086	1	0.2117	0.0605	0.2117
1.033	0.252	0.2544	1	0.2601	0.04579	0.2601
1.044	0.2886	0.2925	1	0.3012	0.03808	0.3012
1.056	0.3197	0.3256	1	0.3377	0.03313	0.3377
1.067	0.345	0.3553	1	0.371	0.02966	0.3711
1.078	0.3607	0.3826	0.9999	0.4024	0.02731	0.4024
1.089	0.3557	0.4088	0.9991	0.4329	0.02625	0.4333
1.1	0.3033	0.4365	0.9968	0.4651	0.0277	0.4664
1.111	0	0.4882	0.9813	0.5211	0.05166	0.5298

2.4.2. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.9$ $\beta_{r0} = 0.1$ $\alpha_1 = -3.6$ $\alpha = -7.2$

1	0.003333	0	1	0	0	0
1.011	0.1479	0.1481	1	0.1492	0.1451	0.1492
1.022	0.2074	0.2086	1	0.2117	0.0605	0.2117
1.033	0.252	0.2544	1	0.2601	0.04579	0.2601
1.044	0.2886	0.2925	1	0.3012	0.03808	0.3012
1.056	0.3197	0.3256	1	0.3377	0.03312	0.3377
1.067	0.3452	0.3553	1	0.371	0.02965	0.371
1.078	0.3613	0.3825	0.9999	0.4023	0.02728	0.4024
1.089	0.3579	0.4087	0.9992	0.4327	0.02616	0.4331
1.1	0.3103	0.4361	0.9971	0.4646	0.02735	0.4659
1.111	0.1	0.4775	0.9868	0.5106	0.04143	0.5166
1.111	0.095	0.4787	0.9863	0.5119	0.0007199	0.5179
1.111	0.08969	0.4795	0.986	0.5127	0.00076	0.5188
1.111	0.08402	0.4803	0.9856	0.5135	0.0008079	0.5198
1.111	0.07789	0.4812	0.9853	0.5144	0.0008666	0.5209
1.112	0.07121	0.4821	0.9849	0.5154	0.0009409	0.5221
1.112	0.06378	0.4831	0.9844	0.5164	0.001039	0.5233
1.112	0.05531	0.4843	0.9839	0.5176	0.001178	0.5248
1.112	0.04523	0.4857	0.9832	0.519	0.001395	0.5265
1.112	0.03204	0.4875	0.9824	0.5209	0.001814	0.5288
1.112	0.001263	0.4919	0.9801	0.5252	0.00441	0.5342

2.4.3. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.9$ $\beta_{r0} = 0.3$ $\alpha_1 = -3.6$ $\alpha = -7.2$

1	0.002108	0	1	0	0	0
1.011	0.1479	0.1483	1	0.1494	0.1463	0.1494
1.022	0.2074	0.2088	1	0.2119	0.0605	0.2119
1.033	0.2519	0.2546	1	0.2603	0.04579	0.2603
1.044	0.2886	0.2927	1	0.3014	0.03809	0.3014
1.056	0.3199	0.3258	1	0.3379	0.03312	0.3379
1.067	0.3464	0.3554	1	0.3712	0.0296	0.3712
1.078	0.3666	0.3825	0.9999	0.4023	0.02707	0.4023
1.089	0.3752	0.4079	0.9995	0.432	0.02544	0.4322
1.1	0.3614	0.433	0.9985	0.4615	0.02501	0.4621
1.111	0.3	0.46	0.9956	0.4933	0.02708	0.4952

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
1.112	0.2892	0.463	0.9951	0.4968	0.003018	0.4987
1.113	0.277	0.4662	0.9945	0.5004	0.003135	0.5026
1.114	0.2632	0.4694	0.9939	0.5041	0.003279	0.5067
1.116	0.2475	0.4729	0.9931	0.5081	0.003461	0.511
1.117	0.2295	0.4766	0.9922	0.5122	0.003698	0.5156
1.118	0.2085	0.4806	0.9911	0.5167	0.004018	0.5206
1.119	0.1834	0.4851	0.9897	0.5217	0.004482	0.5262
1.12	0.1521	0.4903	0.988	0.5274	0.005223	0.5328
1.121	0.1093	0.497	0.9854	0.5345	0.006687	0.5411
1.122	0.00311	0.5126	0.9779	0.5503	0.01557	0.5607

2.4.4. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.9$ $\beta_{r0} = 0.4$ $\alpha_1 = -3.6$ $\alpha = -7.2$

1	0.002108	0	1	0	0	0
1.011	0.1479	0.1483	1	0.1494	0.1463	0.1494
1.022	0.2074	0.2088	1	0.2119	0.0605	0.2119
1.033	0.2519	0.2546	1	0.2603	0.04579	0.2603
1.044	0.2886	0.2927	1	0.3014	0.03809	0.3014
1.056	0.3201	0.3258	1	0.3379	0.03311	0.3379
1.067	0.3475	0.3554	1	0.3711	0.02956	0.3711
1.078	0.3711	0.3823	1	0.402	0.02689	0.402
1.089	0.3897	0.4071	0.9999	0.4312	0.02486	0.4312
1.1	0.4008	0.4306	0.9996	0.4591	0.02343	0.4593
1.111	0.4	0.4532	0.999	0.4865	0.02263	0.4869
1.115	0.3959	0.4604	0.9987	0.4953	0.007421	0.4962
1.118	0.3893	0.4679	0.9982	0.5044	0.007473	0.5055
1.122	0.3796	0.4755	0.9976	0.5136	0.007581	0.515
1.126	0.3662	0.4832	0.9968	0.5231	0.007763	0.5248
1.129	0.3482	0.4913	0.9958	0.5328	0.00805	0.5351
1.133	0.3243	0.4998	0.9945	0.543	0.008495	0.5459
1.137	0.2922	0.509	0.9926	0.5539	0.009203	0.5578
1.14	0.2482	0.5194	0.99	0.5661	0.01042	0.5713
1.144	0.1824	0.5324	0.9857	0.5807	0.01297	0.5882
1.148	0.0005284	0.5622	0.971	0.6118	0.02986	0.6275

2.4.5. $\alpha_1^0 = -4$ $\beta_{t0} = 0.9$ $\beta_{r0} = 0.4359$ $\alpha_1 = -3.6$ $\alpha = -7.2$

1	0.003333	0	1	0	0	0
1.011	0.1479	0.1481	1	0.1492	0.1451	0.1492
1.022	0.2074	0.2086	1	0.2117	0.0605	0.2117
1.033	0.252	0.2544	1	0.2601	0.04579	0.2601
1.044	0.2886	0.2925	1	0.3011	0.03808	0.3011
1.056	0.3202	0.3256	1	0.3376	0.03311	0.3376
1.067	0.348	0.3551	1	0.3709	0.02954	0.3709
1.078	0.373	0.3819	1	0.4017	0.02681	0.4017
1.089	0.3957	0.4066	1	0.4306	0.02463	0.4306
1.1	0.4166	0.4294	1	0.458	0.02284	0.458
1.111	0.4359	0.4507	1	0.484	0.02133	0.484
2.111	0.8688	1.079	0.9973	1.861	0.6278	1.864
3.111	0.8999	1.25	0.9816	2.952	0.171	2.985
4.111	0.8812	1.337	0.9511	4	0.08754	4.106
5.111	0.8509	1.392	0.9079	5.03	0.05487	5.26
6.111	0.8187	1.431	0.8544	6.051	0.03831	6.458
7.111	0.7878	1.459	0.7923	7.067	0.02863	7.703
8.111	0.7589	1.482	0.7228	8.079	0.02241	8.997
9.111	0.7324	1.5	0.6472	9.088	0.01814	10.34
10.11	0.708	1.515	0.5662	10.1	0.01507	11.73
11.11	0.6857	1.528	0.4805	11.1	0.01277	13.16

