

Всероссийский институт научной и технической информации
(ВИНИТИ РАН)

ДЕПОНИРОВАННАЯ НАУЧНАЯ РАБОТА

Москва

Смульский И.И., Сеченов К.Е. Уравнения вращательного движения Земли и их решения при воздействии Солнца и планет / Институт криосферы Земли СО РАН. - Тюмень, 2007. - 36 с. - ил. : 7. Библиогр.: 19 назв. - Рус. - Деп. в ВИНТИ 02.05.07 г. № 492-В2007.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ КРИОСФЕРЫ ЗЕМЛИ

УДК 521.172 + 523.2

И.И. Смульский, К.Е. Сеченов
УРАВНЕНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЗЕМЛИ
И ИХ РЕШЕНИЯ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СОЛНЦА И ПЛАНЕТ

Исправления от 12.01.10 г.

Тюмень 2007

Аннотация

С целью изучения эволюции климата рассматривается вращательное движение Земли. Проанализирована теорема моментов и на ее основе приведен вывод дифференциальных уравнений вращательного движения. Обсуждены проблемы с начальными условиями и представлен алгоритм численного решения. Численно проинтегрированы уравнения при воздействии на Землю по отдельности Солнца и планет в течение 10 тыс. лет. Проанализированы результаты и сопоставлены с решениями других авторов и наблюдениями.

1. Введение

В истории Земли наблюдаются периодические изменения осадочных слоев на материках и океанах, их химического состава и магнитных свойств. Прослеживаются также колебания уровней океанов и повторяющиеся следы деятельности ледников. Климатические изменения определяются разными факторами, в том числе, количеством солнечного тепла, поступающего на Землю. Оно зависит от угла падения солнечных лучей на поверхность, отдаленности ее от Солнца и длительности освещения. В 20-х годах XX века югославский ученый *Милутин Миланкович* (1939) создал астрономическую теорию ледниковых периодов, в которой эти три фактора выражаются наклоном плоскости орбиты к плоскости экватора, эксцентриситетом орбиты и положением перигелия. В последующем расчеты М. Миланковича повторяли другие исследователи: *Д. Брауэр* и *А. Вурком* (1950), *Ш.Г. Шараф* и *Н.А. Будникова* (1967), *А Берже* и *М.Ф. Лоутре* (1991), *Ж. Ляскар* и др. (1993), а также другие.

В результате взаимодействия тел Солнечной системы происходят изменения орбит планет. Из-за вращения Земля вытягивается в экваториальной плоскости. Поэтому каждое из внешних тел создает момент сил, который приводит к прецессии и нутации земной оси. Эти движения плоскости экватора складываются с движением плоскости орбиты и дают угол наклона между двумя плоскостями, от которого зависит инсоляция Земли.

В вышеупомянутых работах задача орбитального движения решалась приближенно аналитическими методами, в рамках так называемой теории вековых возмущений. Во второй задаче о вращательном движении Земли дифференциальные уравнения вращательного движения второго порядка упрощались до уравнений первого порядка, уравнений Пуассона, которые решались приближенно аналитическими методами.

Каждая из последующих групп вышеупомянутых исследователей использовали более совершенные аналитические теории вековых возмущений. Однако, теории вращательного движения основывались на уравнениях Пуассона и на учете воздействия на Землю только Луны и Солнца. Одним из путей дальнейшего совершенствования решения этих двух проблем является использование современных компьютеров. С помощью численных методов можно избежать упрощений, которые неизбежны при аналитическом решении проблемы. С помощью численного метода мы проинтегрировали уравнения движения Солнца, планет и Луны за 100 млн. лет. И в настоящей работе предлагаются результаты численного метода по интегрированию уравнений вращательного движения Земли.

В течение почти трех веков уравнения вращательного движения неоднократно выводились разными авторами. При этом они основывались на разных теоремах механики, использовали разные системы координат, разные обозначения и разные методы решения. Все авторы в процессе вывода уравнений начинали их упрощать с целью дальнейшего решения уравнений аналитическими методами. В подавляющем большинстве эти уравнения сводились к уравнениям Пуассона. Таким образом, в литературе отсутствуют общепринятые неупрощенные дифференциальные уравнения вращения Земли, которые без всякого изменения можно было бы подвергнуть численному интегрированию.

Кроме того, при численном интегрировании возникает ряд конкретных проблем, например, задание начальных условий, которые невозможно решить, если детально не представлять все особенности вывода дифференциальных уравнений. Часто возникают противоречия между трактовкой сложного вращательного движения Земли в астрономии и требованиями, которые следуют из законов механики. В связи с этим нам пришлось проанализировать разные выводы уравнений, в результате чего был выбран наиболее простой, который и представлен в настоящей работе. Ввиду объемности вывода здесь приведены лишь принципиальные математические преобразования и описана схема вывода остальных.

Во второй половине 20-ого века были введены в действие высокоточные системы наблюдения вращения Земли, которые позволили исследовать динамику Земной оси на малых интервалах времени. С целью ее объяснения были созданы теории прецессии и нутации. Расхождение между этими теориями и наблюдениями вынудило исследователей кроме основного гравитационного воздействия вводить дополнительные эффекты (см., например, *Жаров В.Е. (2005)*). Перечислим некоторые из них. Для расчета гравитационного взаимодействия элемента массы Земли с

точечным телом вводилась коррекция на распределение геопотенциала по поверхности Земли. Кроме того, рассматривалась неосесимметричная Земля с неравными между собой моментами инерции J_x и J_y , различие которых также определилось по поверхностному геопотенциалу. Вводилась коррекция на торможение вращения Земли за счет приливных сил. К гравитационным силам добавлялись также релятивистские силы в уравнениях вращательного движения путем учета геодезической прецессии (см. *Бретаньон и др. (1997)*), а также учетом релятивистской добавки в силовой функции в уравнениях для орбитального движения (см. *Куинн Т.Р. и др. (1991)*).

Для объяснения различия между теорией и наблюдениями вводят модели нежесткой Земли, а также структурированную Землю, в которой каждая структура, например, ядро Земли, имеют свое движение (см. *Молоденский С.М. (2004)*). При рассмотрении эволюции оси Земли за большие периоды времени дополнительно учитывается изменение моментов инерции Земли за счет перераспределения льда в полярных областях.

Практически все дополнительные эффекты не определены так точно, как гравитационные силы. Влияние ряда из них носит гипотетический характер. Некоторые из них предложены специалистами из разных областей физики и специалистам в небесной механике приходится применять их на веру, не подвергая строгому анализу. К таковым относятся релятивистские добавки. Эти силы зависят не только от расстояния, но и от скорости (см. *Смульский И.И. (1999)*). В теоретической механике системы с такими связями называются неголономными системами. Для таких систем энергетические методы механики требуют коррекции. Специалистам в общей теории относительности известны противоречия уравнений движения с законами сохранения.

Все эти дополнительные слабые воздействия основаны на расхождениях между расчетами основного гравитационного воздействия на вращательное движение Земли и наблюдениями. Однако, этот расчет, как отмечалось ранее, выполнен приближенно. И как будет показано ниже при выводе дифференциальных уравнений вращательного движения Земли, существует целый ряд упрощений этих уравнений, которые могут давать отличия результатов расчетов от наблюдения. Поэтому представляет большой интерес получение как можно более точных решений, чтобы не возникало сомнений, что невязки расчетов с наблюдениями действительно должны объясняться другими факторами. Это положение приобретает еще большую актуальность при исследовании вращательного движения за большие периоды времени. Дополнительные слабые воздействия, которые оттарированы на кратковременных наблюдениях, могут давать нереальные результаты на интервалах в миллионы лет. В связи с этим, далее

рассматривается ньютоновское гравитационное воздействие на вращательное движение осесимметричной Земли.

2. Теорема моментов и ее приближенные результаты

Земля представляет собой нетвердое тело, которое принимает равновесную осесимметричную форму под действием двух систем сил: гравитационных и центробежных. Она образует сплюснутый у полюсов геоид с осью симметрии, расположенной по вектору угловой скорости $\vec{\phi}$ собственного вращения. Этот вектор совершает сложное движение в пространстве, поэтому абсолютная скорость вращения Земли $\vec{\omega}$ не совпадает с $\vec{\phi}$.

Вращательное движение Земли рассматриваем в поступательно движущейся (невращающейся) системе координат $x_1y_1z_1$, связанной с центром O масс Земли. В соответствии с теоремой моментов относительно подвижного центра масс (см. например, *Тарг С.М.* (1998), стр. 293) вращательное движение механической системы описывается теоремой изменения момента количества движения:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k), \quad (1)$$

где \vec{K}_O - момент количества движения (кинетический момент) Земли относительно центра O в системе $x_1y_1z_1$.

$\vec{m}_O(\vec{F}_k)$ - момент относительно этого центра, действующей на тело внешней силы \vec{F}_k в той же системе $x_1y_1z_1$.

Проанализируем теорему моментов (1) на примере вращательного движения трех тел, представленных на рис. 1. Пусть юла (см. рис. 1а) имеет угол θ с осью z_1 и вращается вокруг своей оси z с угловой скоростью $\dot{\phi}$. В ее центре масс C приложена сила тяжести P . На юлу действует момент сил $m_O = Pa \cdot \sin \theta$, под действием которого ее ось z начнет поворачиваться вокруг точки O с угловыми скоростями $\dot{\theta}$ и $\dot{\psi}$. Вектор абсолютной угловой скорости юлы будет

$$\vec{\omega} = \vec{\phi} + \vec{\dot{\theta}} + \vec{\dot{\psi}}. \quad (2)$$

Рассматриваем осесимметричную юлу с моментом инерции J_z , скорость вращения которой $\dot{\phi}$ значительно больше скоростей поворота оси $\dot{\theta}$ и $\dot{\psi}$. Тогда ее приближенный кинетический момент $\vec{K}_{Oa} \approx \vec{K}_O \approx J_z \cdot \vec{\phi}$ будет направлен вдоль оси z (см. рис. 1а), а теорема моментов (1) запишется

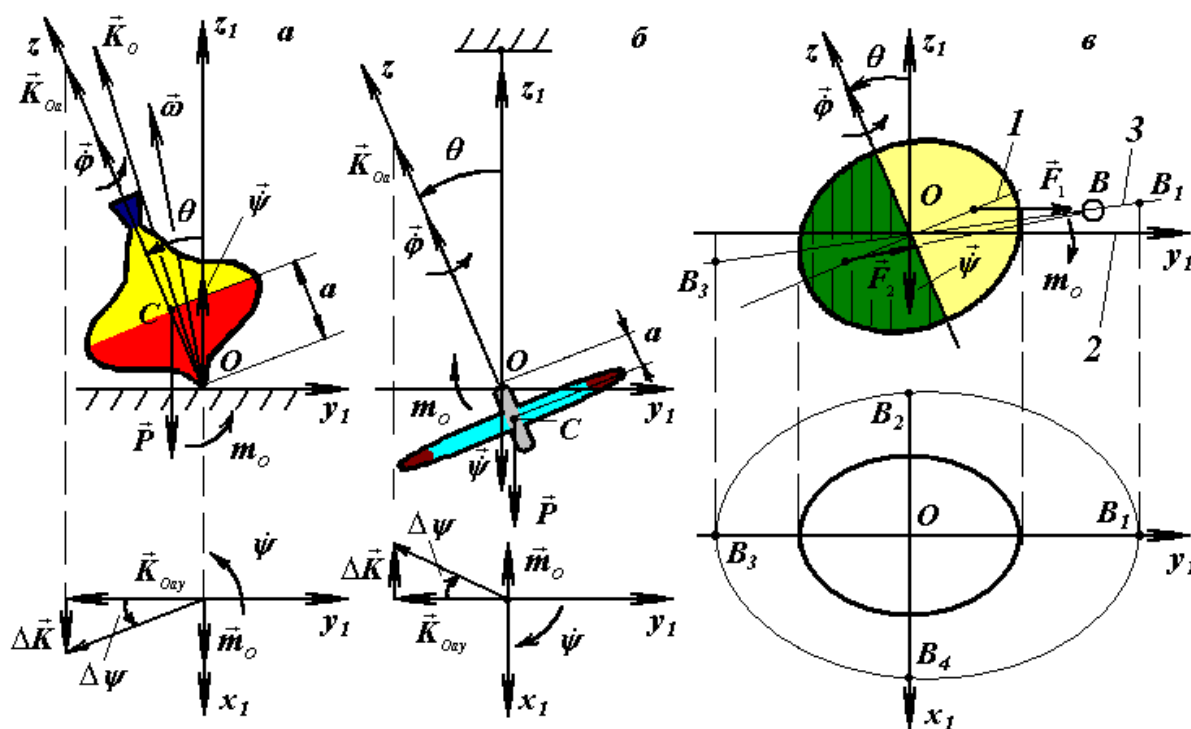


Рис. 1. Прецессия вращающихся тел: *а* – юлы на опорной поверхности x_1Oy_1 ; *б* – подвешенного в т. O колеса; *в* – свободной Земли. 1 и 2 – плоскости экватора Земли и ее орбиты; 3 – плоскость орбиты воздействующего на Землю тела B .

$$\vec{K}_{Oa} \approx \vec{m}_O. \quad (3)$$

Такой подход применяется в элементарной теории гироскопа. Так как вектор момента сил \vec{m}_O перпендикулярен \vec{K}_{Oa} , то по величине кинетический момент изменяться не будет: $K_{Oa} = J_z \cdot \dot{\phi} = const$, а его изменение $\Delta \vec{K}$ по направлению, согласно (3), определится в плоскости x_1Oy_1 вектором \vec{m}_O . Тогда за время Δt кинетический момент получит приращение $\Delta K = \dot{K}_{Oa} \cdot \Delta t = m_O \cdot \Delta t$, что приведет к его повороту вокруг оси z_1 на угол $\Delta \psi$. Выразив приращение кинетического момента ΔK через приращение угла $\Delta \psi$: $\Delta K = K_{Oay} \cdot \Delta \psi = K_{Oa} \cdot \sin \theta \cdot \Delta \psi$, получаем скорость поворота кинетического момента:

$$\dot{\psi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \psi / \Delta t = m_O / (K_{Oa} \cdot \sin \theta). \quad (4)$$

Из рис 1а видно, что при повороте \vec{K}_{Oa} , а, следовательно, и оси юлы на угол $\Delta \psi$ момент силы \vec{m}_O также повернется на такой же угол вокруг оси z_1 . Так как в новом положении силовое воздействие не изменится, то ось юлы будет непрерывно прецессировать против стрелки часов со скоростью прецессии (4). После подстановки в (4) значения момента m_O скорость прецессии запишется:

$$\dot{\psi} = Pa / (J_z \cdot \dot{\phi}). \quad (5)$$

В рассмотренном приближении скорость прецессии (5) не зависит от угла наклона оси юлы θ . Кроме того, в этом случае мы не получаем нутационных колебаний, обусловленных изменением θ .

