

Смульский И.И. Сферически распределенные структуры / Институт криосферы Земли СО РАН. - Тюмень, 2016. - 43 с. - Илл.: 14- Библиогр.: 16 назв. - Рус. Деп. в ВИНТИ 22.08.2016, № 112-В2016.

---

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ КРИОСФЕРЫ ЗЕМЛИ

УДК 519.6+521.1

И.И. Смульский

СФЕРИЧЕСКИ РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ СТРУКТУРЫ

Тюмень 2016

**Организация-депонент:** Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт криосферы Земли» Сибирского отделения Российской академии наук, г. Тюмень

**Название работы:** Сферически распределенные структуры

**Автор:** Смутьский И.И., (13.04.1944), ФГБОУН «Институт криосферы Земли», г. Тюмень, Российская Федерация

**Реферат:** В работе рассмотрены гравитационные взаимодействия  $N$ -тел, которые образуют распределенную по сфере структуру. Разработаны метод и программа создания таких структур на основании точного решения задачи осесимметричного взаимодействия  $N$ -тел. Выполнены исследования по созданию структур и изучена их динамика и эволюция. Выделены два класса структур: регулярные и нерегулярные. Динамика нерегулярных структур подобна динамики шаровых звездных скоплений. Для регулярных структур разработана аналитическая динамика. Работа представляет интерес для широкого круга исследователей, которых интересует объяснение поведения ансамблей тел в космическом пространстве их гравитационным взаимодействием. Она может использоваться студентами при выполнении курсовых и дипломных работ.

**Ключевые слова:** задача  $N$ -тел, сферические структуры, решения, эволюция, шаровые звездные скопления.

**Язык:** рус.

**Страниц:** 43

**Ил.:** да

**Библ.:** 16

**Title:** Distributed structures on the sphere

**Authors:** Smulsky J.J., Institute of Earth's Cryosphere (IEC), Tyumen, Russian Federation

**Abstract:**

The paper considers the gravitational interaction of  $N$ -bodies that form structure distributed on the sphere. The method and program for the creation of such structures are developed on the basis of exact solution of the problem of axisymmetric interaction of  $N$ -bodies. The studies were carried out to establish structures and to research their dynamics and evolution. Two class structures were selected: regular and irregular ones. The dynamics of irregular structures is similar to the dynamics of globular star clusters. The analytic dynamics of regular structures is developed. The work is of interest to a wide range of researchers who are interested in an explanation of the behavior of ensembles of bodies in space by their gravitational interaction. It can be used by students when doing term papers and dissertations.

**Key Words:**  $N$ -body problem, spherical structures, solutions, evolution, globular clusters.

## 1. Введение

В космическом пространстве существуют шаровые звездные скопления. Они состоят из тысяч звезд, которые притягиваются друг к другу по закону всемирного тяготения Ньютона. Сила воздействия  $j$ -ой звезды на  $i$ -ую согласно этому закону имеет вид:

$$\vec{F}_{i,j} = -G \frac{m_i \cdot m_j \cdot \vec{r}_{i,j}}{r_{i,j}^3}, \quad (1)$$

где  $m_i$  и  $m_j$  – массы  $i$ -ой и  $j$ -ой звезды, соответственно;

$\vec{r}_{i,j} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$  – вектор расстояния от  $j$ -ой звезды до  $i$ -ой;

$\vec{r}_i$  и  $\vec{r}_j$  – радиус-векторы  $i$ -ой и  $j$ -ой звезд соответственно;

$G$  – гравитационная постоянная.

Существование шаровых звездных скоплений вызывает два вопроса. Если все звезды притягиваются друг к другу, то почему они не сольются в одно тело? С одной стороны, это можно объяснить тем, что в скорости каждой звезды имеется перпендикулярная составляющая суммарной силе, поэтому ее движение происходит по криволинейной траектории. Именно так происходит движение планет вокруг Солнца. Несмотря на то, что каждая планета притягивается Солнцем и другими планетами, она может обращаться вечно вокруг Солнца по эллиптической орбите.

Однако, если в шаровом скоплении все звезды движутся, возникает второй вопрос: почему они не сталкиваются? В Солнечной системе движение планет происходит почти в одной плоскости. А в шаровом скоплении плоскости орбит звезд равномерно расположены в пространстве, и их так много, что столкновения неизбежны. А в результате столкновений будет и их слияние в одно тело, но и будут выбросы звезд из скопления. Поэтому со временем шаровое звездное скопление должно исчезнуть. Однако они не исчезают, а в астрономии возраст шаровых звездных скоплений считают наибольшим.