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
112.1	0.2493	1.693	-13.68	111.3	0.165	309.1
223.1	0.1781	1.714	-31.82	220.8	0.02075	848.3
334.1	0.146	1.723	-50.68	330.2	0.009186	1542
445.1	0.1267	1.729	-69.93	439.6	0.005475	2362
556.1	0.1134	1.732	-89.42	548.9	0.003736	3291
667.1	0.1036	1.735	-109.1	658.1	0.002758	4316
778.1	0.09596	1.737	-128.9	767.4	0.002143	5431
889.1	0.0898	1.739	-148.8	876.6	0.001727	6628
1000	0.08469	1.74	-168.8	985.8	0.001431	7902
1111	0.08036	1.742	-188.8	1095	0.00121	9248

3.1.1. α_1^0 = -10 β_{t0} = 0.3 β_{r0} = 0 α_1 = -3 α = -6

1	0.005773	0	1	0	0	0
1.233	0.5841	0.6227	1.002	0.7193	0.6197	0.7204
1.467	0.7161	0.8197	1.001	1.072	0.1971	1.075
1.7	0.76	0.9459	0.9945	1.379	0.1262	1.389
1.933	0.7567	1.039	0.9802	1.666	0.09323	1.695
2.167	0.7227	1.114	0.9554	1.945	0.07503	2.01
2.4	0.6652	1.179	0.9174	2.218	0.06444	2.346
2.633	0.5868	1.237	0.8619	2.488	0.05877	2.718
2.867	0.4845	1.295	0.7811	2.758	0.05748	3.153
3.1	0.3447	1.358	0.6552	3.03	0.06298	3.715
3.333	0	1.484	0.2894	3.321	0.126	5.048

3.1.2. α_1^0 = -10 β_{t0} = 0.3 β_{r0} = 0.1 α_1 = -3 α = -6

1	0.005773	0	1	0	0	0
1.233	0.5841	0.6227	1.002	0.7193	0.6197	0.7204
1.467	0.7162	0.8197	1.001	1.072	0.197	1.075
1.7	0.7605	0.9458	0.9947	1.379	0.1261	1.389
1.933	0.7579	1.039	0.9805	1.666	0.09313	1.695
2.167	0.7247	1.114	0.956	1.944	0.07488	2.009
2.4	0.6684	1.178	0.9186	2.217	0.06421	2.343
2.633	0.5915	1.236	0.8642	2.487	0.05841	2.713
2.867	0.4917	1.293	0.7854	2.757	0.05685	3.143
3.1	0.3569	1.355	0.6643	3.028	0.06156	3.693
3.333	0.1	1.452	0.3943	3.31	0.09739	4.713
3.335	0.09487	1.454	0.3892	3.313	0.001825	4.733
3.337	0.08944	1.456	0.3831	3.315	0.001927	4.755
3.339	0.08367	1.458	0.3765	3.318	0.002049	4.778
3.341	0.07746	1.46	0.3694	3.321	0.002199	4.802
3.343	0.07071	1.462	0.3617	3.324	0.002388	4.829
3.345	0.06325	1.465	0.3532	3.326	0.002638	4.858
3.347	0.05478	1.468	0.3434	3.33	0.002991	4.892
3.349	0.04473	1.472	0.3318	3.333	0.003544	4.931
3.351	0.03163	1.476	0.3166	3.336	0.004613	4.983
3.353	0.0004061	1.487	0.2794	3.341	0.01119	5.109

3.1.3. α_1^0 = -10 β_{t0} = 0.3 β_{r0} = 0.3 α_1 = -3 α = -6

1	0.005773	0	1	0	0	0
1.233	0.5842	0.6227	1.002	0.7193	0.6197	0.7204
1.467	0.7176	0.8195	1.001	1.072	0.1969	1.074
1.7	0.7649	0.9452	0.9955	1.378	0.1257	1.387
1.933	0.7671	1.038	0.9828	1.665	0.09233	1.691
2.167	0.7406	1.111	0.9611	1.942	0.07366	1.999
2.4	0.6932	1.174	0.9284	2.213	0.06241	2.324
2.633	0.6284	1.229	0.8819	2.481	0.05571	2.677

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
2.867	0.5462	1.282	0.817	2.748	0.05247	3.074
3.1	0.4424	1.335	0.7251	3.014	0.05293	3.546
3.333	0.3	1.395	0.5822	3.282	0.06052	4.174
3.335	0.2985	1.396	0.5814	3.284	0.0005924	4.181
3.337	0.297	1.396	0.5798	3.287	0.0005947	4.187
3.339	0.2955	1.397	0.5781	3.289	0.000597	4.194
3.341	0.2939	1.397	0.5765	3.291	0.0005994	4.201
3.343	0.2924	1.398	0.5749	3.293	0.0006018	4.207
3.345	0.2909	1.399	0.5732	3.296	0.0006042	4.214
3.347	0.2893	1.399	0.5716	3.298	0.0006067	4.221
3.349	0.2878	1.4	0.5699	3.3	0.0006093	4.228
3.351	0.2862	1.4	0.5682	3.303	0.0006119	4.235
3.353	0.2846	1.401	0.5665	3.305	0.0006145	4.241

3.1.4. α_1^0 = -10 β_{t0} = 0.3 β_{r0} = 0.5 α_1 = -3 α = -6

1	0.005773	0	1	0	0	0
1.233	0.5844	0.6226	1.002	0.7193	0.6196	0.7204
1.467	0.7203	0.8192	1.001	1.072	0.1966	1.074
1.7	0.7737	0.944	0.9972	1.377	0.1248	1.384
1.933	0.7852	1.035	0.9874	1.662	0.09081	1.683
2.167	0.7713	1.106	0.9708	1.937	0.07139	1.982
2.4	0.7403	1.165	0.9465	2.205	0.05924	2.29
2.633	0.6963	1.217	0.913	2.47	0.0513	2.615
2.867	0.6415	1.263	0.8689	2.732	0.04612	2.963
3.1	0.5765	1.306	0.8117	2.992	0.04303	3.346
3.333	0.5	1.348	0.7374	3.251	0.04187	3.78
3.404	0.4743	1.361	0.7098	3.329	0.0127	3.924
3.474	0.447	1.374	0.6806	3.406	0.01289	4.076
3.544	0.4179	1.387	0.6485	3.484	0.01318	4.239
3.614	0.3866	1.4	0.6129	3.562	0.01362	4.413
3.684	0.3526	1.415	0.573	3.639	0.01426	4.603
3.754	0.3151	1.43	0.5275	3.717	0.01519	4.813
3.825	0.2726	1.446	0.4743	3.795	0.01663	5.052
3.895	0.2223	1.466	0.4093	3.873	0.01903	5.336
3.965	0.1569	1.489	0.3222	3.952	0.02395	5.706
4.035	0.0003049	1.545	0.1032	4.034	0.05578	6.601