Как видно из рис. 1б, в случае подвешенного колеса момент сил m_O направлен за стрелкой часов. Поэтому прецессия оси колеса будет происходить за стрелкой часов, а ее скорость будет также определяться выражением (5).

На рис. 1в представлена схема воздействия тела B на вращающуюся Землю. В случае центрально-симметричной Земли действие тела B на ближнюю и дальнюю от тела части Земли выразится в виде сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , равнодействующая которых пройдет через центр O . Для сплюснутой к экватору Земли сила \vec{F}_1 увеличится, а сила \vec{F}_2 уменьшится, в результате чего возникнет момент сил m_O , направленный как и на рис. 1б, по стрелке часов. Поэтому ось Земли будет прецессировать за стрелкой часов, а скорость прецессии будет описываться формулой (4).

Нами были выполнены эксперименты с юлой и велосипедным колесом, которые подтвердили эти выводы. Выше мы рассмотрели вращение тел с угловой скоростью $\dot{\phi} > 0$, т.е. против стрелки часов. При смене ее направления, меняется также направление прецессии, т.е. знак $\dot{\psi}$.

Из анализа воздействия тела на Землю (см. рис. 1в) можно установить периоды колебаний прецессии Земной оси. Максимальные моменты сил $m_{O_{\max 1}}$ тело B создает в точках B_1 и B_3 , причем одного и того же направления. При нахождении тела в плоскости экватора (точки B_2 и B_4) моменты сил равны нулю, т.е. за один оборот тела по орбите момент силы дважды изменяется от 0 до $m_{O_{\max}}$. Поэтому ось Земли будет подвержена прецессионным и нутационным колебаниям с полупериодами обращения планет, Солнца и Луны относительно подвижной плоскости экватора.

В своем орбитальном движении Земля и планеты сближаются. Если сближение произойдет в точке B_1 или B_3 , то максимальный момент возрастет до значения $m_{O_{\max 2}}$. Поэтому ось Земли будет испытывать колебания с периодами сближений Земли с планетами, особенно близкими к Земле, в точках B_1 и B_3 . Следует отметить, что с целью упрощения на рис. 1в изображены три пересекающиеся по одной линии плоскости: экватора 1, орбиты Земли 2 и орбиты тела 3. В действительности, линии пересечения плоскостей преимущественно не совпадают. Кроме того, орбиты не

круговые, а эллиптические. Эти два обстоятельства приведут к модуляции отмеченных выше периодов.

3. Дифференциальные уравнения вращательного движения

3.1. Момент количества движения Земли. При выводе уравнений вращательного движения возникают две проблемы: в зависимости от системы координат при повороте тела изменяются его моменты инерции или проекции угловой скорости. Поэтому вначале будем рассматривать в тех координатах, в которых моменты инерции не изменяются. Затем перейдем к координатам, в которых угловые скорости не зависят от поворота тела. Движение тел Солнечной системы будем рассматривать в неподвижной барицентрической системе координат x_{10}, y_{10}, z_{10} (см. рис. 2а), связанной с застабилизированной на эпоху T_0 плоскостью орбиты Земли. Ось x_{10} направлена на точку весеннего равноденствия. Пусть система $x_1y_1z_1$ с началом O в центре масс Земли, поступательно движется относительно системы $x_{10}y_{10}z_{10}$. Ось z системы $x_1y_1z_1$, связанная с вращающейся Землей, направлена вдоль вектора скорости $\vec{\varphi}$ собственного вращения Земли, а ось x в начальный момент $t=0$ находится в плоскости нулевого меридиана, т.е. проходящего через г. Гринвич. Абсолютная угловая скорость $\vec{\omega}$ вращения Земли в системе $x_1y_1z_1$ с проекциями $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ на оси вращающейся системы $x_1y_1z_1$ будет $\vec{\omega} = \vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z$.

В теореме моментов (1) кинетический момент \vec{K}_O создается всеми массами вращающейся Земли в системе координат $x_1y_1z_1$, а $\sum \vec{m}_O(\vec{F}_k)$ - моменты сил воздействия тел Солнечной системы на все массы Земли. Вначале определим производную кинетического момента, а затем сумму моментов сил.

Так как в системе $x_1y_1z_1$ Земля вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$, то любой ее элемент dM с радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ (см. рис. 2) движется со скоростью $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ и относительно центра O имеет момент количества движения $\vec{m}_O(dM\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{v}dM$. После интегрирования по всей массе Земли M кинетический момент будет:

$$\vec{K}_O = \int_M m_O(dM\vec{v}) = \int_M \vec{r} \times \vec{v}dM . \quad (6)$$

Продифференцировав \vec{K}_O по времени и подставив векторы \vec{r} , $\vec{\omega}$ и \vec{v} , после преобразования получаем производные от проекций кинетического момента на оси вращающейся системы $x_1y_1z_1$:

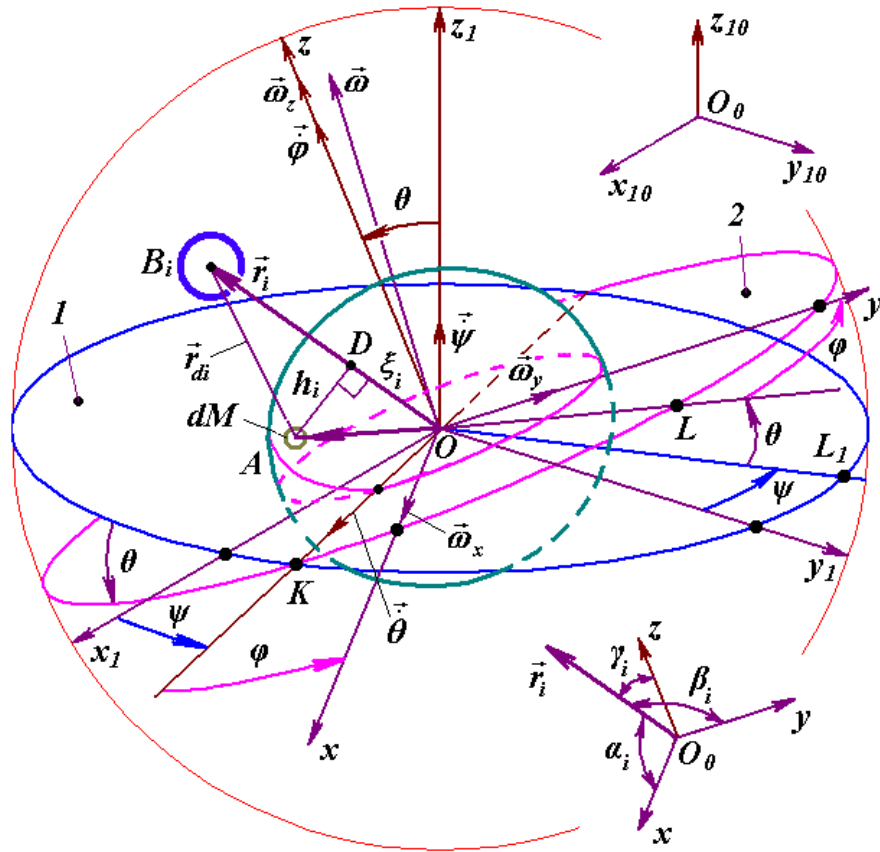


Рис. 2 Воздействие тела B_i на элемент Земли dM и системы координат: $x_{10}y_{10}z_{10}$ – неподвижная барицентрическая эклиптическая. $x_1y_1z_1$ – неврещающаяся и xzy – вращающаяся с Землей – геоцентрические. Эйлеровы углы ψ , θ и φ положения системы xzy относительно $x_1y_1z_1$. 1 – неподвижная плоскость эклиптики; 2 – подвижная плоскость экватора Земли; $r=OA$.

$$\dot{K}_{Ox} = J_x \varepsilon_x - J_{xy} (\varepsilon_y - \omega_z \omega_x) - J_{xz} (\varepsilon_z + \omega_y \omega_x) - (J_y - J_z) \omega_y \omega_z - J_{yz} (\omega_y^2 - \omega_z^2), \quad (7)$$

$$\dot{K}_{Oy} = J_y \varepsilon_y - J_{yz} (\varepsilon_z - \omega_x \omega_y) - J_{yx} (\varepsilon_x + \omega_z \omega_y) - (J_z - J_x) \omega_z \omega_x - J_{zx} (\omega_z^2 - \omega_x^2), \quad (8)$$

$$\dot{K}_{Oz} = J_z \varepsilon_z - J_{zx} (\varepsilon_x - \omega_y \omega_z) - J_{zy} (\varepsilon_y + \omega_x \omega_z) - (J_x - J_y) \omega_x \omega_y - J_{yx} (\omega_x^2 - \omega_y^2), \quad (9)$$

где ε_x , ε_y , ε_z - проекции углового ускорения Земли в системе $x_1y_1z_1$ на оси вращающейся системы xzy ;

$J_x = \int_M (y^2 + z^2) dM$, $J_y = \int_M (z^2 + x^2) dM$, $J_z = \int_M (x^2 + y^2) dM$ - осевые моменты инерции

Земли, а $J_{xy} = \int_M xy dM$, $J_{xz} = \int_M xz dM$, $J_{yz} = \int_M yz dM$ - ее центробежные моменты инерции.

Так как система xzy связана с вращающейся Землей, то моменты инерции от вращения Земли не зависят и остаются постоянными. В настоящее время знания о распределении плотности Земли недостаточны для определения моментов инерции.

Как в дальнейшем будет показано, из наблюдаемой скорости прецессии можно определить только отношение между двумя моментами J_z и J_x , но не их абсолютные значения. В последние годы рассматриваются модели трехосной Земли, в которой третий момент инерции J_y оценивается по распределению потенциала силы тяжести на поверхность Земли. Однако, как будет показано далее, этот метод также не позволяет определить точное значение моментов инерции. Здесь же отметим, что в случае трехосной Земли из-за несимметричности распределения потенциала необходимо, как видно из (7) – (9), вводить в уравнения слагаемые с центробежными моментами инерции. Традиционно в выводах слагаемые с этими моментами опускают, а слагаемые с третьим моментом J_y оставляют. Однако, в конечных выражениях J_y приравнивают J_x . Поэтому, чтобы не загромождать статью неиспользуемыми слагаемыми, будем рассматривать осесимметричную Землю: $J_y=J_x$, и $J_{xy}=J_{xz}=J_{yz}=0$. Тогда производные кинетического момента (7) – (9) запишутся:

$$\dot{K}_{Ox} = J_x \varepsilon_x - (J_y - J_z) \omega_y \omega_z, \quad \dot{K}_{Oy} = J_y \varepsilon_y - (J_z - J_x) \omega_z \omega_x, \quad \dot{K}_{Oz} = J_z \varepsilon_z. \quad (10)$$

Для осей с нулевыми центробежными моментами инерции моменты J_x , J_y , J_z называются главными.

3.2. Кинетический момент и теорема моментов в эйлеровых переменных.

Положение вращающейся системы координат xuz (см. рис. 2) относительно невращающейся системы координат $x_1y_1z_1$ определяется углами Эйлера: φ , ψ , θ , где угол прецессии ψ определяет положение линии узлов OK , по которой подвижный экватор пересекает неподвижную эклиптику; угол нутации θ определяет наклон между экватором и эклиптикой; угол φ - угол собственного вращения Земли вокруг оси z . На рис. 2 показаны направления углов, принятые в теоретической механике. В астрономии (а) принятые углы в направлении в соответствии с наблюдениями будут: $\psi_a = 2\pi - \psi$, $\varphi_a = \varphi$ и $\theta_a = -\theta$. Направления угловых скоростей $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ показаны на рис. 2, т.е. со стороны этих векторов поворот углов ψ , θ и φ виден против часовой стрелки. Из рис. 2 видно, что эйлеровые скорости не изменяются при повороте Земли. Поэтому все переменные и уравнения выразим в эйлеровых переменных.