Чтобы ответить на эти вопросы необходимо рассмотреть взаимодействие звезд в скоплении и исследовать их движения. Однако существует проблема в задании скоростей звезд. Создать шаровое звездное скопление из неподвижных звезд можно многими способами. Но как задать их скорости, чтобы это скопление с течением времени не разрушилось?

Для этого можно воспользоваться опытом создания взаимодействующих структур на плоскости. Для таких структур получены точные решения для двух задач гравитационного взаимодействия  $N$ -тел. В первой задаче [1] - [2] вокруг центрального

тела равномерно на окружности расположено  $N-1$  периферийных тел. В такой структуре в зависимости от скорости периферийных тел, они могут двигаться по эллипсу, параболе или гиперболе. При наличии только радиальной скорости, структура, в зависимости от величины и знака скорости, превращается в одно тело или тела в ней удаляются на бесконечность.

Во второй задаче [3] - [4] на плоскости рассматривается многослойная вращающаяся структура, которая состоит из  $N_2$  слоев, на каждом из них расположено  $N_3$  тел. За счет вариации радиусов слоев и углов взаимного расположения тел в соседних слоях можно создать бесчисленное количество разновидностей таких вращающихся структур. В работах [3] - [4] разработаны методы и программы их создания. А динамика и эволюция структур исследовалась с помощью системы Galactica [5] - [7].

В работах [3] - [4] отмечается возможность превращения плоских вращающихся структур в пространственные за счет разворота слоев в пространстве. В настоящей работе пространственная структура создается за счет использования результатов первой задачи. С этой целью в однослойной осесимметричной структуре орбиты тел последовательно разворачиваются в пространстве.

## 2. Основные результаты задачи осесимметричного взаимодействия $N$ тел

В этой задаче [1] - [2]  $N_3$  тел массой  $m_i = m_1$  осесимметрично расположены на плоскости (см. рис. 1а) вокруг центрального тела массой  $m_0$ . Значком  $m_i$  будем также обозначать и само тело. Через тело  $m_1$  проходит ось  $x_1$ . От нее отсчитываются полярные углы  $\varphi_{0,i}$  остальных тел:

$$\varphi_{0,i} = (i-1) \cdot \Delta\varphi, \quad i = 1, 2, \dots, N_3, \quad (2)$$

где

$$\Delta\varphi = 2\pi / N_3. \quad (3)$$

В полярных координатах  $r, \varphi_0$ , где  $r$  на рис. 1а совпадает с  $x_1$ , координаты тела  $m_i$  будут  $r_i, \varphi_{0,i}$ . Сила взаимодействия между телами определяется законом (1). В результате решения этой задачи [1] - [2] уравнение траектории в полярной системе координат получено в следующем виде:

$$r_i = \frac{R_p}{(\alpha_1 + 1) \cdot \cos \varphi_{0,i} - \alpha_1}, \quad (4)$$

где  $R_p$  – радиус перицентра;

$$\alpha_1 = \mu_1 / (R_p \cdot v_p^2); \quad (5)$$

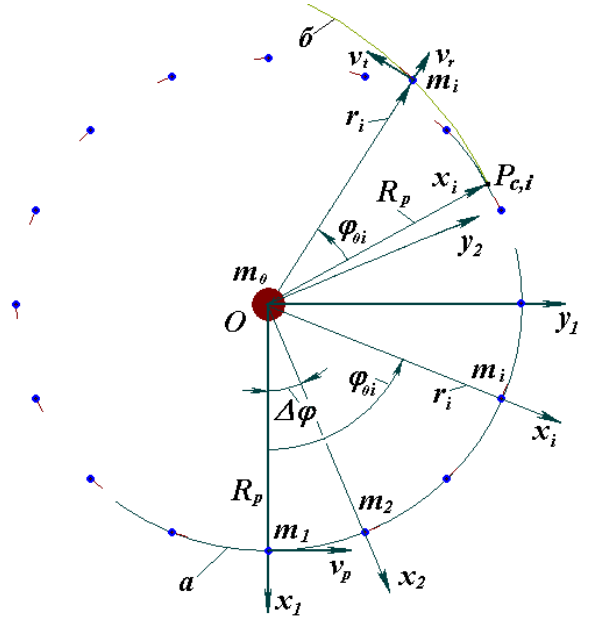
$$\mu_1 = -G(m_0 + m_1 \cdot f_{N_3}); \quad (6)$$

$$f_{N_3} = 0.25 \sum_{l=2}^{N_3} \frac{1}{\sin[\pi(i-1)/N_3]}; \quad (7)$$

$v_p$  – скорость периферийного тела  $m_i$  в перицентрии. Перицентрий – это точка на орбите тела с наименьшим расстоянием до центра  $O$  на (рис. 1).