3.1.5. α_1^0 = -10 β_{t0} = 0.3 β_{r0} = 0.7 α_1 = -3 α = -6

1	0.005773	0	1	0	0	0
1.233	0.5847	0.6226	1.002	0.7192	0.6196	0.7203
1.467	0.7244	0.8187	1.002	1.071	0.1961	1.073
1.7	0.7866	0.9422	0.9996	1.375	0.1235	1.38
1.933	0.8116	1.031	0.9939	1.658	0.08866	1.671
2.167	0.8153	1.099	0.9843	1.93	0.06837	1.958
2.4	0.8057	1.155	0.9705	2.195	0.05529	2.245
2.633	0.7872	1.201	0.9522	2.455	0.0463	2.538
2.867	0.7624	1.241	0.9293	2.712	0.03986	2.839
3.1	0.733	1.276	0.9014	2.966	0.03509	3.151
3.333	0.7	1.307	0.8684	3.218	0.03149	3.477
3.58	0.6619	1.337	0.8282	3.483	0.03037	3.84
3.827	0.6209	1.365	0.7804	3.747	0.02809	4.225
4.074	0.5771	1.392	0.7251	4.009	0.02643	4.637
4.321	0.5304	1.417	0.6611	4.271	0.02532	5.083
4.568	0.4803	1.442	0.587	4.531	0.02474	5.572
4.815	0.426	1.467	0.5003	4.789	0.02476	6.118
5.062	0.3656	1.492	0.3971	5.047	0.02558	6.742

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
5.309	0.2958	1.52	0.2694	5.303	0.02776	7.489
5.557	0.2072	1.553	0.09735	5.556	0.03323	8.472
5.804	0.0008282	1.627	-0.3233	5.795	0.07325	10.86

3.1.6. $\alpha_1^0 = -10$ $\beta_{t0} = 0.3$ $\beta_{r0} = 0.8709$ $\alpha_1 = -3$ $\alpha = -6$

1	0.005773	0	1	0	0	0
1.233	0.5851	0.6226	1.002	0.7192	0.6196	0.7203
1.467	0.729	0.8181	1.003	1.07	0.1956	1.072
1.7	0.8008	0.9403	1.002	1.373	0.1221	1.376
1.933	0.8401	1.027	1.001	1.654	0.08643	1.659
2.167	0.8619	1.092	0.998	1.923	0.0654	1.933
2.4	0.8732	1.144	0.994	2.185	0.05169	2.202
2.633	0.8778	1.186	0.9886	2.441	0.04215	2.468
2.867	0.8781	1.221	0.9821	2.693	0.03519	2.734
3.1	0.8755	1.251	0.9744	2.943	0.02994	3
3.333	0.8709	1.277	0.9655	3.19	0.02585	3.267
6.333	0.7694	1.448	0.7766	6.286	0.1709	6.923
9.333	0.6817	1.518	0.4966	9.32	0.0697	11.07
12.33	0.6161	1.558	0.1619	12.33	0.0401	15.71
15.33	0.5658	1.584	-0.21	15.33	0.02682	20.8
18.33	0.5258	1.604	-0.6092	18.32	0.01954	26.31
21.33	0.4931	1.619	-1.03	21.31	0.01505	32.2
24.33	0.4658	1.631	-1.467	24.29	0.01205	38.47
27.33	0.4426	1.641	-1.919	27.27	0.009929	45.08
30.33	0.4225	1.649	-2.383	30.24	0.008365	52.02
33.33	0.4048	1.657	-2.857	33.21	0.007172	59.28
336.3	0.1329	1.756	-61.83	330.6	0.099	1702
669.3	0.09446	1.769	-131.6	656.3	0.01301	4746
1002	0.07725	1.774	-202.7	981.6	0.005781	8677
1335	0.06695	1.778	-274.6	1307	0.003451	13330
1668	0.05991	1.78	-346.9	1632	0.002356	18600
2001	0.05471	1.782	-419.6	1957	0.00174	24420
2334	0.05066	1.783	-492.5	2282	0.001353	30760
2667	0.0474	1.784	-565.6	2607	0.001091	37560
3000	0.0447	1.785	-638.9	2932	0.0009036	44800
3333	0.04241	1.786	-712.3	3256	0.0007645	52450

3.2.1. $\alpha_1^0 = -10$ $\beta_{t0} = 0.5$ $\beta_{r0} = 0$ $\alpha_1 = -5$ $\alpha = -10$

1	0.004472	0	1	0	0	0
1.1	0.4166	0.4283	1.001	0.4568	0.4253	0.4572
1.2	0.5527	0.5842	1.001	0.6619	0.156	0.6623
1.3	0.6379	0.6918	1.001	0.8293	0.1075	0.8297
1.4	0.6935	0.7742	1.001	0.9788	0.08241	0.9796
1.5	0.7239	0.8412	0.9998	1.118	0.06704	1.12
1.6	0.7273	0.8985	0.9965	1.252	0.05723	1.258
1.7	0.6976	0.9498	0.9891	1.383	0.05136	1.397
1.8	0.6236	0.999	0.9741	1.514	0.04914	1.548
1.9	0.4779	1.051	0.943	1.649	0.05249	1.728
2	0	1.153	0.8108	1.828	0.1019	2.121

3.2.2. $\alpha_1^0 = -10$ $\beta_{t0} = 0.5$ $\beta_{r0} = 0.1$ $\alpha_1 = -5$ $\alpha = -10$

1	0.004472	0	1	0	0	0
1.1	0.4166	0.4283	1.001	0.4568	0.4253	0.4572
1.2	0.5527	0.5842	1.001	0.6619	0.156	0.6623
1.3	0.6379	0.6918	1.001	0.8293	0.1075	0.8297
1.4	0.6935	0.7742	1.001	0.9788	0.0824	0.9796

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
1.5	0.7242	0.8412	0.9999	1.118	0.06702	1.12
1.6	0.728	0.8984	0.9966	1.252	0.05719	1.257
1.7	0.6992	0.9497	0.9893	1.382	0.05128	1.397
1.8	0.6268	0.9986	0.9746	1.513	0.04897	1.547
1.9	0.4848	1.051	0.9443	1.649	0.05204	1.725
2	0.1	1.137	0.8406	1.815	0.0862	2.057
2	0.09489	1.138	0.839	1.816	0.000982	2.061
2.001	0.08949	1.139	0.8373	1.817	0.001038	2.065
2.001	0.08373	1.14	0.8354	1.818	0.001104	2.07
2.002	0.07754	1.141	0.8334	1.82	0.001185	2.074
2.002	0.0708	1.143	0.8313	1.821	0.001288	2.079
2.002	0.06335	1.144	0.8288	1.823	0.001424	2.085
2.003	0.05487	1.146	0.826	1.824	0.001615	2.092
2.003	0.04482	1.148	0.8227	1.826	0.001915	2.099
2.003	0.0317	1.15	0.8183	1.829	0.002493	2.109
2.004	0.0006991	1.156	0.8075	1.834	0.005996	2.133