Так как вектор абсолютной угловой скорости можно представить в виде (2), то в проекциях на оси x , y , z можем записать:

$$\omega_x = \dot{\varphi}_x + \dot{\psi}_x + \dot{\theta}_x, \quad \omega_y = \dot{\varphi}_y + \dot{\psi}_y + \dot{\theta}_y, \quad \omega_z = \dot{\varphi}_z + \dot{\psi}_z + \dot{\theta}_z, \quad (11)$$

где $\dot{\varphi}_x$, $\dot{\psi}_x$, $\dot{\theta}_x$ и т.д. - проекции эйлеровых угловых скоростей на оси координат xuz . После вычисления выражений (11) с помощью рис. 2 получаем известные уравнения Эйлера:

$$\omega_x = \dot{\psi} \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi + \dot{\theta} \cdot \cos \varphi, \quad \omega_y = \dot{\psi} \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi - \dot{\theta} \cdot \sin \varphi, \quad \omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cdot \cos \theta. \quad (12)$$

После дифференцирования (12) получаем угловые ускорения в эйлеровых переменных:

$$\varepsilon_x = \ddot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi + \ddot{\theta} \cos \varphi - \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad (13)$$

$$\varepsilon_y = \ddot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi - \ddot{\theta} \sin \varphi - \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad (14)$$

$$\varepsilon_z = \ddot{\varphi} + \ddot{\psi} \cdot \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \cdot \sin \theta. \quad (15)$$

После подстановки угловых скоростей (12) и угловых ускорений (13) – (15) в (10) проекции производных кинетического момента в зависимости от эйлеровых углов будут:

$$\begin{aligned} \dot{K}_{Ox} = & J_x \ddot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + J_x \ddot{\theta} \cos \varphi + (2J_x - J_z) \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + J_z \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi - \\ & - J_z \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi + (J_z - J_x) \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{K}_{Oy} = & J_y \ddot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - J_y \ddot{\theta} \sin \varphi + (2J_x - J_z) \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi - J_z \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi - \\ & - J_z \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \varphi - (J_z - J_x) \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\dot{K}_{Oz} = J_z \ddot{\varphi} + J_z \ddot{\psi} \cos \theta - J_z \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \quad (18)$$

Теперь преобразуем теорему моментов (1) к эйлеровым углам. Моменты сил можно определять непосредственно через силы воздействия тел на элемент массы Земли. Однако при разложении их в дальнейшем в ряды они сводятся к другим слагаемым. Чтобы не терять преемственность с предшествующими работами, определяем здесь моменты через силовую функцию традиционным методом. Как известно из теоремы теоретической механики, моменты сил в направлении осей равны производным от силовой функции по углу поворота относительно этой оси. Поэтому, согласно рис. 2, в системе координат OKz_1z с осями, расположенными по угловым скоростям $\vec{\psi}$, $\vec{\theta}$ и $\vec{\varphi}$ моменты запишутся: $m_{O\psi} = m_{Oz_1} = \partial U / \partial \psi$, $m_{O\theta} = m_{OK} = \partial U / \partial \theta$, $m_{O\varphi} = m_{Oz} = \partial U / \partial \varphi$. С учетом этих моментов спроектируем правую и левую часть теоремы моментов (1) на оси системы координат OKz_1z :

$$\dot{K}_{O\psi} = \partial U / \partial \psi, \quad \dot{K}_{O\theta} = \partial U / \partial \theta, \quad \dot{K}_{Oz} = \partial U / \partial \varphi. \quad (19)$$

Выразим производные кинетического момента в уравнениях (19) через производные \dot{K}_{Ox} , \dot{K}_{Oy} и \dot{K}_{Oz} в декартовых координатах $Oxyz$. Проведем в плоскости xOy (см. рис. 2)

ось OL перпендикулярно оси OK . Спроектируем производные \dot{K}_x , \dot{K}_y и \dot{K}_z (на рис. 2а не показаны, но идентичны проекциям ω_x , ω_y и ω_z) на оси системы $OLKz_1$:

$$\begin{aligned}\dot{K}_L &= \dot{K}_{Ox} \sin \varphi + \dot{K}_{Oy} \cos \varphi; & \dot{K}_K &= \dot{K}_{Ox} \cos \varphi - \dot{K}_{Oy} \sin \varphi; \\ \dot{K}_{z_1} &= \dot{K}_{Oz} \cos \theta + \dot{K}_L \sin \theta,\end{aligned}$$

откуда получаем:

$$\dot{K}_{O\dot{\theta}} = \dot{K}_K = \dot{K}_{Ox} \cos \varphi - \dot{K}_{Oy} \sin \varphi; \quad (20)$$

$$\dot{K}_{O\dot{\psi}} = \dot{K}_{z_1} = \dot{K}_{Ox} \sin \varphi \cdot \sin \theta + \dot{K}_{Oy} \cos \varphi \cdot \sin \theta + \dot{K}_{Oz} \cos \theta. \quad (21)$$

Далее декартовые проекции (16) – (18) подставляются в выражения (20) – (21), а последние – в теорему моментов (19). Затем, выразив вторые производные, получаем дифференциальные уравнения вращения Земли в эйлеровых переменных:

$$\ddot{\psi} = \left(\frac{\partial U}{\partial \psi} - (2J_x - J_z) \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + J_z \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \theta \right) \cdot \frac{1}{J_x \sin^2 \theta} - \frac{\dot{K}_{Oz}}{J_x} \cos \theta; \quad (22)$$

$$\ddot{\theta} = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} + (J_x - J_z) \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - J_z \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \theta \right) \cdot \frac{1}{J_x}. \quad (23)$$

3.3. Силовая функция в декартовых координатах. Определим силовую функцию воздействия тела B_i массой M_i (см. рис. 2) на Землю традиционным способом представленным, например, в книге *Смарта У.М.* (1965). Обозначим через x_i, y_i, z_i его координаты во вращающейся системе xuz . На элемент Земли массой dM и координатами x, y, z силовая функция воздействия этого тела будет $dU = \frac{GM_i dM}{r_{di}}$, где

G - гравитационная постоянная, а $r_{di} = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}$ - расстояние от элемента dM до тела M_i . Просуммировав по всей массе Земли M и по всем n телам, получаем:

$$U = \sum_{i=1}^n GM_i \int_M \frac{dM}{r_{di}}, \quad (24)$$

где $dM = \rho dx dy dz$; $\rho = \rho(x, y, z)$ - плотность Земли.

Так как распределение плотности Земли $\rho(x, y, z)$ в настоящее время известно только качественно, точно проинтегрировать выражение (24) не представляется возможным. Поэтому прямое определение силовой функции воздействия внешних тел на Землю, как механическую систему, невозможно. Все дальнейшие решения заключаются в упрощении выражения (24) и в определении силовой функции в

зависимости от моментов инерции Земли J_x, J_y, J_z , соотношения между которыми в последующем определяются по наблюдаемой скорости прецессии Земли.

С учетом того, что расстояние r_i до тела M_i значительно превосходит расстояние r до элемента dM , упростим выражение (24). Обозначим отрезки $OD=\xi_i$ и $AD=h_i$. Применив теорему Пифагора для катета h_i для двух прямоугольных треугольников $\triangle ODA$ и $\triangle ADB$, получаем:

$$r_{di} = \sqrt{r^2 - \xi_i^2 + (r_i - \xi_i)^2} = r_i \sqrt{1 + b_i}, \quad (25)$$

$$\text{где } b_i = \frac{-2r_i\xi_i + r^2}{r_i^2}.$$

Так как $|b_i| < 1$, то подынтегральную функцию $\frac{1}{r_{di}}$ в (24) разложим в ряд Тейлора по степеням b . Учитывая члены не выше четвертого порядка по отношению к $\sqrt{|b_i|}$, силовую функцию получим в виде:

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{GM_i}{r_i} \int_M \left[1 + \frac{\xi_i}{r_i} + \frac{3\xi_i^2 - r^2}{2r_i^2} + \frac{5\xi_i^3 - 3\xi_i r^2}{2r_i^3} + \frac{35\xi_i^4 - 30\xi_i^2 r^2 + 3r^4}{8r_i^4} \right] dM. \quad (26)$$

Отрезок ξ_i (см. рис. 2) выразим через координаты x, y, z элемента dM с помощью направляющих косинусов углов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$:

$$\xi_i = \hat{l}_i x + \hat{m}_i y + \hat{n}_i z, \quad (27)$$

где

$$\hat{l}_i = \cos \alpha_i = x_i / r_i, \quad \hat{m}_i = \cos \beta_i = y_i / r_i, \quad \hat{n}_i = \cos \gamma_i = z_i / r_i, \quad (28)$$

По определению, оси тела, находящиеся на пересечении плоскостей симметрии, являются главными осями инерции. Оси вращающейся системы $Oxyz$ направлены по главным осям инерции Земли. Поэтому интегралы типа $\int_M x^k f(x, y, z) dM$, где k – нечетное целое число, а $f(x, y, z)$ – четная функция координат, будут состоять из двух равных по величине и противоположных по знаку частей на интервалах $x < 0$ и $x > 0$, т.е. в сумме эти интервалы будут равны нулю. Так как согласно (27) переменная ξ_i пропорциональна координатам x, y, z , то интегралы в (26), зависящие от ξ и ξ^3 будут равны нулю. Следует отметить, что в случае неосесимметричной Земли и отсутствия симметрии по одной из плоскостей zOx или zOy , эти интегралы необходимо учитывать, т.е. в силовую функцию, как и в производные кинетического момента (7)-(9), войдут центробежные моменты инерции.

Интеграл от первого слагаемого в (26) представляет массу Земли $M = \int dM$.

Числитель третьего слагаемого с учетом (27) можно записать так:

$$3\xi_i^2 - r^2 = 3(x^2 - \hat{m}_i^2 x^2 - \hat{n}_i^2 x^2 + \hat{m}_i^2 y^2 + \hat{n}_i^2 z^2) - x^2 - y^2 - z^2 + 2(\hat{l}_i \hat{m}_i xy + \hat{l}_i \hat{n}_i xz + \hat{n}_i \hat{m}_i yz). \quad (29)$$

Так как $\hat{l}_i^2 + \hat{m}_i^2 + \hat{n}_i^2 = 1$, то в (29) учтено, что $\hat{l}_i^2 = 1 - \hat{m}_i^2 - \hat{n}_i^2$. Слагаемые с квадратами координат в (29) при интегрировании дают моменты инерции, а последнее – центробежные моменты типа $J_{xy} = \int xy dM$, которые для Земли с главными осями инерции вдоль x, y, z равны нулю. После подстановки (29) в (26) и интегрирования получаем без учета последнего пятого слагаемого:

$$U = \sum_{i=1}^n GM_i \left(\frac{M}{r_i} + \frac{J_y + J_z - 2J_x + 3\hat{m}^2(J_x - J_y) - 3\hat{n}^2(J_z - J_x)}{2r_i^3} \right). \quad (30)$$

В рассматриваемом случае воздействие на вращательное движение Земли определяется третьим и пятым слагаемыми в (26), так как они зависят от эйлеровых углов. Разделив пятое слагаемое на третье, найдем, что порядок их отношения равен $\frac{R_E^2}{r_i^2}$, где R_E – радиус Земли. Наибольшее значение это отношение составляет для Луны,

и оно равно $3 \cdot 10^{-4}$. С такой относительной погрешностью рассматривается в дальнейшем воздействие тел на вращение Земли. Поэтому дополнительные эффекты следует учитывать, если относительная величина их воздействия имеет порядок $3 \cdot 10^{-4}$ и более.

После подстановки направляющих косинусов \hat{m} и \hat{n} согласно (28) силовая функция (30) запишется:

$$U = \sum_{i=1}^n GM_i \left(\frac{M}{r_i} + \frac{J_y + J_z - 2J_x}{2r_i^3} + 3 \cdot \frac{(J_x - J_y)y_i^2 - (J_z - J_x)z_i^2}{2r_i^5} \right). \quad (31)$$

где y_i и z_i – координаты тела M_i во вращающейся системе координат xyz .