В этих формулах  $\alpha_1$  – параметр траектории;  $\mu_1$  – параметр взаимодействия;  $f_{N_3}$  – вклад воздействия  $N_3 - 1$  периферийных тел на одно из них.

Рис. 1. Геометрические характеристики плоской однослойной осесимметричной структуры  $N$ -тел с массой центрального тела  $m_0$  и с массой каждого периферийного тела  $m_1 = m_2 = \dots = m_i = m_1$ :  $a$  – исходное расположение тел в вариантах 1, 2 и 3 сферически распределенных структур, а  $b$  – в варианте 4.



В зависимости от параметра траектории  $\alpha_1$ , орбиты периферийных тел могут быть окружностями ( $\alpha_1 = -1$ ), эллипсами ( $-1 < \alpha_1 < -0.5$ ), параболами ( $\alpha_1 = -0.5$ ) и гиперболами ( $-0.5 < \alpha_1 < 0$ ).

Время движения тела по траектории также зависит от  $\alpha_1$  [1] - [2].

Запишем еще три параметра орбиты периферийных тел. Период обращения по орбите

$$P = -\frac{2\pi\alpha_1 \cdot R_p}{v_p (-2\alpha_1 - 1)^{3/2}}, \quad (8)$$

эксцентриситет орбиты

$$e = -(1 + 1/\alpha_1) \quad (9)$$

и большая полуось орбиты

$$a = R_p (2\alpha_1 + 1) / \alpha_1. \quad (10)$$

### 3. Геометрическое построение сферически распределенной структуры

Распределить в пространстве осесимметричную структуру, представленную на рис. 1а, можно разными способами. Использованному ниже способу предшествовали длительные поиски, которые по тем или иным причинам оказывались неудачными. В настоящем способе, начиная со второго тела, производится поворот плоскости его орбиты вокруг полярного радиуса тела  $r_2$  совместно со всеми остальными телами с радиусами  $r_3, r_4, \dots, r_{N_3}$ . Затем вокруг радиуса  $r_3$  третьего тела на такой же угол поворачиваются орбиты

тел  $r_3, r_4, \dots, r_{N3}$ . Такие повороты производятся для всех остальных периферийных тел. Рассмотрим последовательно этапы построения сферически распределенной структуры.

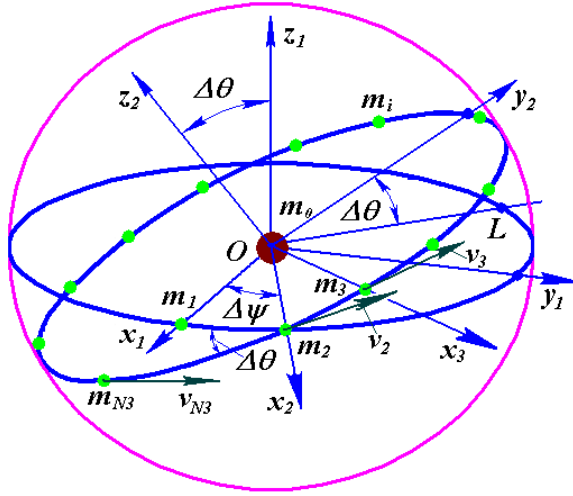


Рис. 2. Начальный этап построения сферически-распределенной структуры: плоскости орбит тел от  $m_2$  до  $m_{N3}$  повернуты на угол  $\Delta\theta$  вокруг оси  $Ox_2$ , проходящей через тело  $m_2$ .

В момент построения тела осесимметричной структуры (рис. 1а) находятся в перицентрах радиусом  $R_p$ , и они имеют только трансверсальные скорости  $v_p$ . Их радиальные скорости  $v_r = 0$ . На рис. 2 показан начальный этап построения

структуры. С телом  $m_1$  связана система координат  $x_1 y_1 z_1$ . Тело  $m_2$  в плоскости  $x_1 O y_1$  сдвинуто от тела  $m_1$  на угол

$$\Delta\psi = k_\varphi \cdot \Delta\varphi. \quad (11)$$

Коэффициент  $k_\varphi$  введен для возможности вариации геометрии пространственной структуры. Запишем координаты и скорости первого тела  $m_1$  в координатной системе  $x_1 y_1 z_1$

$$x_{1,1} = R_p; \quad y_{1,1} = 0; \quad z_{1,1} = 0; \quad (12)$$

$$v_{x,1,1} = 0; \quad v_{y,1,1} = v_p; \quad v_{z,1,1} = 0. \quad (13)$$

В выражениях (12) – (13) первый индекс «1» обозначает номер системы координат, а второй индекс «1» обозначает номер тела.