3.2.3. $\alpha_1^0 = -10$ $\beta_{t0} = 0.5$ $\beta_{r0} = 0.3$ $\alpha_1 = -5$ $\alpha = -10$

1	0.004472	0	1	0	0	0
1.1	0.4166	0.4283	1.001	0.4568	0.4253	0.4572
1.2	0.5527	0.5842	1.001	0.6619	0.156	0.6623
1.3	0.638	0.6918	1.001	0.8293	0.1075	0.8297
1.4	0.6942	0.7741	1.001	0.9787	0.08236	0.9795
1.5	0.7265	0.841	1	1.118	0.06689	1.12
1.6	0.7339	0.8979	0.9972	1.251	0.05689	1.256
1.7	0.7119	0.9486	0.9908	1.381	0.05066	1.394
1.8	0.652	0.9962	0.9783	1.511	0.04765	1.54
1.9	0.5364	1.045	0.9536	1.643	0.04879	1.707
2	0.3	1.107	0.8952	1.788	0.06172	1.943
2.004	0.2853	1.11	0.8907	1.795	0.003185	1.956
2.007	0.2697	1.114	0.8863	1.801	0.003347	1.969
2.011	0.2529	1.117	0.8815	1.808	0.003541	1.984
2.015	0.2347	1.121	0.8763	1.814	0.003781	1.999
2.019	0.2147	1.125	0.8705	1.821	0.004087	2.015
2.022	0.1925	1.129	0.8639	1.829	0.004493	2.034
2.026	0.1671	1.135	0.8562	1.836	0.005068	2.055
2.03	0.1368	1.14	0.8468	1.845	0.005975	2.079
2.034	0.09696	1.148	0.834	1.855	0.007739	2.111
2.037	0.0006129	1.167	0.8008	1.873	0.01863	2.188

3.2.4. $\alpha_1^0 = -10$ $\beta_{t0} = 0.5$ $\beta_{r0} = 0.5$ $\alpha_1 = -5$ $\alpha = -10$

1	0.004472	0	1	0	0	0
1.1	0.4166	0.4283	1.001	0.4568	0.4253	0.4572
1.2	0.5527	0.5842	1.001	0.6619	0.156	0.6623
1.3	0.6382	0.6918	1.001	0.8293	0.1075	0.8297
1.4	0.6956	0.774	1.001	0.9786	0.08228	0.9793
1.5	0.7311	0.8407	1	1.118	0.06664	1.119
1.6	0.7455	0.897	0.9984	1.25	0.05631	1.254
1.7	0.7365	0.9465	0.9938	1.379	0.04947	1.389
1.8	0.6998	0.9918	0.985	1.507	0.04533	1.528
1.9	0.6271	1.036	0.969	1.634	0.04384	1.678
2	0.5	1.082	0.9392	1.766	0.04632	1.854
2.013	0.478	1.088	0.9337	1.783	0.006395	1.88
2.025	0.4542	1.095	0.9276	1.8	0.006625	1.907
2.038	0.4281	1.102	0.9208	1.818	0.006914	1.935
2.05	0.3993	1.109	0.9132	1.836	0.007282	1.966

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
2.063	0.3672	1.117	0.9044	1.854	0.007764	1.999
2.076	0.3308	1.125	0.8942	1.873	0.008421	2.035
2.088	0.2886	1.135	0.8819	1.893	0.009375	2.075
2.101	0.2373	1.146	0.8664	1.914	0.01091	2.123
2.113	0.169	1.16	0.8446	1.937	0.01394	2.185
2.126	0.0005514	1.193	0.7849	1.976	0.033	2.334

3.2.5. α_1^0 = -10 β_{t0} = 0.5 β_{r0} = 0.7 α_1 = -5 α = -10

1	0.004472	0	1	0	0	0
1.1	0.4166	0.4283	1.001	0.4568	0.4253	0.4572
1.2	0.5528	0.5842	1.001	0.6619	0.156	0.6623
1.3	0.6386	0.6917	1.001	0.8292	0.1075	0.8297
1.4	0.6976	0.7739	1.001	0.9785	0.08216	0.979
1.5	0.738	0.8402	1.001	1.117	0.06627	1.118
1.6	0.7626	0.8956	1	1.249	0.05546	1.251
1.7	0.772	0.9435	0.9979	1.376	0.04784	1.381
1.8	0.7658	0.9859	0.9938	1.501	0.04242	1.511
1.9	0.7427	1.025	0.987	1.624	0.03868	1.643
2	0.7	1.061	0.9761	1.746	0.03639	1.782
2.038	0.6776	1.075	0.9703	1.793	0.01368	1.838
2.077	0.6513	1.088	0.9636	1.84	0.01366	1.896
2.115	0.6207	1.102	0.9556	1.887	0.01375	1.956
2.154	0.585	1.116	0.946	1.935	0.01399	2.02
2.192	0.5433	1.13	0.9343	1.983	0.01442	2.088
2.231	0.494	1.146	0.9201	2.032	0.01514	2.162
2.269	0.4347	1.162	0.902	2.082	0.01634	2.245
2.308	0.3604	1.18	0.8781	2.134	0.01844	2.341
2.346	0.2586	1.203	0.8429	2.189	0.02288	2.465
2.384	0.000399	1.256	0.7389	2.267	0.05242	2.76

3.2.6. α_1^0 = -10 β_{t0} = 0.5 β_{r0} = 0.8642 α_1 = -5 α = -10

1	0.004472	0	1	0	0	0
1.1	0.4166	0.4283	1.001	0.4568	0.4253	0.4572
1.2	0.5528	0.5842	1.001	0.6619	0.156	0.6623
1.3	0.639	0.6917	1.001	0.8292	0.1075	0.8296
1.4	0.6998	0.7737	1.001	0.9783	0.08203	0.9788
1.5	0.7453	0.8396	1.002	1.117	0.06588	1.117
1.6	0.7804	0.8942	1.002	1.248	0.05461	1.248
1.7	0.8083	0.9405	1.002	1.373	0.04627	1.374
1.8	0.8307	0.9804	1.002	1.495	0.03987	1.496
1.9	0.8491	1.015	1.002	1.614	0.03481	1.615
2	0.8642	1.046	1.002	1.731	0.03072	1.732
3.8	0.9303	1.307	0.9926	3.668	0.2605	3.697
5.6	0.8974	1.399	0.9594	5.517	0.09212	5.662
7.4	0.8521	1.448	0.9051	7.344	0.04954	7.72
9.2	0.8082	1.48	0.8344	9.162	0.03181	9.89
11	0.7684	1.503	0.7504	10.97	0.02255	12.17
12.8	0.7329	1.52	0.6557	12.78	0.01702	14.57
14.6	0.7014	1.533	0.5521	14.59	0.01343	17.09
16.4	0.6734	1.544	0.4409	16.39	0.01093	19.71
18.2	0.6482	1.553	0.3233	18.2	0.009124	22.43
20	0.6256	1.561	0.2001	20	0.007763	25.26
201.8	0.2198	1.664	-18.7	200.9	0.103	626.6
401.6	0.1568	1.677	-42.44	399.4	0.01308	1728
601.4	0.1284	1.682	-67.03	597.7	0.0058	3148
801.2	0.1114	1.686	-92.05	795.9	0.003459	4826