3.4. Моменты сил в эйлеровых координатах. Выразим y_i и z_i через координаты x_{li}, y_{li}, z_{li} координатной системы $x_l y_l z_l$ (см. рис. 2). В плоскости $x_l O y_l$ перпендикулярно OK проведем линию OL_l . На эту линию координаты тела B_i дадут проекции $OL_{li} = -x_{li} \sin \psi + y_{li} \cos \psi$, тогда координата z_i тела B_i запишется:

$$z_i = z_{li} \cos \theta - OL_{li} \sin \theta = x_{li} \sin \theta \sin \psi - y_{li} \sin \theta \cos \psi + z_{li} \cos \theta. \quad (32)$$

Аналогично, определяя проекции координат x_{li} и y_{li} на оси OK и OL , находим координату y_i :

$$y_i = -x_{li} (\cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \theta \cos \varphi) + y_{li} (\cos \psi \cos \theta \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi) + z_{li} \sin \theta \cos \varphi. \quad (33)$$

В дальнейшем не будем приводить громоздких выражений для неосесимметричной Земли. При необходимости они могут быть получены в нижеприлагаемой последовательности с использованием выражения (33). Для осесимметричной Земли после подстановки (32) в (31), с учетом $J_y = J_x$, силовая функция примет вид:

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{3GM_i}{2r_i^5} [-(J_z - J_x)(x_{li} \sin \theta \sin \psi - y_{li} \sin \theta \cos \psi + z_{li} \cos \theta)^2] + \sum_{i=1}^n \frac{GM_i}{r_i} [M + \frac{J_z - J_x}{2r_i^2}]. \quad (34)$$

После дифференцирования (34) по эйлеровым углам φ , ψ , θ и приведения получаем моменты сил:

$$m_{Oz} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0; \quad (35)$$

$$m_{Oz1} = \frac{\partial U}{\partial \psi} = - \sum_{i=1}^n \frac{3GM_i}{r_i^5} (J_z - J_x) [\sin^2 \theta \sin \psi \cos \psi (x_{li}^2 - y_{li}^2) - x_{li} y_{li} \sin^2 \theta \cos(2\psi) + z_{li} \sin \theta \cos \theta \cdot (x_{li} \cos \psi + y_{li} \sin \psi)]; \quad (36)$$

$$m_{OK} = \frac{\partial U}{\partial \theta} = - \sum_{i=1}^n \frac{3GM_i}{2r_i^5} (J_z - J_x) [\sin(2\theta)(x_{li}^2 \sin^2 \psi + y_{li}^2 \cos^2 \psi - z_{li}^2 - x_{li} y_{li} \sin(2\psi)) + 2z_{li} \cos(2\theta)(x_{li} \sin \psi - y_{li} \cos \psi)]. \quad (37)$$

3.5. Дифференциальные уравнения. Теорема моментов (1) в проекции на ось z вращающейся системы xuz , согласно (19), имеет вид: $\dot{K}_{Oz} = \partial U / \partial \varphi$. При выводе уравнений мы считали Землю неизменяемой: $J_z = const$. Момент инерции осесимметричной Земли J_z может изменяться за счет перераспределения водной оболочки, таяния ледников, перемещения континентов и т.п. Чтобы оценить влияние этих факторов, введем $J_z \neq const$. Так как, согласно (35) $\partial U / \partial \varphi = 0$, то $\dot{K}_{Oz} = 0$ и с учетом (10) при $J_z = J_{z0}$ получаем $J_z \varepsilon_z = 0$. После интегрирования имеем $J_z \omega_z = const = J_{z0} \omega_{z0}$, что можно записать в виде:

$$\omega_z = \omega_{z0} J_{z0} / J_z, \quad (38)$$

где J_{z0} и ω_{z0} - момент инерции Земли и ее проекция абсолютной угловой скорости в начальную эпоху. Так как согласно (12) $\omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cdot \cos \theta$, то, с учетом (38), получаем угловую скорость собственного вращения Земли:

$$\dot{\phi} = \omega_{z0} J_{z0} / J_z - \dot{\psi} \cdot \cos \theta. \quad (39)$$

Из выражения (39) следует, что собственная скорость вращения Земли $\dot{\phi}$, которая не связана с движением вектора угловой скорости $\vec{\omega}$, может изменяться за счет перераспределения момента инерции Земли и изменения скорости прецессии $\dot{\psi}$. Выражение (39) для угловой скорости собственного вращения Земли можно использовать для оценки влияния перемещения частей Земли на ее угловую скорость вращения.

Обозначив проекцию угловой скорости Земли $\omega_z = \omega_{z0} = \omega_E = const$, выражение (39) для неизменяемой Земли $J_z = J_{z0} = const$ перепишем в виде:

$$\dot{\phi} = \omega_E - \dot{\psi} \cdot \cos \theta. \quad (40)$$

После подстановки $\dot{\phi}$, $\dot{K}_{Oz} = 0$ и производных от силовой функции (36) – (37) в уравнения (22)–(23) получаем уравнения вращательного движения Земли в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} = & -2\dot{\psi}\dot{\theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \dot{\theta} \frac{J_z \omega_E}{J_x \sin \theta} - \sum_{i=1}^n \frac{3GM_i E_d J_z}{r_i^5 J_x} \left\{ 0.5 \sin(2\psi)(x_{1i}^2 - y_{1i}^2) - \right. \\ & \left. - x_{1i} y_{1i} \cdot \cos(2\psi) + z_{1i} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (x_{1i} \cos \psi + y_{1i} \sin \psi) \right\}; \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = & 0.5\dot{\psi}^2 \sin(2\theta) - \frac{J_z \omega_E \dot{\psi} \sin \theta}{J_x} - \sum_{i=1}^n \frac{3GM_i \cdot E_d J_z}{2r_i^5 J_x} \left\{ \sin(2\theta) [x_{1i}^2 \sin^2 \psi + \right. \\ & \left. + y_{1i}^2 \cos^2 \psi - z_{1i}^2 - x_{1i} y_{1i} \sin(2\psi)] + 2z_{1i} (x_{1i} \sin \psi - y_{1i} \cos \psi) \cos(2\theta) \right\}, \end{aligned} \quad (42)$$

где $E_d = (J_z - J_x) / J_z$ - динамическая эллиптичность Земли; ω_E - проекция абсолютной скорости вращения Земли на ее ось z .

Так как $\omega_E = const$, а $\dot{\phi}$ изменяется согласно (40), то значение ω_E может быть получено в результате осреднения измеренных величин $\dot{\phi}$ и $\dot{\psi} \cos \theta$, т.е.

$$\omega_E = \overline{\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta}.$$

4. Начальные условия и динамическая эллиптичность Земли

Мы исследуем воздействие отдельных тел на Землю, поэтому при интегрировании уравнений (41) – (42) необходимо задавать начальные скорости изменения ψ и θ , которые обусловлены воздействием каждого тела. При произвольном задании начальных скоростей $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$ начнется переходный процесс, который может перейти в установившийся режим через длительное время, либо совсем не установиться. Нас интересует поведение оси Земли в установившемся режиме.

Будем считать, что вторые производные $\ddot{\psi}$ и $\ddot{\theta}$ в уравнениях (41) и (42) по сравнению с другими слагаемыми в установившемся режиме малы, т.е. $\ddot{\psi} \approx \ddot{\theta} \approx 0$. Так как ω_E на 6 порядков превышает производные $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$, то, пренебрегая слагаемыми с $\dot{\psi} \cdot \dot{\theta}$ и $\dot{\psi}^2$ в уравнениях (41) – (42), получаем:

$$\dot{\theta} \approx -\sum_{i=1}^n \frac{3GM_i E_d \sin \theta}{2\omega_E r_i^5} [\sin(2\psi)(x_{li}^2 - y_{li}^2) - 2x_{li}y_{li} \cos(2\psi) + 2z_{li} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (x_{li} \cos \psi + y_{li} \sin \psi)]; \quad (43)$$

$$\dot{\psi} \approx -\sum_{i=1}^n \frac{3GM_i E_d}{2\omega_E r_i^5 \sin \theta} \left\{ \sin(2\theta) [x_{li}^2 \sin^2 \psi + y_{li}^2 \cos^2 \psi - z_{li}^2 - x_{li}y_{li} \sin(2\psi)] + 2z_{li} (x_{li} \sin \psi - y_{li} \cos \psi) \cdot \cos(2\theta) \right\}. \quad (44)$$

Уравнения (43) – (44) идентичны уравнениям Пуассона, приближенные аналитические решения которых применяются в астрономических теориях изменения климата. Из этих уравнений будем определять начальные значения производных $\dot{\theta}_0$ и $\dot{\psi}_0$ задавая координаты x_{li} , y_{li} и z_{li} воздействующих на Землю тел в начальную эпоху $t=0$. Начальное значение углов ψ и θ будем задавать: $\psi_0 = 0$ и $\theta_0 = \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = 0.4093197563$ – наклон экватора к эклиптике в начальную эпоху.

В выражения (43) – (44) входит неизвестный параметр $E_d = (J_z - J_x) / J_z$, определяющий соотношение между моментами инерции Земли. Знания о распределении плотности Земли в настоящее время недостаточны, чтобы можно было рассчитать моменты инерции J_z и J_x с необходимой точностью. Поэтому динамическую эллиптичность Земли E_d определяют сравнением рассчитанной скорости прецессии с наблюдаемой. Согласно *Спр. рук.* (1976) (см. также *Ньюкомб С.* (1895)), прецессия оси Земли относительно неподвижной эклиптики происходит по стрелке часов и за тропический год составляет

$$p_1 = 50''.37084 + 0''.00493T, \quad (45)$$

где T - отсчитывается в тропических столетиях от фундаментальной эпохи 1900.0 с $JD = 2415020.3134$. Это составит в начальную эпоху $p_{10} = 50''.3733046'' / yr$. Выражением (45) описывается наблюдаемая средняя скорость прецессии. Теперь определим ее расчетное значение согласно (44). Если эпоха начала отсчёта совпадает с эпохой системы отсчёта, то $\theta = \varepsilon_0$ и $\psi = 0$, тогда выражение (44) запишется:

$$\dot{\psi}_0 = -E_d \sum_{i=1}^n \frac{3GM_i}{\omega_E r_i^3} [\cos \varepsilon_0 (\bar{y}_{li}^2 - \bar{z}_{li}^2) - \bar{z}_{li} \bar{y}_{li} \cos(2\varepsilon_0) / \sin \varepsilon_0], \quad (46)$$

где $\bar{x}_{li} = x_{li} / r_i$, $\bar{y}_{li} = y_{li} / r_i$, $\bar{z}_{li} = z_{li} / r_i$ – безразмерные координаты воздействующих тел.

Если эпоха начала счёта не совпадает с эпохой системы отсчёта, то $\theta \neq \varepsilon_0$, и $\psi \neq 0$.

В процессе циклического относительного движения тел вокруг Земли все координаты изменяются аналогично, например, $-\bar{x}_{1i\max} \leq \bar{x}_{1i} \leq \bar{x}_{1i\max}$. При этом $\bar{x}_{1i\max} = \bar{y}_{1i\max} \approx 1$, а $\bar{z}_{1i\max} = \sin i_i$, где i_i - угол наклона плоскости орбиты тела к плоскости экватора. Так как наибольший угол наклона $i_i=0.7$ для Плутона, то для всех планет $\bar{z}_{1i\max} < 1$. Второе слагаемое в квадратной скобке будет изменяться в пределах $\pm \sin i_i \cos(2\varepsilon_0)/\sin \varepsilon_0$ и при осреднении по времени будет равно нулю. Максимальное значение сомножителя первого слагаемого $(\bar{y}_{1i}^2 - \bar{z}_{1i}^2)$ равно 1, а минимальное - нулю, поэтому при осреднении по времени получим 0.5. Тогда вся квадратная скобка при осреднении будет равна $0.5 \cos \varepsilon_0$.

Значение геоцентрического расстояния до планет изменяется в пределах $|R_{pi} - R_{pE}| \leq r_i \leq R_{ai} + R_{aE}$, где R_{pi} , R_{pE} и R_{ai} , R_{aE} - перигелии и афелии планет и Земли, соответственно. Тогда среднее геоцентрическое расстояние до планет будет

$$r_{im} = (R_{ai} + R_{aE} + |R_{pi} - R_{pE}|) \cdot 0.5, \quad (47)$$

которое для внутренних планет равно $a_E + a_i e_i$, а для внешних - $a_i + a_E e_E$, где a_i и a_E - большие полуоси гелиоцентрических орбит планет и Земли; e_i и e_E - эксцентриситеты планет и Земли. Для Солнца и Луны средние геоцентрические расстояния равны, соответственно:

$$r_{Sm} = a_E; \quad r_{Mm} = a_M, \quad (48)$$

где a_M - средняя полуось орбиты Луны. Тогда среднее значение скорости прецессии согласно (46) будет:

$$\dot{\psi}_{0m} = -E_d \sum_{i=1}^n \frac{1.5GM_i \cos \varepsilon_0}{\omega_E r_{im}^3} \quad (49)$$

Отрицательный знак $\dot{\psi}_{0m}$ свидетельствует о том, что прецессия происходит за стрелкой часов. Из условия, что рассчитанная средняя скорость прецессии равна наблюдаемой: $\dot{\psi}_{0m} = -p_{10} / (Yr_{ir} \cdot rd)$, где $Yr_{ir} = 365.24219879 \cdot 24 \cdot 3600$ сек. - длительность тропического года в сек. и $rd = 180 \cdot 3600 / \pi$, находим динамическую эллиптичность:

$$E_{da} = p_{10} \left(Yr_{ir} \cdot rd \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1.5GM_i \cos \varepsilon_0}{\omega_E r_{im}^3} \right), \quad (50)$$

где индексом a в E_{da} мы отметили приближенный способ вычисления этой величины.

При выводе (49) и (50) мы достаточно приближенно осредняли выражение (46) по времени, например, среднее значение r_i^3 и r_i могут существенно различаться. Если бы были известны законы движения планет $x_{Ii}(t)$, $y_{Ii}(t)$, $z_{Ii}(t)$, то интегрированием по времени выражения (46) на интервале от 0 до T можно было бы найти среднее значение $\dot{\psi}_0$ на этом интервале. Однако, само выражение (46) является приближенным, т.к. получено из уравнений движения при пренебрежении $\ddot{\psi}$ и $\dot{\psi}\dot{\theta}$. Кроме того, как видно из (45), данные наблюдения имеют с некоторый линейный тренд, а не одно значение. Поэтому выражение (50) представляет динамическую эллиптичность Земли приближенно. Более точно ее значение будет получено после численного решения уравнений вращательного движения Земли (41) – (42) и сопоставления осредненной от короткопериодических колебаний динамики $\dot{\psi}$ за время известных наблюдений с наблюдаемой динамикой средней прецессии за этот период.

Величина динамической эллиптичности, рассчитанная согласно (50) по используемым нами данным, равна $E_{d0} = 3.324257 \cdot 10^{-3}$. Традиционно динамическую эллиптичность рассчитывают с учетом только Луны и Солнца. В этом случае по нашим данным $E_{dSM1} = 3.324268 \cdot 10^{-3}$, т.е. отличается на единицу шестого разряда. Как видно из (50), динамическая эллиптичность зависит от осредненного расстояния r_{im}^3 , поэтому при небольших его изменениях значение E_{da} изменяется существенно. Например, при значении этого расстояния для Луны $r_{im} = a_M = 3.838 \cdot 10^8$ м, полученного нами при начальных условиях в эпоху 30.12.49 из эфемерид *DE406*, динамическая эллиптичность $E_{dSM2} = 3.244770 \cdot 10^{-3}$. Для сравнения приведем эллиптичности, используемые разными авторами:

Бретаньон и др. (2001) – $E_{dB} = 3.2737671 \cdot 10^{-3}$, *Русбек и Дехант* (1998) $E_d = 3.273767 \cdot 10^{-3}$; *Ляскар и др.* (1993) $E_d = 3.28005 \cdot 10^{-3}$ при использованных $a_M = 384747980$ м и $p_{10} = 50.290966''/yr$.

Как видим, в зависимости от принятых данных в выражении (50) значения E_d изменяются во второй значащей цифре. Значение динамической эллиптичности с учетом принятых нами данных обозначено как E_{d0} , а по данным *Симона и др.* (1994) – как E_{dS} . В табл. 1 приведены рассчитанные согласно (49) средние скорости прецессии $\dot{\psi}_{0m}$ оси Земли при воздействии на нее Солнца, планет и Луны и при $E_d = E_{dS}$. Наибольшую скорость прецессии вызывает Луна. Воздействие Солнца в два раза меньше, а из планет наибольшее воздействие оказывают Венера и Юпитер. Скорость

прецессии $|\dot{\psi}_{0m}|$ при воздействии всех тел, как видно из табл. 1, отличается от наблюдаемой величины p_{10} на 1.5%. Однако, при использовании E_{d0} отличие уменьшается до 0.002%.

При принятой динамической эллиптичности E_{dS} и $\psi_0 = 0$, $\theta_0 = \varepsilon_0$ начальные скорости $\dot{\theta}_0$ и $\dot{\psi}_0$, при воздействии отдельных тел и всех вместе, рассчитываются согласно (43) и (44). Они представлены в табл. 1. Необходимо иметь ввиду, что выражения (43) и (44) представляют приближенно законы изменения производных $\dot{\theta}_0$ и $\dot{\psi}_0$. Точное значение их нужно брать из наблюдений. При воздействии отдельных тел таких наблюдений нет. А при одновременном воздействии всех тел на Землю наблюдения имеются. Однако, в силу приближенности (43) – (44) суммарные производные $\dot{\psi}_0$ и $\dot{\theta}_0$ будут отличаться от наблюдаемых.

Таблица 1. Средняя скорость прецессии $\dot{\psi}_{0m}$ оси Земли и начальные скорости $\dot{\psi}_0$ и $\dot{\theta}_0$ при одиночном воздействии тел по результатам расчетов согласно (49) и (43)-(44), соответственно. Расчеты выполнены при $E_{dS}=3.2737752 \cdot 10^{-3}$; $p_{10}=2.4422 \cdot 10^{-2}$ рад/ст; $\psi_0 = 0$; $\theta_0 = \varepsilon_0$.

№ п/п	Тела	$\dot{\psi}_{0m}$	$\dot{\psi}_0$	$\dot{\theta}_0$
		рад/ст		
1	Солнце	$-7.73095 \cdot 10^{-3}$	$-1.20483 \cdot 10^{-6}$	$-7.09773 \cdot 10^{-8}$
2	Меркурий	$-1.02693 \cdot 10^{-9}$	$1.42035 \cdot 10^{-10}$	$2.95503 \cdot 10^{-11}$
3	Венера	$-1.86489 \cdot 10^{-8}$	$-7.17466 \cdot 10^{-9}$	$-2.99417 \cdot 10^{-9}$
4	Марс	$-6.82598 \cdot 10^{-10}$	$-8.87394 \cdot 10^{-12}$	$1.26014 \cdot 10^{-10}$
5	Юпитер	$-5.19060 \cdot 10^{-8}$	$1.58365 \cdot 10^{-9}$	$4.60379 \cdot 10^{-10}$
6	Сатурн	$-2.53056 \cdot 10^{-9}$	$1.06473 \cdot 10^{-10}$	$2.27373 \cdot 10^{-10}$
7	Уран	$-4.74989 \cdot 10^{-11}$	$1.45508 \cdot 10^{-12}$	$2.78046 \cdot 10^{-14}$
8	Нептун	$-1.46677 \cdot 10^{-11}$	$-6.38274 \cdot 10^{-13}$	$8.18066 \cdot 10^{-13}$
9	Плутон	$-6.92755 \cdot 10^{-14}$	$4.37046 \cdot 10^{-13}$	$1.91721 \cdot 10^{-14}$
10	Луна	-0.01632	–	–
	Все тела	$-2.4051 \cdot 10^{-2}$	–	–

5. Алгоритм решения

В уравнениях (41) – (42) координаты x_{1i} , y_{1i} , z_{1i} тел M_i , действующих на Землю, приведены в неподвижной геоцентрической эклиптической системе координат (см. рис. 2). В результате численного решения задачи взаимодействия планет, Солнца и Луны мы получили изменения параметров их орбит i , φ_Ω , φ_p , R_p , e на интервале до 100 млн. лет (Смутьский И.И. (2005)). По этим решениям сохранены положения тел с интервалом 10 тыс. лет. Для интегрирования уравнений вращательного движения (41) – (42) нужны положения тел в произвольный момент времени.

Обычно при решении уравнений вращательного движения положения тел задают на основе теории вековых возмущений. Бретаньон и др. при численном интегрировании этих уравнений на интервале 1968-2023 гг. использовали эфемериды DE403 (см. Бретаньон П. и др. (2001)). Для интегрирования за более длительные периоды эти методы не пригодны. Поэтому для расчета законов движения тел $x_{1i}(t)$, $y_{1i}(t)$, $z_{1i}(t)$ нами был разработан следующий алгоритм. Координаты тел определяются на основании наших решений о движении тел Солнечной системы в неподвижной барицентрической экваториальной системе координат. С помощью параметров i , φ_Ω , φ_p , R_p , e декартовы координаты в момент t пересчитываются в полярные r_i и φ_i в плоскости орбиты. Для определения полярных координат тела в новый момент времени $t_1 = t + \Delta t$ используются зависимости для эллиптического движения, которые приведены в наших работах (Смутьский И.И. (1999) и (2003)): $t = t(r)$ – закон движения в неявном виде и $r(\varphi)$ – уравнение траектории. Полярный радиус тела r_1 в новый момент времени t_1 прогнозируется по формуле Тейлора второго порядка, проверяется по зависимости $t_1(r_1)$, затем невязка за несколько итераций сводится практически к нулю. После этого из уравнения траектории в обратном виде определяется полярный угол $\varphi_1(r_1)$. При малых эксцентриситетах $e \sim 0$ в новый момент времени t_1 по формуле Тейлора прогнозируется угол φ_1 , проверяется по закону движения $t_1(r(\varphi_1))$, затем невязка за несколько итераций практически сводится к нулю.

Этот алгоритм отличается от традиционного. В нем не используются промежуточные параметры: средняя долгота M и эксцентрическая аномалия E , которые фигурируют при традиционном описании движения тела по эллиптической орбите.

Полярные координаты тел r_1 , φ_1 в новый момент t_1 с помощью параметров орбит i , φ_Ω , φ_p , R_p , пересчитываются в координаты поступательно движущейся геоцентрической системы $x_1 y_1 z_1$. Так как параметры орбит от одной эпохи к другой изменяются, то на каждом шаге они интерполируются по параболе. Таким образом, разработан алгоритм, который позволяет определить координаты x_i , y_i , z_i

воздействующих на Землю тел, за исключением Луны, в любой момент из рассматриваемого интервала времени. Так как колебания параметров орбиты Луны происходят с периодами значительно меньшими, то этот алгоритм требует видоизменения для нее. Поэтому уравнения (1) – (3) для воздействия Луны на Землю в этой работе не интегрируются. Для интегрирования уравнений (41) – (42) используется метод интегрирования Рунге-Кутты 4-го порядка с автоматическим выбором шага по алгоритму *Крутько П.Д.* (1989). Эти алгоритмы расчета координат и численного интегрирования запрограммированы на Фортране. Расчеты проводились на персональных компьютерах и на суперкомпьютере МВС-1000 в ИПМ РАН, г. Москва. В результате численных экспериментов принят начальный шаг интегрирования $\Delta t = 1 \cdot 10^{-6}$ года.

6. Результаты численного интегрирования

6.1 Воздействие Солнца. На рис. 3а представлены результаты интегрирования уравнений (41) – (42) за 0.1 года при воздействии Солнца на вращательное движение Земли. Угол прецессии ψ , начиная с нулевого значения, уменьшается, совершая колебания с амплитудой $\psi_{a1} = 6.53 \cdot 10^{-8} \text{ рад} = 13.47 \text{ mas}$ и периодом $T_1 = 0.9935 \text{ d}$, где $\text{mas} - 10^{-3}$ угловых секунд, d – равноденственный день. Угол нутации θ представлен в виде разности $\Delta\theta = \theta - \theta_0$. Из графика $\Delta\theta(T)$ видно, что угол наклона подвижной плоскости экватора к неподвижной эклиптике уменьшается, совершая колебания с амплитудой $\Delta\theta_{a1} = 2.60 \cdot 10^{-8} \text{ рад} = 5.27 \text{ mas}$ и тем же периодом T_1 . Угловая скорость прецессии $\dot{\psi}$ с периодом T_1 и амплитудой $\dot{\psi}_{a1} = 1.57 \cdot 10^{-8} \text{ рад/см}$ колеблется вокруг некоторого среднего значения. С таким же периодом T_1 и амплитудой $\dot{\theta}_{a1} = 6.17 \cdot 10^{-3} \text{ рад/см}$ колеблется угловая скорость нутации вокруг значения, близкого к нулю.

Как видно из графиков на рис. 3а, начальные значения скоростей $\dot{\theta}_0$ и $\dot{\psi}_0$ не превышают их крайних значений. Поэтому ошибка в определении $\dot{\theta}_0$ и $\dot{\psi}_0$ приведет только к изменению начальной фазы колебаний. Следовательно, в этом случае динамика скоростей $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$ и углов ψ и θ не изменится при погрешности начальных условий в указанных пределах. Аналогичные свойства решений наблюдаются и при воздействии других тел, как потом будет показано. Поэтому это свойство будет сохраняться и при воздействии всех тел. Следовательно, в этом случае начальные условия, представленные в табл. 1, могут быть уточнены по фазе наблюдаемых суточных колебаний $\dot{\theta}$ и $\dot{\psi}$.

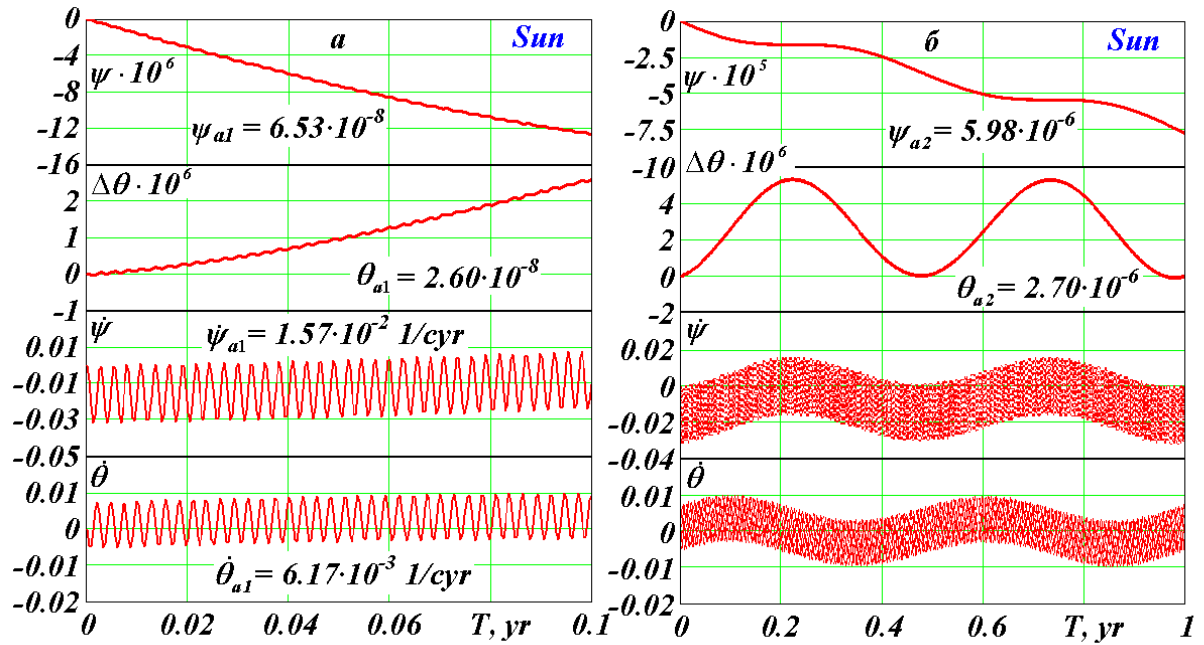


Рис. 3. Воздействие Солнца на вращательное движение Земли: *a* – за 0.1 года, *б* – за 1 год. Угол прецессии ψ и разность угла нутации $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ даны в радианах, а скорости $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$ - в радианах в столетие.