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
1001	0.0997	1.688	-117.4	994.1	0.002361	6727
1201	0.09106	1.69	-142.9	1192	0.001743	8828
1401	0.08434	1.691	-168.5	1390	0.001355	11110
1600	0.07892	1.692	-194.3	1589	0.001092	13560
1800	0.07443	1.693	-220.1	1787	0.0009045	16170
2000	0.07062	1.694	-246.1	1985	0.0007652	18930

3.3.1. α_1^0 = -10 β_{t0} = 0.7 β_{r0} = 0 α_1 = -7 α = -14

1	0.00378	0	1	0	0	0
1.043	0.2838	0.2869	1	0.2951	0.2839	0.2952
1.086	0.3894	0.3993	1	0.4221	0.1123	0.4222
1.129	0.4635	0.4812	1	0.5224	0.08196	0.5225
1.171	0.5208	0.5471	1	0.6094	0.06584	0.6095
1.214	0.5667	0.6025	1.001	0.6881	0.05539	0.6882
1.257	0.602	0.6505	1	0.7613	0.048	0.7614
1.3	0.6213	0.6932	1	0.8307	0.04276	0.8313
1.343	0.6075	0.7329	0.9981	0.8984	0.0397	0.9006
1.386	0.5157	0.7733	0.9917	0.9679	0.04035	0.9758
1.429	0	0.8458	0.9473	1.069	0.07254	1.121

3.3.2. α_1^0 = -10 β_{t0} = 0.7 β_{r0} = 0.1 α_1 = -7 α = -14

1	0.00378	0	1	0	0	0
1.043	0.2838	0.2869	1	0.2951	0.2839	0.2952
1.086	0.3894	0.3993	1	0.4221	0.1123	0.4222
1.129	0.4635	0.4812	1	0.5224	0.08196	0.5225
1.171	0.5208	0.5471	1	0.6094	0.06584	0.6095
1.214	0.5667	0.6025	1.001	0.6881	0.05539	0.6882
1.257	0.6021	0.6504	1	0.7613	0.04799	0.7614
1.3	0.6217	0.6932	1	0.8307	0.04275	0.8313
1.343	0.6087	0.7328	0.9981	0.8984	0.03965	0.9005
1.386	0.5197	0.773	0.9919	0.9677	0.04018	0.9754
1.429	0.1	0.8369	0.9568	1.061	0.06386	1.103
1.429	0.09491	0.8376	0.9562	1.062	0.0005703	1.104
1.429	0.08953	0.8382	0.9556	1.062	0.0006025	1.105
1.429	0.08379	0.8388	0.955	1.063	0.0006411	1.107
1.429	0.07761	0.8395	0.9544	1.064	0.0006883	1.108
1.429	0.07088	0.8403	0.9536	1.064	0.000748	1.11
1.429	0.06343	0.8411	0.9528	1.065	0.0008269	1.111
1.429	0.05496	0.842	0.9519	1.066	0.0009379	1.113
1.429	0.0449	0.8431	0.9508	1.067	0.001112	1.116
1.43	0.03177	0.8446	0.9493	1.069	0.001448	1.118
1.43	0.001076	0.8482	0.9455	1.072	0.003596	1.126

3.3.3. α_1^0 = -10 β_{t0} = 0.7 β_{r0} = 0.3 α_1 = -7 α = -14

1	0.00378	0	1	0	0	0
1.043	0.2838	0.2869	1	0.2951	0.2839	0.2952
1.086	0.3894	0.3993	1	0.4221	0.1123	0.4222
1.129	0.4635	0.4812	1	0.5224	0.08196	0.5225
1.171	0.5208	0.5471	1	0.6094	0.06584	0.6095
1.214	0.5668	0.6025	1.001	0.6881	0.05538	0.6882
1.257	0.6027	0.6504	1	0.7612	0.04797	0.7614
1.3	0.6245	0.6931	1	0.8306	0.04264	0.8311
1.343	0.6185	0.7324	0.9985	0.8979	0.0393	0.8997
1.386	0.551	0.7713	0.9936	0.9659	0.0389	0.9721
1.429	0.3	0.8201	0.9745	1.045	0.04879	1.069
1.43	0.2859	0.8219	0.9734	1.047	0.001891	1.073

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
1.431	0.2708	0.8239	0.9721	1.05	0.001987	1.077
1.432	0.2545	0.826	0.9706	1.053	0.002102	1.081
1.433	0.2367	0.8282	0.969	1.056	0.002245	1.086
1.434	0.217	0.8307	0.9672	1.059	0.002426	1.091
1.435	0.195	0.8333	0.9652	1.062	0.002667	1.096
1.436	0.1697	0.8363	0.9627	1.066	0.003009	1.103
1.438	0.1392	0.8399	0.9597	1.07	0.003547	1.11
1.439	0.09886	0.8445	0.9555	1.076	0.004594	1.119
1.44	0.0007959	0.8556	0.9442	1.087	0.01112	1.142

3.3.4. $\alpha_1^0 = -10$ $\beta_{t0} = 0.7$ $\beta_{r0} = 0.5$ $\alpha_1 = -7$ $\alpha = -14$

1	0.00378	0	1	0	0	0
1.043	0.2838	0.2869	1	0.2951	0.2839	0.2952
1.086	0.3894	0.3993	1	0.4221	0.1123	0.4222
1.129	0.4635	0.4812	1	0.5224	0.08196	0.5225
1.171	0.5208	0.5471	1	0.6094	0.06584	0.6095
1.214	0.567	0.6024	1.001	0.6881	0.05537	0.6882
1.257	0.604	0.6504	1.001	0.7612	0.04792	0.7613
1.3	0.63	0.6928	1	0.8303	0.04244	0.8307
1.343	0.6376	0.7314	0.9994	0.8969	0.03861	0.8981
1.386	0.6087	0.7681	0.9966	0.9628	0.03671	0.9664
1.429	0.5	0.8066	0.9885	1.031	0.03845	1.043
1.433	0.4816	0.8111	0.9867	1.039	0.004101	1.051
1.437	0.4611	0.8153	0.9851	1.046	0.004246	1.06
1.441	0.4379	0.8198	0.9833	1.053	0.004427	1.069
1.445	0.4116	0.8244	0.9812	1.061	0.004657	1.079
1.449	0.3815	0.8294	0.9787	1.069	0.00496	1.089
1.453	0.3465	0.8348	0.9757	1.077	0.005372	1.101
1.457	0.3046	0.8407	0.972	1.086	0.005972	1.113
1.462	0.2525	0.8477	0.9671	1.096	0.006938	1.128
1.466	0.1812	0.8565	0.9601	1.107	0.008855	1.147
1.47	0.0007395	0.8775	0.9393	1.13	0.02098	1.192

3.3.5. $\alpha_1^0 = -10$ $\beta_{t0} = 0.7$ $\beta_{r0} = 0.7$ $\alpha_1 = -7$ $\alpha = -14$