Так как принятые начальные условия, согласно (43) – (44) являются условными, возникает следующий вопрос. Какие значения производных $\dot{\theta}_0$ и $\dot{\psi}_0$ могли бы быть, если бы началу расчета предшествовало длительное воздействие одиночного тела на Землю? По-видимому, произошло бы установление равновесия и производные приблизились бы к своим средним значениям. С этой целью по первым суточным колебаниям (см. рис. 3а) были определены средние значения $\dot{\psi}_{01} = 1.61891 \cdot 10^{-2}$ и $\dot{\theta}_{01} = -1.32398 \cdot 10^{-3}$. Интегрирование уравнений (41) – (42) с начальными значениями $\dot{\psi}_{01}$ и $\dot{\theta}_{01}$ привело к уменьшению суточных колебаний в 20 раз (см. табл. 2). При этом характер поведения решений за большие периоды не изменился.

При осреднении производных в новых решениях получены средние значения $\dot{\psi}_{02} = 1.59342 \cdot 10^{-2}$ и $\dot{\theta}_{02} = -1.08328 \cdot 10^{-3}$, представленные в табл. 2. Повторный расчет с этими начальными значениями привел к уменьшению амплитуд колебаний в несколько раз. Таким образом, было выполнено 4 расчета с уточнением средних значений начальных скоростей. В итоге, как видно из табл. 2, амплитуды суточных колебаний уменьшились в несколько сот раз.

Таблица 2. Амплитуды суточных колебаний под воздействием Солнца при уточнении установившихся начальных скоростей.

№ расчета	Начальные скорости		Суточные амплитуды	
	$\dot{\psi}_0$	$\dot{\theta}_0$	$\dot{\psi}_a$	$\dot{\theta}_a$
	рад/ст			
1	$-1.20483 \cdot 10^{-6}$	$-7.09773 \cdot 10^{-8}$	$1.55690 \cdot 10^{-2}$	$6.17065 \cdot 10^{-3}$
2	$-1.61891 \cdot 10^{-2}$	$1.32398 \cdot 10^{-3}$	$8.53536 \cdot 10^{-4}$	$3.72235 \cdot 10^{-4}$
3	$-1.59342 \cdot 10^{-2}$	$1.08328 \cdot 10^{-3}$	$2.38888 \cdot 10^{-4}$	$1.39865 \cdot 10^{-4}$
4	$-1.59710 \cdot 10^{-2}$	$9.90860 \cdot 10^{-4}$	$2.48460 \cdot 10^{-5}$	$5.10429 \cdot 10^{-5}$

Конечные значения производных $\dot{\psi}_0$ и $\dot{\theta}_0$ можно считать установившимися при длительном воздействии одиночного тела на Землю. При воздействии на Землю нескольких тел, по-видимому, для каждого тела такого установления не будет. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать воздействие одиночных тел при начальных условиях, согласно (43) – (44).

На рис. 3б представлена динамика оси Земли за 1 год. Угол прецессии увеличивается по часовой стрелке, совершая колебания с периодом $T_2=0.5$ года и амплитудой $\psi_{a2}=5.98 \cdot 10^{-6}$ рад = 1232 mas. С таким же периодом T_2 и амплитудой $\theta_{a2} = 2.70 \cdot 10^{-6}$ рад = 556.9 mas колеблется угол нутации вокруг некоторого среднего значения. В начальную эпоху (30.12.49 г.) приходится минимум отклонения оси Земли. Это объясняется тем, что Солнце имеет наибольшее отклонение от плоскости экватора и создает наибольший момент сил, который приводит к θ_{\min} .

На рис. 4а представлена динамика оси за 10 лет. Угол прецессии ψ с отмеченными ранее полугодовыми колебаниями изменяется практически линейно, а угол нутации с полугодовым периодом T_2 колеблется вокруг среднего значения. Скорости $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$ с периодами T_1 и T_2 в тех же пределах, что и на рис. 3б. Динамика оси Земли за 100 лет показана на рис. 4б. Угол прецессии ψ изменяется линейно со средней за 1000 лет скоростью $\dot{\psi}_{mn} = 7.74 \cdot 10^{-3}$ рад/ст. Угол нутации в виде $\Delta\theta$ изменяется с суточными и полугодовыми периодами в неизменных пределах. В неизменных пределах колеблются также скорости $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$: $\dot{\psi}$ вокруг среднего значения $\dot{\psi}_{mn}$, а $\dot{\theta}$ - вокруг близкого к нулю значения. Аналогичным образом ведут себя параметры за 1000 лет, поэтому эти результаты здесь не приводим.

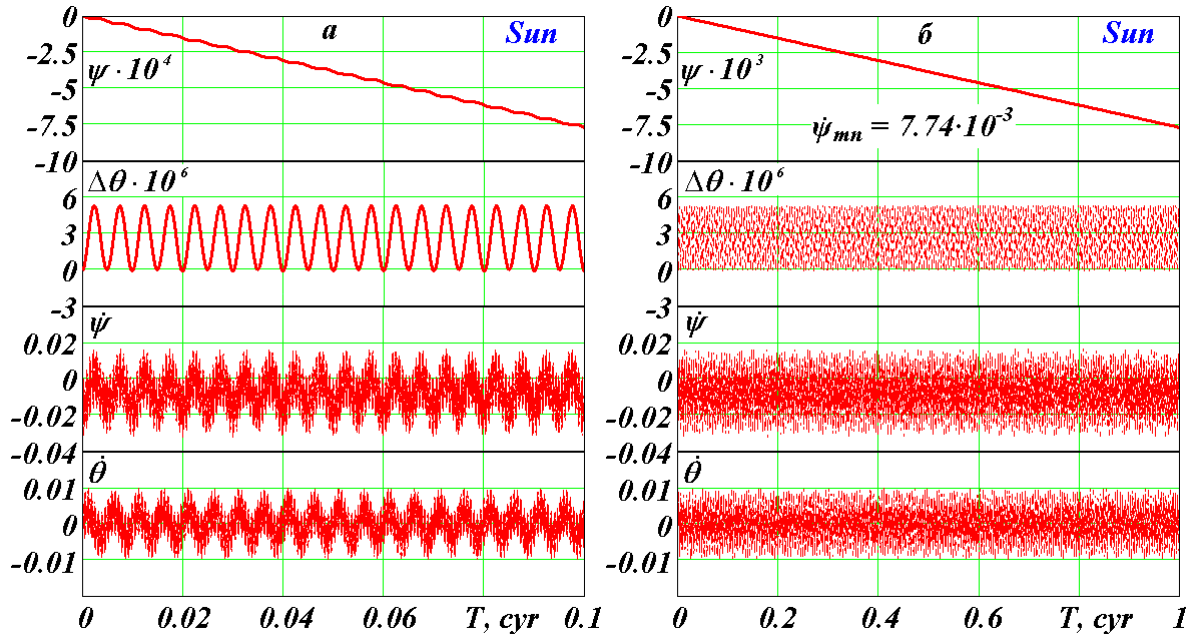


Рис. 4. Воздействие Солнца на вращательное движение Земли: *a* – за 10 лет, *b* – за 100 лет. Обозначения см. на рис.3.

Полученное в результате интегрирования уравнений (41) – (42) среднее значение скорости прецессии $\dot{\psi}_{0mn}$ (см. табл. 1) весьма близко к средней величине $\dot{\psi}_{0m} = 7.73 \cdot 10^{-3}$ рад/см, вычисленной по приближенной зависимости (49). Следует отметить, что мгновенная скорость прецессии (см. рис. 3б) изменяется в пределах $\dot{\psi}_{\min} \leq \dot{\psi} \leq \dot{\psi}_{\max}$, где $\dot{\psi}_{\max} = 0.016$ рад/см, а $\dot{\psi}_{\min} = -0.032$ рад/см, т.е. $\dot{\psi}$ изменяется больше чем 20 раз по отношению к среднему $\dot{\psi}_{\min}$. Еще в больших относительных пределах по отношению к среднему его значению $\dot{\theta}_m \approx 0$ изменяется $\dot{\theta}$. Однако, при таких значительных изменениях мгновенных скоростей $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$ средние значения остаются постоянными на протяжении всего времени интегрирования. Это свидетельствует об устойчивости метода интегрирования. А так как средние значения $\dot{\psi}_{mn}$ согласуются с наблюдениями, то это свидетельствует о достоверности решения всей задачи.

Следует также отметить, что при рассмотрении воздействия тела *B* на Землю (см. рис. 1) было показано, что момент сил $m_0 < 0$ и скорость прецессии $\dot{\psi} < 0$. В результате интегрирования уравнений (41) – (42) мы получили, что скорость прецессии принимает также положительные значения (см. рис. 3б). Этот результат обусловлен динамикой: под воздействием момента сил земная ось набирает скорость, согласно (4), и по инерции продолжается ее движение даже в отсутствии m_0 . Поэтому $|\dot{\psi}_{\min}|$ больше величины, полученной из выражения (4), а $\dot{\psi}_{\max} > 0$.

Мы здесь не приводим графиков по динамике скорости вращения Земли $\dot{\phi}$, т.к., согласно (40), изменения $\dot{\phi}$ обратные по знаку изменениям скорости прецессии $\dot{\psi}$. Этот вывод подтверждается результатами других авторов, например, *Бретаньона П. и др.* (1997).

6.2. Воздействие Венеры и других планет. Уравнения (41) – (42) были проинтегрированы за 10000 лет при воздействии по отдельности всех планет. Наибольшее воздействие на ось Земли оказывает Венера. На рис. 5а представлена динамика оси Земли под воздействием Венеры на интервале 0.1 года. Углы прецессии и нутации также колеблются с суточными периодами и амплитудами $\psi_{a1} = 2.15 \cdot 10^{-12} \text{ рад} = 0.443 \cdot 10^{-3} \text{ mas}$; $\theta_{a1} = 0.855 \cdot 10^{-12} \text{ рад} = 0.176 \cdot 10^{-3} \text{ mas}$. Как видим, амплитуды суточных колебаний при воздействии Венеры на 4 порядка меньше, чем при воздействии Солнца.

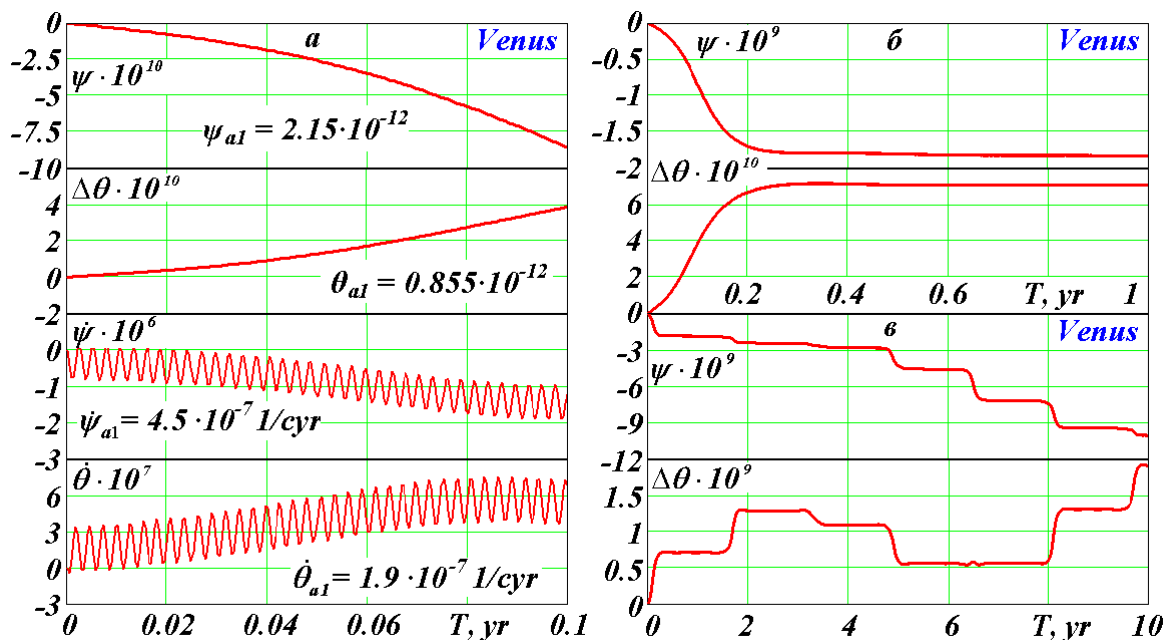


Рис. 5. Воздействие Венеры на вращательное движение Земли: а – за 0.1 года, б – за 1 год, в – за 10 лет. Обозначения см. на рис.3.

Скорости $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$ также колеблются с суточным периодом $T_1=0.99348$ дн. и амплитудами, значительно превышающими средние значения. Так как амплитуды суточных колебаний затеняют колебания с большими периодами, то на последующих отрезках времени приводить графики $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$ не будем.

На рис. 5б представлена динамика углов прецессии и нутации за 1 год, а на рис. 5в - за 10 лет. По изменению $\Delta\theta$ видно, что наметился второй период колебаний длительностью около 1.6 года. Эти колебания выражены горизонтальными участками изменения $\Delta\theta$. Их период $T_2=1.6$ года обусловлен периодичностью сближения Венеры

с Землей за счет относительного движения. Период этих сближений $T_{VE}=T_E \cdot T_V / (T_E - T_V) = 1.598$ года, где T_E и T_V - сидерические периоды обращения Земли и Венеры. На большем интервале, как видно из рис. 6а по графику θ , колебания с периодом $T_2 = T_{VE}$ совершаются на фоне колебаний с большим периодом. $T_3 = 8.12$ года и амплитудами $\psi_{a3} = 1.65 \cdot 10^{-9} \text{ рад} = 0.341 \text{ mas}$ и $\theta_{a3} = 6.16 \cdot 10^{-10} \text{ рад} = 0.127 \text{ mas}$. Эти колебания с периодом T_3 обусловлены периодичностью сближений Венеры с Землей в наибольшем удалении от плоскости экватора (т. B_1 и B_3 на рис. 1). Действительно, после первого сближения, например, в т. B_1 , следующее сближение будет через $T_2 = 1.6$ года, т.е. будет отстоять от т. B_2 на 0.1 года. Поэтому потребуется $0.5 \text{ г} / 0.1 \text{ г} = 5$ сближений, т.е. $T_3 = 5 \cdot T_2 \approx 8.1$ года, чтобы последнее сближение произошло снова в точке B_1 или B_2 .

Периодичность сближений в т. B_1 и B_2 можно описать зависимостью $T_{BC} = 0.5 T_{BE} / (T_{BE} - 0.5 \text{Int}(2T_{BE}))$, где T_{BE} - период сближений тела B с Землей, а функцией Int определяется целая часть числа.

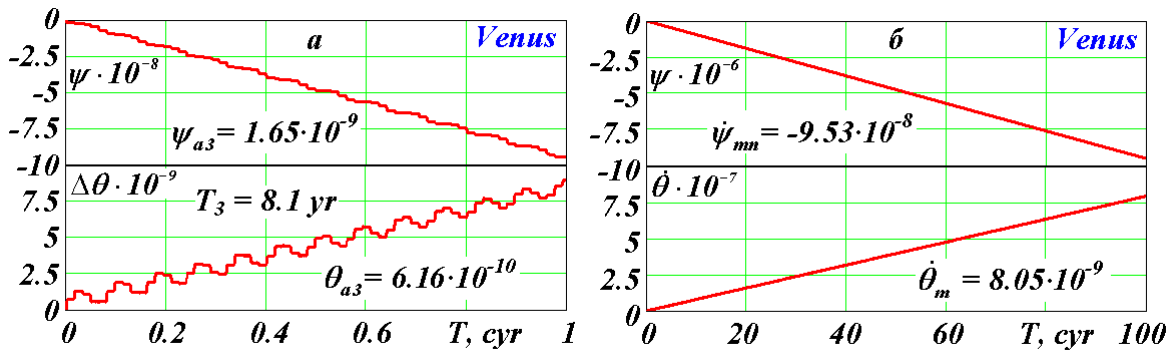


Рис. 6. Динамика оси Земли при воздействии Венеры: а – за 100 лет, б – за 10 тыс. лет. Обозначения см. на рис.3.

На рис. 6б показана динамика углов ψ и θ за 10 тыс. лет. Углы линейно изменяются со средними за 10 тыс. лет скоростями $\dot{\psi}_{mn} = -9.53 \cdot 10^{-8} \text{ рад/ст}$ и $\dot{\theta}_m = 8.05 \cdot 10^{-9} \text{ рад/ст}$, при этом скорость нутации в 12 раз меньше скорости прецессии. Отличие средней скорости нутации от нуля обусловлено тем, что в неподвижной $x_{01} y_{01} z_{01}$ системе координат $x_{1y_1z_1}$ на интервале 10 тыс. лет начинают влиять изменения плоскостей орбит Земли и Венеры.

Графики воздействия других планет на вращательное движение Земли выглядят аналогично графикам для Солнца и Венеры. Наибольшее отличие проявляется для угла нутации θ . На рис. 7 представлено сравнение воздействия Солнца и планет на угол нутации. Под воздействием Солнца, Меркурия и Венеры угол нутации θ увеличивается. Воздействие других планет приводит к его уменьшению. Изменение

угла θ происходит для всех тел, за исключением Солнца, линейно с колебаниями. Полугодичные нутационные колебания при воздействии Солнца (см. рис. 4) достаточно велики и затеяют тренд θ . Поэтому на рис. 7 представлено изменение скользящего среднего $\Delta\theta_s$ по 100 соседним точкам. Из графика следует, что $\Delta\theta_s$ изменяется не по линейному закону со средней скоростью за 1000 лет $\dot{\theta}_{m10} = 3.3 \cdot 10^{-8}$ рад/ст.

Прослеживаются разные типы нутационных колебаний. Для всех тел имеются суточные колебания с периодом T_1 . Полуоборотные с периодом T_2 ярко выражены для Солнца и внешних планет, за исключением Плутона. Для Плутона выражено колебание θ с периодом $2T_2$. Для ближних планет от Меркурия до Марса имеются колебания с горизонтальными максимумами с периодами T_{BE} обращения тел (B) относительно Земли (E), например, 1.6 г. для Венеры и 2.14 г. – для Марса. Горизонтальные площадки изменения угла θ обусловлены длительным контактом планеты и Земли во время сближений. Для Венеры ярко выражены колебания с $T_3 = T_{BC} = 1.6$ г., обусловленным сближением с Землей в точках B_1 и B_2 . Для Марса наблюдаются удвоенные периоды с $T_3 = 2T_{BC} = 2 \cdot 7.9$. Удвоение периодов происходит по причине того, что воздействие тел в диаметрально противоположных точках по отношению к Земле отличаются вследствие эллиптичности орбит и их наклона друг к другу.

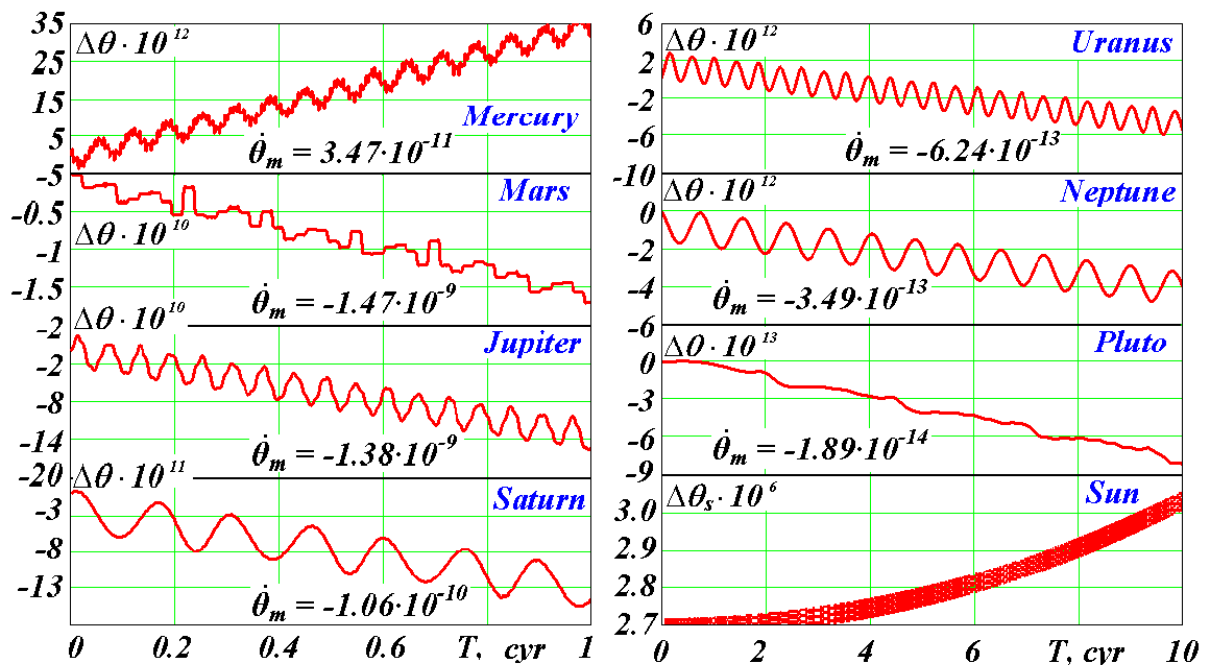


Рис. 7. Нутационные колебания и тренды оси Земли при одиночном воздействии планет и Солнца: по оси ординат для планет – разность $\Delta\theta = \theta - \theta_0$, а для Солнца – скользящее среднее этой разности $\Delta\theta_s$.

В табл. 3 приведены периоды и амплитуды колебаний оси Земли, а также скорости прецессии $\dot{\psi}_{mn}$, обусловленные воздействием Солнца и планет. Наибольшее воздействие на амплитуды и скорость прецессии вызывает Солнце. Из планет наибольшее воздействие оказывает Венера.

При сопоставлении скорости прецессии $\dot{\psi}_{mn}$ с приближенной величиной $\dot{\psi}_m$, рассчитанной по формуле (49), видно (см. табл. 1), что они близки для Солнца и далеких планет от Юпитера до Нептуна. Приближенная формула (49) дает большие погрешности для близких планет за счет сильного влияния на осреднение сближения планет с Землей. Для Плутона погрешность при осреднении возникает за счет большого наклона его орбиты и большого эксцентриситета.

В табл. 3 представлены колебания нескольких типов. Первый, с суточным периодом $T_1=0.9935$ дня, обусловлен вращательным движением Земли. При этом виде колебаний наибольшие амплитуды имеют скорости $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$. Другие виды колебаний обусловлены периодичностью пересечения телами плоскости экватора Земли, периодичностью сближений планет с Землей и периодичностью сближения в точках наибольшего удаления от плоскости экватора (т. B_1 и B_3 на рис. 1). В этих случаях наибольших амплитуд достигают углы ψ и θ .

7. Сопоставления с работами других исследователей

Сопоставление полученных дифференциальных уравнений (41) – (42) с дифференциальными уравнениями других авторов осложняется тем, что большинство авторов эти уравнения в окончательном виде не приводит. С целью приближенного их решения дифференциальные уравнения 2-ого порядка упрощают до уравнений первого порядка (уравнений Пуассона). Кроме того, используются разные системы отсчета, разные переменные и разные обозначения, и в конечном виде, подобном (41) – (42), ни в одной из известных нам работ уравнения не приводятся. Из последних работ в наиболее полном виде дифференциальные уравнения приведены *Бретаньоном П. и др.* (1997). При подстановке в уравнения (54) этих авторов момента $J_y = J_x$, а угловой скорости $\dot{\phi}$ согласно (40) слагаемые, обусловленные кинетическим моментом, совпадают с соответствующими слагаемыми наших уравнений (41) – (42). Слагаемые, обусловленные моментами сил, у этих авторов выражены полиномами Лежандра, поэтому их нельзя сопоставить с нашими.

Наше решение (40) для угловой скорости Земли $\dot{\phi}$ и кинематические слагаемые уравнений (41) – (42) с учетом знаков ψ и θ совпадают с уравнениями (9.1.04) и

Таблица 3. Периоды колебаний оси Земли, их амплитуды и скорости прецессии при одиночном воздействии Солнца и планет:

* отмечены периоды и амплитуды, обусловленные сближением в плоскости экватора; после «/» даны полупериоды ($T_B \cdot 0.5$) сидерических оборотов вокруг Солнца Земли и планет.

Тела	T_1 , дн.	ψ_{a1}	θ_{a1}	$T_2 (T_3^*)$, лет	$\psi_{a2, a3}$, рад	$\theta_{a2, a3}$, рад	$\dot{\psi}_{mn}$, рад/ст
Солнце	0.9935	$6.52987 \cdot 10^{-8}$	$2.60203 \cdot 10^{-8}$	0.5/0.5	$5.97569 \cdot 10^{-6}$	$2.69668 \cdot 10^{-6}$	$-7.73671 \cdot 10^{-3}$
Меркурий	0.9935	$1.03196 \cdot 10^{-14}$	$3.92567 \cdot 10^{-15}$	6.55*/0.12	$7.48482 \cdot 10^{-12}$	$2.74472 \cdot 10^{-13}$	$-1.97555 \cdot 10^{-9}$
Венера	0.9935	$2.15159 \cdot 10^{-12}$	$8.54552 \cdot 10^{-13}$	8.12*/0.31	$1.65282 \cdot 10^{-9}$	$6.15801 \cdot 10^{-10}$	$-9.52699 \cdot 10^{-8}$
Марс	0.9935	$2.78597 \cdot 10^{-15}$	$1.33595 \cdot 10^{-15}$	15.8*/0.94	$7.34044 \cdot 10^{-11}$	$2.23168 \cdot 10^{-11}$	$-2.42254 \cdot 10^{-9}$
Юпитер	0.9935	$2.32699 \cdot 10^{-13}$	$9.30588 \cdot 10^{-14}$	5.93/5.93	$6.69998 \cdot 10^{-10}$	$2.55712 \cdot 10^{-10}$	$-5.76500 \cdot 10^{-8}$
Сатурн	0.9935	$1.01170 \cdot 10^{-15}$	$4.16323 \cdot 10^{-16}$	14.711/14.72	$8.27493 \cdot 10^{-11}$	$3.21961 \cdot 10^{-11}$	$-2.70110 \cdot 10^{-9}$
Уран	0.9935	$4.65987 \cdot 10^{-16}$	$1.85499 \cdot 10^{-16}$	42.05/42.01	$3.68679 \cdot 10^{-12}$	$1.44699 \cdot 10^{-12}$	$-4.74205 \cdot 10^{-11}$
Нептун	0.9935	$5.34857 \cdot 10^{-17}$	$2.12967 \cdot 10^{-17}$	82.42/82.40	$2.04549 \cdot 10^{-12}$	$9.59090 \cdot 10^{-13}$	$-1.51833 \cdot 10^{-11}$
Плутон	0.9935	$5.18906 \cdot 10^{-19}$	$2.06426 \cdot 10^{-19}$	248/124	$1.9394 \cdot 10^{-14}$	$1.0980 \cdot 10^{-16}$	$-8.19926 \cdot 10^{-14}$

кинематическими слагаемыми уравнений (9.1.05) *Спр. руководства* (1976), если учесть имеющиеся в уравнениях (9.1.05) две опечатки. Эти опечатки в последующих уравнениях Пуассона (9.1.06) устранены. Следует отметить, что при сопоставлении уравнений обнаруживаются опечатки и в других работах. Это обстоятельство является дополнительным аргументом в необходимости выполнения работы по выводу уравнений вращательного движения Земли.