1	0.00378	0	1	0	0	0
1.043	0.2838	0.2869	1	0.2951	0.2839	0.2952
1.086	0.3894	0.3993	1	0.4221	0.1123	0.4222
1.129	0.4635	0.4812	1	0.5224	0.08196	0.5225
1.171	0.5208	0.5471	1	0.6094	0.06584	0.6095
1.214	0.5673	0.6024	1.001	0.6881	0.05536	0.6882
1.257	0.6059	0.6503	1.001	0.7611	0.04785	0.7612
1.3	0.6383	0.6924	1.001	0.8299	0.04214	0.83
1.343	0.6652	0.7301	1.001	0.8956	0.03766	0.8958
1.386	0.6862	0.7642	1	0.9588	0.03407	0.9592
1.429	0.7	0.7954	1	1.02	0.03121	1.021
1.455	0.7039	0.8132	0.9999	1.057	0.01818	1.059
1.482	0.7032	0.8307	0.9992	1.094	0.01749	1.096
1.508	0.6967	0.8476	0.9981	1.131	0.01696	1.134
1.535	0.6828	0.8642	0.9964	1.167	0.01661	1.173
1.561	0.6595	0.8807	0.9939	1.204	0.01648	1.212
1.588	0.6238	0.8974	0.9903	1.241	0.01665	1.254
1.614	0.5708	0.9147	0.9849	1.279	0.01729	1.298
1.641	0.492	0.9334	0.9764	1.319	0.01878	1.348
1.667	0.367	0.9559	0.9619	1.362	0.02244	1.409
1.694	0.000562	1.005	0.9079	1.43	0.04928	1.549

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p

3.3.6. $\alpha_1^0 = -10$ $\beta_{t0} = 0.7$ $\beta_{r0} = 0.714$ $\alpha_1 = -7$ $\alpha = -14$

1	0.005345	0	1	0	0	0
1.043	0.2838	0.2874	1	0.2956	0.2824	0.2957
1.086	0.3895	0.3997	1	0.4225	0.1123	0.4227
1.129	0.4636	0.4817	1	0.5228	0.08196	0.523
1.171	0.5208	0.5475	1	0.6098	0.06584	0.6099
1.214	0.5673	0.6029	1	0.6885	0.05536	0.6887
1.257	0.606	0.6507	1	0.7615	0.04785	0.7617
1.3	0.639	0.6928	1	0.8303	0.04212	0.8305
1.343	0.6674	0.7304	1	0.8959	0.03758	0.8961
1.386	0.6922	0.7643	1	0.959	0.03388	0.9591
1.429	0.714	0.7951	1	1.02	0.03079	1.02
2.714	0.9276	1.193	1.001	2.523	0.3982	2.524
4	0.9542	1.319	0.9978	3.874	0.1255	3.884
5.286	0.947	1.383	0.9892	5.192	0.06384	5.234
6.571	0.9279	1.422	0.9744	6.499	0.03943	6.605
7.857	0.9044	1.449	0.9537	7.799	0.02716	8.008
9.143	0.8796	1.469	0.9275	9.096	0.02005	9.449
10.43	0.8551	1.485	0.8966	10.39	0.01554	10.93
11.71	0.8315	1.497	0.8615	11.68	0.01248	12.46
13	0.809	1.507	0.8226	12.97	0.01029	14.02
14.29	0.7878	1.516	0.7803	14.26	0.008669	15.64
144.1	0.3042	1.625	-7.754	143.9	0.109	330.1
286.9	0.2182	1.638	-19.21	286.2	0.0132	896.8
429.6	0.1791	1.644	-31.27	428.4	0.005829	1625
572.3	0.1554	1.647	-43.63	570.6	0.003471	2484
715	0.1392	1.649	-56.2	712.8	0.002367	3456
857.7	0.1272	1.651	-68.91	854.9	0.001747	4530
1000	0.1179	1.653	-81.73	997.1	0.001357	5697
1143	0.1103	1.654	-94.64	1139	0.001094	6949
1286	0.1041	1.655	-107.6	1281	0.0009058	8282
1429	0.09875	1.655	-120.6	1423	0.0007662	9691

3.4.1. $\alpha_1^0 = -10$ $\beta_{t0} = 0.9$ $\beta_{r0} = 0$ $\alpha_1 = -9$ $\alpha = -18$

1	0.002108	0	1	0	0	0
1.011	0.1479	0.1483	1	0.1494	0.1463	0.1494
1.022	0.2074	0.2088	1	0.2119	0.0605	0.2119
1.033	0.2519	0.2546	1	0.2603	0.04579	0.2603
1.044	0.2886	0.2927	1	0.3014	0.03808	0.3014
1.056	0.3201	0.3258	1	0.3379	0.03311	0.3379
1.067	0.348	0.3554	1	0.3711	0.02954	0.3711
1.078	0.3729	0.3822	1	0.4019	0.02681	0.4019
1.089	0.3933	0.4068	1	0.4309	0.02468	0.4309
1.1	0.3881	0.4303	0.9997	0.4589	0.02346	0.459
1.111	0	0.4643	0.9935	0.4976	0.03403	0.5007

3.4.2. $\alpha_1^0 = -10$ $\beta_{t0} = 0.9$ $\beta_{r0} = 0.1$ $\alpha_1 = -9$ $\alpha = -18$

1	0.002108	0	1	0	0	0
1.011	0.1479	0.1483	1	0.1494	0.1463	0.1494
1.022	0.2074	0.2088	1	0.2119	0.0605	0.2119
1.033	0.2519	0.2546	1	0.2603	0.04579	0.2603
1.044	0.2886	0.2927	1	0.3014	0.03808	0.3014
1.056	0.3201	0.3258	1	0.3379	0.03311	0.3379
1.067	0.348	0.3554	1	0.3711	0.02954	0.3711
1.078	0.3729	0.3822	1	0.4019	0.02681	0.4019

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
1.089	0.3935	0.4068	1	0.4309	0.02468	0.4309
1.1	0.3896	0.4303	0.9997	0.4588	0.02342	0.459
1.111	0.1	0.4614	0.9949	0.4947	0.03114	0.4971
1.111	0.095	0.4613	0.995	0.4946	0.0002673	0.4973
1.111	0.08969	0.4615	0.9949	0.4948	0.0002822	0.4977
1.111	0.08401	0.4618	0.9948	0.4952	0.0003001	0.498
1.111	0.07788	0.4622	0.9947	0.4955	0.0003219	0.4984
1.111	0.0712	0.4625	0.9945	0.4959	0.0003496	0.4989
1.111	0.06377	0.4629	0.9943	0.4963	0.0003861	0.4994
1.111	0.0553	0.4633	0.9942	0.4967	0.0004376	0.4999
1.111	0.04522	0.4639	0.9939	0.4972	0.0005183	0.5005
1.111	0.03203	0.4645	0.9936	0.4979	0.0006744	0.5014
1.111	0.001027	0.4662	0.9928	0.4996	0.001687	0.5035