Наш вывод моментов сил совпадает с традиционным выводом (см., например, *Смарт У.М.* (1965)) включительно до выражения (31) для силовой функции U . После этого обычно величины r_i^3 и (z_i/r_i) разлагают в ряды по элементам эллиптического движения на основании теории вековых возмущений. Так что эти результаты также несопоставимы с нашими.

В результате можно сделать следующий вывод. Члены уравнений (41) – (42), обусловленные кинетическим моментом, совпадают с уравнениями других исследователей. Члены уравнения, обусловленные моментами сил, на одинаковых стадиях вывода, также совпадают. В окончательном виде уравнения (41) – (42) не повторяют уравнений, известных нам в литературе. Не повторяет также принятый способ вывода уравнений, подход к их решению, задание начальных условий и метод решения. Несмотря на оригинальность этих приемов для уравнений вращательного движения Земли, они являются типичными в механике и традиционно используются в разных ее областях.

В наших решениях получены суточные колебания углов прецессии ψ и нутации θ . *Бретаньон П. и др.* (1997) для проверки своих аналитических решений выполняли численные интегрирования. Разности между численными и аналитическими результатами, приведенные в их работе, имеют суточные колебания, т.е. численные решения этих авторов также дают суточные колебания. Суточные частоты колебаний ψ и θ существуют также в представлении данных наблюдения в виде рядов (см., например, *Мэтью П.М. и Бретаньон П.* (2003)).

В табл. 4 сопоставлены амплитуды и периоды колебаний второго и третьего типов оси Земли с результатами аналитических решений *Бретаньона П. и др.* (1997). Здесь также сопоставлены и средние скорости прецессии и нутации, обусловленные воздействием Солнца и планет. Для Солнца амплитуды колебаний $\dot{\psi}_a$ и $\dot{\theta}_a$ и их период T , а также средняя скорость прецессии $\dot{\psi}_m$ хорошо совпадают. Следует отметить, что скорость $\dot{\theta}_m$ согласно рис. 7, изменяется нелинейно, и на фоне значительных

Таблица 4. Сопоставление рассчитанных (SS) колебаний оси Земли и средних скоростей ее перемещения с аналитическими результатами Бретаньона П. и др. (1997) (Br).

Тела	Колебания						Скорости			
	Амплитуды, mas				Периоды, лет		"/ст.			
	ψ_a		θ_a		T		$\dot{\psi}_{mn}$		$\dot{\theta}_m$	
	SS	Br	SS	Br	SS	Br	SS	Br	SS	Br
Солнце	1232.57	1276.71	556.23	552.39	0.5	0.500	-1595.811	-1594.870	–	$2.923 \cdot 10^{-4}$
Меркурий	0.00154	0.00103	0.00057	0.00043	6.552	6.659	$-4.075 \cdot 10^{-4}$	$-3.698 \cdot 10^{-4}$	$7.167 \cdot 10^{-6}$	$8.800 \cdot 10^{-6}$
Венера	0.34092	0.21671	0.12701	0.09076	8.12	8.102	$-1.965 \cdot 10^{-2}$	$-1.815 \cdot 10^{-2}$	$1.660 \cdot 10^{-3}$	$1.681 \cdot 10^{-3}$
Марс	0.01514	0.01155	0.00460	0.00095	15.8	15.78	$-4.997 \cdot 10^{-4}$	$-5.999 \cdot 10^{-4}$	$-3.027 \cdot 10^{-5}$	$-3.570 \cdot 10^{-5}$
Юпитер	0.13820	0.10441	0.05274	0.04569	5.928	5.931	$-1.189 \cdot 10^{-2}$	$-1.171 \cdot 10^{-2}$	$-2.844 \cdot 10^{-4}$	$-2.804 \cdot 10^{-4}$
Сатурн	0.01707	0.01215	0.00664	0.00516	14.71	14.73	$-5.571 \cdot 10^{-4}$	$-5.208 \cdot 10^{-4}$	$-2.193 \cdot 10^{-5}$	$-2.200 \cdot 10^{-5}$
Уран	0.00076	0.00065	0.00030	0.00029	42.05	42.01	$-9.781 \cdot 10^{-6}$	$-1.000 \cdot 10^{-5}$	$-1.288 \cdot 10^{-7}$	$-1.000 \cdot 10^{-7}$
Нептун	0.00042	0.0004	0.00019	0.00016	82.42	82.39	$-3.132 \cdot 10^{-6}$	$-2.900 \cdot 10^{-6}$	$-7.196 \cdot 10^{-8}$	$-1.000 \cdot 10^{-7}$
Плутон	$4.0 \cdot 10^{-6}$	–	$2.3 \cdot 10^{-8}$	–	248	–	$-1.691 \cdot 10^{-8}$	–	$-3.890 \cdot 10^{-9}$	–

полугодовых колебаний ее близкое к нулю среднее значение в начальный момент нельзя точно определить.

Периоды колебаний T углов, как видно из табл. 4, хорошо совпадают для всех планет. Амплитуды колебаний ψ и $\dot{\theta}$ хорошо согласуются для данных планет от Юпитера до Нептуна. Меньшее соответствие для ближних планет объясняются сложной структурой колебаний ψ и $\dot{\theta}$. В работе *Бретаньона П. и др. (1997)* амплитуды определяются разложением решений в гармонические ряды, из которых в табл. 4 приведены главные гармоники. В нашей работе определяются фактические амплитуды методом скользящей средней. При сложной структуре колебаний эти методы дают разные результаты.

Средние скорости изменения углов $\dot{\psi}_m$ и $\dot{\theta}_m$ при воздействии планет, как видно из табл. 4, хорошо согласуются между собой. Следует отметить, что точное совпадение результатов наших и *Бретаньона П. и др.* невозможно, т.к. отличаются способы определения параметров, а также исходные и начальные данные.

Так как решения *Бретаньона П. и др. (1997)* отнормированны на данных наблюдения, то совпадение наших результатов с результатами этих авторов свидетельствует и о подтверждении их данными наблюдениями. Представленные в табл. 4 совпадения наших результатов свидетельствуют о достоверности полученных дифференциальных уравнений и их решений. Эти совпадения свидетельствуют также о справедливости исходных и начальных данных. Подтверждается также математическая модель движения планет, на основе которой определяются их положения в процессе численного интегрирования уравнений (41) – (42). Следует также отметить, что в работе *Бретаньона П. и др.* рассматривается неосесимметричная Земля, силовая функция уточнена по поверхностному распределению потенциала силы тяжести и учтена геодезическая прецессия. Все эти дополнительные воздействия дают добавки, которые находятся в пределах отличий наших решений от *Бретаньона П. и др. (1997)*.

Выводы

1. Проанализировано воздействие на вращательное движение тел и представлен вывод дифференциальных уравнений вращения Земли при гравитационном воздействии на нее тел Солнечной системы.
2. Разработан алгоритм и программа численного интегрирования полученных уравнений.

3. Проинтегрированы уравнений за период 10 тыс. лет при воздействии на Землю по отдельности Солнца и планет и проанализированы результаты.

3.1. Наибольшее воздействие на вращение Земли оказывает Солнце, а из планет – Венера.

3.2. Углы прецессии ψ , нутации θ и собственного поворота φ Земли испытывают колебания с одинаковыми периодами. Величина периодов обусловлена периодичностью пересечения воздействующими телами плоскости экватора Земли и периодичностью сближения планет с Землей.

3.3. Прецессия оси Земли под воздействием Солнца и планет на интервале до 10 тыс. лет происходит за стрелкой часов с практически неизменной средней скоростью.

3.4. Угол нутации оси Земли на этом интервале под воздействием Солнца и внутренних планет увеличивается, а от воздействия внешних – уменьшается.

4. Полученные результаты подтверждаются результатами других исследователей и наблюдениями.

Работа выполнялась при поддержке грантов губернатора Тюменской области 2003 и 2004 г.г. и интеграционной программы Президиума РАН № 13 в 2004г.

Литература

Берже А. и Лоутре М.Ф. (Berger A. and Loutre M. F.). Insolation values for the climate of the last 10 million years// Quaternary Science Reviews, 1991. № 10. P. 297–317.

Браувер Д. и Вурком А. (Brouwer D., Van Woerkom A. J. J.). The secular variation of the orbital elements of the principal planets// Astr. Pap. 1950. – 13, 2.

Бретаньон и др. (Bretagnon P., Rocher P. and Simon J.L.). Theory of the rotation of the rigid Earth // Astron. Astrophys. 1997. V. 319. P. 305–317.

Бретаньон и др. (Bretagnon P., Simon J.L.). Towards the construction of a new precession-nutation theory of nonrigid Earth // Celest. Mech & Dyn. Astr. 2001. V. 80. P. 177–184.

Жаров В.Е. (Zharov V.E.). Model of the Free Core Nutation for improvement of the Earth nutation series. Observatoire de Paris, ISBN 2-901057-51-9, 2005. P. 106–109.

Крутько П.Д. Алгоритмы и программы проектирования автоматических систем / М.: "Радио и связь".-1989.-С. 222.

Куинн Т.Р. и др. (Quinn T. R., Tremaine S., Duncan M.). A three million year integration of the Earth's orbit // Astronomical Journal, 1991. V. 101. P. 2287–2305.

Ляскар Ж. и др. (Laskar J., Joutel F., Boudin F.). Orbital, precessional, and insolation quantities for the Earth from -20 Myr to +10 Myr // Astronomy and Astrophysics, 1993. V. 270. N. 1-2. P. 522–533.

Миланкович М. Математическая климатология и астрономическая теория колебаний климата. – М.-Л. –ГОНТИ. – 1939. –207 с.

Молоденский С.М. (Molodensky S.M.). Tides and nutation of the earth: I. Models of an earth with an inelastic mantle and homogeneous, inviscid, liquid core // *Astronomicheskii vestnik*, 2004, V. 38. No. 6. P. 476.

Мэтью П.М. и Бретаньон П. (Mathews P.M., Bretagnon P.). Polar motions equivalent to high frequency nutations for a nonrigid Earth with anelastic mantle // *Astronomy & Astrophysics*, 2003. V. 400. P.1113–1128.

Ньюкомб (Newcomb S.). The elements of the four inner planets and the fundamental constants of astronomy. Washington: Government printing office. 1895. –202 p.

Русбек Ф. и Дехант В. (Roosbeek F., Dehant V.). RDAN97: an analytical development of rigid nutation series using the torque approach // *Celest. Mech.* 1998, 70. P. 215–253.

Симон и др. (Simon J.L., Bretagnon P., Chapront J., Chapront-Touze M., Francou G., Laskar J.). Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and planets // *Astronomy and Astrophysics*, 1994. V. 282. P. 663–683.

Смарт У.М. Небесная механика.-М.: Мир.-1965, 502 с.

Смульский И.И. Динамика орбиты Марса в течение 100 млн. лет и стабильность Солнечной системы // Тезисы докладов Восьмого съезда Астрономического общества и международного симпозиума АСТРОНОМИЯ-2005: СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ. 30 МАЯ - 6 ИЮНЯ 2005 ГОДА. Труды Государственного астрономического института им. П.К. Штернберга, Т. 78, М., 2005, - с 9.

Смульский И.И. Теория взаимодействия. - Новосибирск: Из-во Новосиб. ун-та, НИЦ ОИГГМ СО РАН, 1999 г. - 294 с.

Смульский И.И. Осесимметричная задача гравитационного взаимодействия N-тел// Математическое моделирование. – 2003, а, т. 15, № 5, с. 27-36.

Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 2002 г. – 416 с.

Шараф Ш. Г. и Будникова Н. А. О вековых изменениях элементов орбиты Земли, влияющих на климаты геологического прошлого. // *Бюл. ИТА АН СССР*. 1967, вып. 11, № 4 - С. 231 - 261.

Печатается в соответствии с решением Учёного совета Института криосферы Земли
Сибирского отделения Российской Академии наук от 05 апреля 2007 г., протокол № 5.