3.4.3. α_1^0 = -10 β_{t0} = 0.9 β_{r0} = 0.3 α_1 = -9 α = -18

1	0.003333	0	1	0	0	0
1.011	0.1479	0.1481	1	0.1492	0.1451	0.1492
1.022	0.2074	0.2086	1	0.2117	0.0605	0.2117
1.033	0.252	0.2544	1	0.2601	0.04579	0.2601
1.044	0.2886	0.2925	1	0.3011	0.03808	0.3011
1.056	0.3202	0.3256	1	0.3376	0.03311	0.3376
1.067	0.348	0.3551	1	0.3709	0.02954	0.3709
1.078	0.3729	0.3819	1	0.4017	0.02681	0.4017
1.089	0.3945	0.4066	1	0.4306	0.02466	0.4306
1.1	0.4018	0.4297	1	0.4583	0.02315	0.4584
1.111	0.3	0.4543	0.9984	0.4876	0.02458	0.4884
1.112	0.2889	0.4551	0.9984	0.4885	0.001076	0.4893
1.112	0.2765	0.4562	0.9982	0.4898	0.001119	0.4907
1.112	0.2626	0.4574	0.998	0.4912	0.001173	0.4922
1.113	0.2468	0.4586	0.9977	0.4926	0.001241	0.4937
1.113	0.2288	0.4599	0.9974	0.4941	0.001328	0.4953
1.113	0.2078	0.4614	0.997	0.4957	0.001445	0.4971
1.114	0.1828	0.463	0.9966	0.4975	0.001614	0.4991
1.114	0.1516	0.4649	0.996	0.4995	0.001883	0.5015
1.115	0.1089	0.4673	0.9951	0.5021	0.002414	0.5045
1.115	0.001178	0.4731	0.9925	0.5081	0.005815	0.5117

3.4.4. α_1^0 = -10 β_{t0} = 0.9 β_{r0} = 0.4 α_1 = -9 α = -18

1	0.003333	0	1	0	0	0
1.011	0.1479	0.1481	1	0.1492	0.1451	0.1492
1.022	0.2074	0.2086	1	0.2117	0.0605	0.2117
1.033	0.252	0.2544	1	0.2601	0.04579	0.2601
1.044	0.2886	0.2925	1	0.3011	0.03808	0.3011
1.056	0.3202	0.3256	1	0.3376	0.03311	0.3376
1.067	0.348	0.3551	1	0.3709	0.02954	0.3709
1.078	0.373	0.3819	1	0.4017	0.02681	0.4017
1.089	0.3954	0.4066	1	0.4306	0.02464	0.4306
1.1	0.4122	0.4295	1	0.4581	0.02293	0.4581
1.111	0.4	0.4516	0.9997	0.4849	0.02211	0.4851
1.112	0.3935	0.4544	0.9994	0.4882	0.002411	0.488
1.113	0.385	0.4569	0.9993	0.4912	0.002452	0.491
1.115	0.3741	0.4594	0.9991	0.4942	0.002509	0.4941
1.116	0.36	0.462	0.9989	0.4973	0.002589	0.4974
1.117	0.3418	0.4647	0.9986	0.5006	0.002701	0.5007
1.118	0.3183	0.4675	0.9982	0.504	0.002865	0.5043
1.119	0.2872	0.4706	0.9977	0.5076	0.003116	0.5082

R/R_p	β_r	φ	x/R_p	y/R_p	$\Delta\varphi$	tc_1/R_p
1.121	0.2445	0.4742	0.9969	0.5117	0.003538	0.5126
1.122	0.1803	0.4786	0.9957	0.5166	0.004409	0.5182
1.123	0.00122	0.4889	0.9914	0.5274	0.0103	0.5312

3.4.5. α_1^0 = -10 β_{t0} = 0.9 β_{r0} = 0.4359 α_1 = -9 α = -18

1	0.003333	0	1	0	0	0
1.011	0.1479	0.1481	1	0.1492	0.1451	0.1492
1.022	0.2074	0.2086	1	0.2117	0.0605	0.2117
1.033	0.252	0.2544	1	0.2601	0.04579	0.2601
1.044	0.2886	0.2925	1	0.3011	0.03808	0.3011
1.056	0.3202	0.3256	1	0.3376	0.03311	0.3376
1.067	0.348	0.3551	1	0.3709	0.02954	0.3709
1.078	0.373	0.3819	1	0.4017	0.02681	0.4017
1.089	0.3957	0.4066	1	0.4306	0.02463	0.4306
1.1	0.4166	0.4294	1	0.458	0.02284	0.458
1.111	0.4359	0.4507	1	0.484	0.02133	0.484
2.111	0.8807	1.077	1	1.859	0.6263	1.859
3.111	0.9469	1.244	1	2.946	0.1662	2.946
4.111	0.97	1.325	1	3.988	0.08153	3.987
5.111	0.9807	1.374	1	5.012	0.04879	5.012
6.111	0.9865	1.406	1	6.029	0.03255	6.028
7.111	0.9901	1.43	1	7.04	0.02328	7.04
8.111	0.9924	1.447	1	8.049	0.01749	8.049
9.111	0.994	1.461	1	9.056	0.01362	9.056
10.11	0.9951	1.472	1	10.06	0.01091	10.06
11.11	0.9959	1.481	1	11.07	0.008941	11.07
112.1	1	1.562	1.003	112.1	0.081	112.1
223.1	1	1.566	1.006	223.1	0.004438	223.1
334.1	1	1.568	1.009	334.1	0.001489	334.1
445.1	1	1.569	1.012	445.1	0.0007464	445.1
556.1	1	1.569	1.014	556.1	0.0004484	556.1
667.1	1	1.569	1.017	667.1	0.0002992	667.1
778.1	1	1.569	1.02	778.1	0.0002138	778.1
889.1	1	1.57	1.023	889.1	0.0001604	889.1
1000	1	1.57	1.026	1000	0.0001248	1000
1111	1	1.57	1.029	1111	9.989e-005	1111

Приложение 5

ПРИВЕДЕННЫЕ ПЕРИОДЫ ОРБИТ И ИХ РАДИУСЫ АПОЦЕНТРИЕВ

α_1	β_p	$\overline{R}_a$	φ_a/π	$\bar{t}_a$
-.5000E+00	.1000E+00	.2300E+06	1.001	.1429E+09
-.5000E+00	.3000E+00	.2570E+04	1.012	.1802E+06
-.5000E+00	.5000E+00	.2500E+03	1.038	.5842E+04
-.5000E+00	.7000E+00	.3728E+02	1.115	.3700E+03
-.5000E+00	.8000E+00	.1316E+02	1.246	.8627E+02
-.6000E+00	.1000E+00	.4969E+01	1.001	.2101E+02
-.6000E+00	.3000E+00	.4712E+01	1.018	.1968E+02
-.6000E+00	.5000E+00	.4100E+01	1.063	.1694E+02
-.6000E+00	.7000E+00	.2867E+01	1.228	.1205E+02
-.6700E+00	.7400E+00	.1221E+01	2.879	.1064E+02
-.7000E+00	.1000E+00	.2482E+01	1.002	.8632E+01
-.7000E+00	.3000E+00	.2334E+01	1.025	.8172E+01
-.7000E+00	.5000E+00	.1991E+01	1.097	.7203E+01
-.7000E+00	.7000E+00	.1220E+01	1.823	.6914E+01
-.7300E+00	.6000E+00	.1442E+01	1.246	.5680E+01
-.7300E+00	.6600E+00	.1194E+01	1.562	.5841E+01
-.8000E+00	.1000E+00	.1653E+01	1.003	.5373E+01
-.8000E+00	.3000E+00	.1540E+01	1.032	.5112E+01
-.8000E+00	.5000E+00	.1270E+01	1.146	.4616E+01
-.8000E+00	.5990E+00	.1004E+01	1.390	.4362E+01
-.9000E+00	.1000E+00	.1239E+01	1.003	.3929E+01
-.9000E+00	.3000E+00	.1142E+01	1.044	.3764E+01
-.9000E+00	.4000E+00	.1046E+01	1.086	.3565E+01

Научное издание

Смульский Иосиф Иосифович

ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Книга издается в авторской редакции

Утверждено к печати ученым советом
Института криосферы Земли СО РАН

Редактор *М.Б. Успенская*
Технический редактор *Н. М. Остроумова*
Оформление обложки *Л. И.Смульский*

ЛР №020618 от 13.08. 97.
Подписано в печать 01.02.99. Формат 60x90/16. Гарнитура «Таймс»
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 18,4. Уч.-изд. л. 17,0. Тираж 500 экз. Заказ № 58

Издательство Новосибирского университета
630058, Новосибирск, ул. Русская, 35

Отпечатано в типографии НИЦ ОИГГМ СО РАН

630090, Новосибирск-90, просп. Академика Коптюга, 3

"Давно еще я говорил некоторым своим приятелям-физикам: займитесь и постройте электродинамику на основе принципа зависимости силы от скорости движения заряда... И вот теперь, наконец, вижу исполнение этой задачи... В правильности твоего пути я практически не сомневаюсь."

23.01.95 г. Проф. В.В.Чешев, д.ф.н.

"...Хочу отметить чрезвычайную простоту и ясность Вашей идеи, совершенно не встречающиеся теперь в научных публикациях. ...Впервые появилась настоящая научная работа по теории относительности и законам электромагнитного воздействия — это Ваша книга".

25.02.95 г. Б.А.Бондарев, физик.

"Вашу книгу читал до 3-00 ночи... Особенно понравилось объяснение неизменности массы, и полностью согласен, что взаимодействие двух заряженных частиц зависит от их относительной скорости."

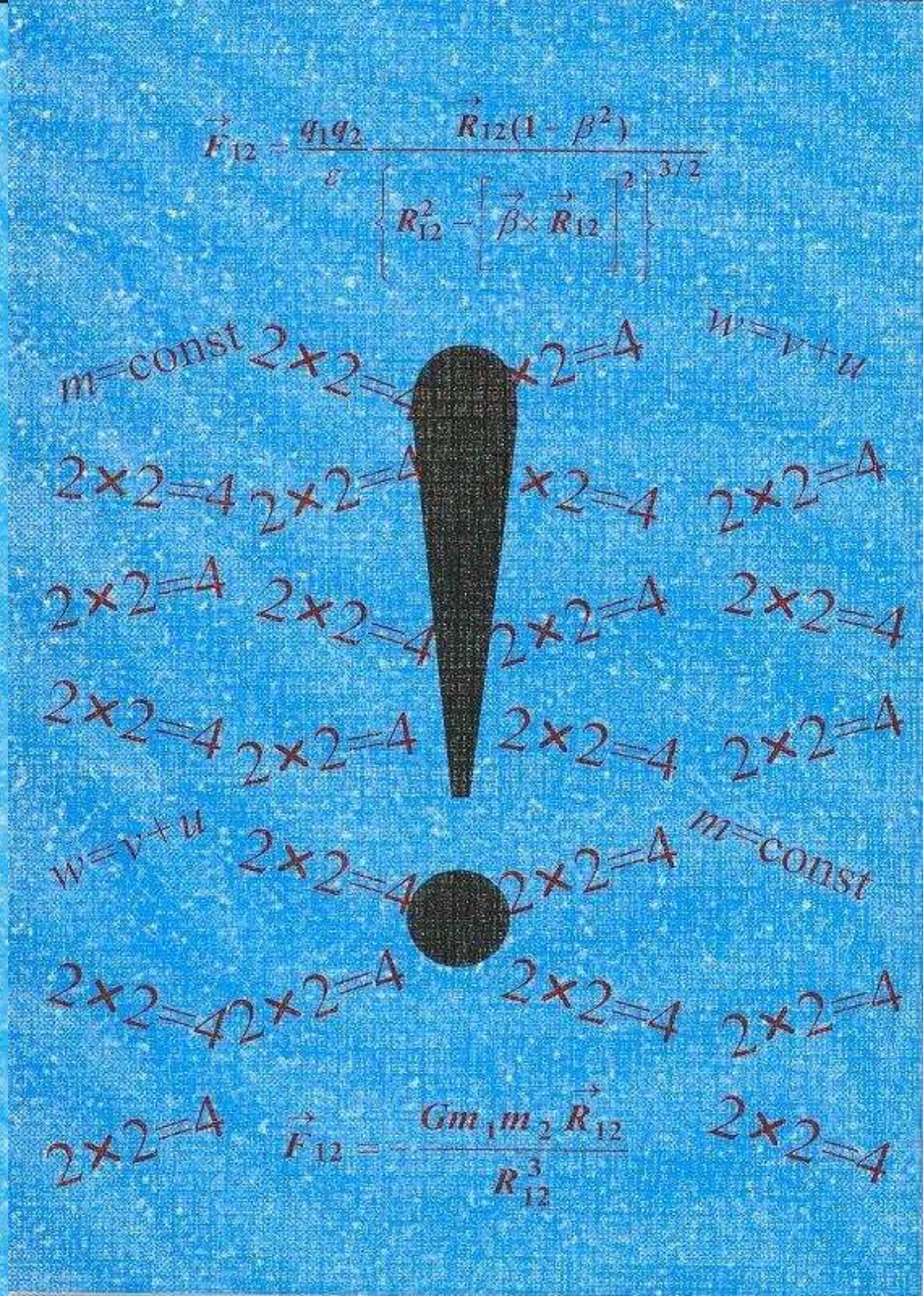
17.10.95 г. А.А. Долгов, физик.

"В молодости я много времени потратил, пытаясь найти неувязку у Эйнштейна, так как не мог принять выводов, следующих из его теории. Она казалась мне научной спекуляцией, каковой и продолжаю ее считать. К сожалению, мне не удалось найти таких неувязок, в результате чего я оставил занятия физикой и сосредоточил свои усилия на технике, в которой все держится на здравом ощущении реальности... Вам же это удалось. Ваши доводы не просто убедительны, они воодушевляют и дают надежду."

1.03.96 г. Проф. В.В.Бугровский, д.т.н.

"...То что "цензура" не пропускает работ, в которых гравитация исследуется без применения эйнштейновских гипотез, это чудовищное преступление перед наукой. Вам, фактически, пришлось заново открывать то, что когда-то было предложено Хевисайдом, ...хотя Вы идете в Вашей книге значительно дальше, чем Хевисайд."

04.06.96 г. Prof. Oleg D. Jefimenko.

"Проф. Смульский, несомненно, является наиболее убежденным и выдающимся оппонентом теории относительности, его статья важна для Special Rel. Let".

G.Walton. SRL - 1997.-V.1, N.3.-P.61.