Со вторым телом  $m_2$  связываем систему координат  $x_2 y_2 z_2$  (рис. 2). Она повернута вокруг оси  $x_2$  на угол

$$\Delta\theta = k_{\varphi v} \cdot \Delta\varphi. \quad (14)$$

Коэффициент  $k_{\varphi v}$  также введен для вариации геометрии пространственной структуры. В плоскости  $x_2 O y_2$  расположен вектор скорости тела  $m_2$ . В ней также временно находятся остальные тела от  $m_3$  до  $m_{N3}$ . Запишем координаты второго тела в координатной системе  $x_1 y_1 z_1$

$$x_{1,2} = R_p \cdot \cos \Delta\psi; \quad y_{1,2} = R_p \cdot \sin \Delta\psi; \quad z_{1,2} = 0. \quad (15)$$

В плоскости  $x_1 O y_1$  проведем прямую  $OL$  перпендикулярную оси  $Ox_2$ . Угол между осью  $y_2$  и прямой  $OL$  равен  $\Delta\theta$ . В плоскости  $x_2 O y_2$  второе тело имеет только одну составляющую скорости  $v_{y,2,2} = v_p$ . Она будет давать проекции

$$v_{z,1,2} = v_p \cdot \sin \Delta\theta \quad \text{и} \quad v_{L,2} = v_p \cdot \cos \Delta\theta. \quad (16)$$

Так как между осью  $x_1$  и прямой  $OL$  угол равен  $\Delta\psi + \pi/2$ , то проекции скорости тела  $m_2$  на оси системы  $x_1y_1z_1$  будут:

$$v_{x,1,2} = v_{L,2} \cdot \cos(\pi/2 + \Delta\psi) = -v_p \cdot \sin \Delta\psi \cdot \cos \Delta\theta; \quad (17)$$

$$v_{y,1,2} = v_{L,2} \cdot \sin(\pi/2 + \Delta\psi) = v_p \cdot \cos \Delta\psi \cdot \cos \Delta\theta; \quad (18)$$

$$v_{z,1,2} = v_p \cdot \sin \Delta\theta. \quad (19)$$

Следующий поворот тел производится относительно оси  $x_3$ , проходящей через тело  $m_3$ . На координатную систему  $x_2y_2z_2$  координаты  $x_{2,3}$ ,  $y_{2,3}$ ,  $z_{2,3}$  и скорости  $v_{x,2,3}$ ,  $v_{y,2,3}$ ,  $v_{z,2,3}$  тела  $m_3$  запишутся аналогично (15) и (16). Спроектируем их на оси системы координат  $x_1y_1z_1$  тела  $m_1$ . Проекция осей  $y_2$  и  $z_2$  на ось  $z_1$  и прямую  $OL$  будут:

$$z_{1,3} = z_{2,3} \cos \Delta\theta + y_{2,3} \sin \Delta\theta; \quad L = y_{2,3} \cos \Delta\theta - z_{2,3} \sin \Delta\theta. \quad (20)$$

Проектируя  $L$  и  $x_{2,3}$  на оси  $x_1$  и  $y_1$ , с учетом (20), получаем:

$$x_{1,3} = x_{2,3} \cos \Delta\psi - y_{2,3} \sin \Delta\psi \cdot \cos \Delta\theta + z_{2,3} \sin \Delta\psi \cdot \sin \Delta\theta; \quad (21)$$

$$y_{1,3} = x_{2,3} \sin \Delta\psi + y_{2,3} \cos \Delta\psi \cdot \cos \Delta\theta - z_{2,3} \cos \Delta\psi \cdot \sin \Delta\theta; \quad (22)$$

$$z_{1,3} = y_{2,3} \sin \theta + z_{2,3} \cos \Delta\theta. \quad (23)$$

Выражениями (21) – (23) определены координаты третьего тела в системе координат первого тела в зависимости от координат третьего тела на координатную систему второго тела. Аналогичными выражениями определяются скорости третьего тела на систему координат  $x_1y_1z_1$ .

Такой поворот плоскостей орбит последовательно проводим вокруг осей  $x_3, x_4, \dots, x_{N_3-1}$ , проходящих через тела  $m_3, m_4, \dots, m_{N_3-1}$  соответственно. Поэтому выражениями (21) – (23) определяются преобразования для координат любого  $i + 1$  тела в координатную систему  $i - 1$  тела. Координаты и скорости первого тела определяются выражениями (12) – (13). Координаты второго тела в системе координат  $x_1y_1z_1$  представлены формулами (15), а скорости – (16). Этими же формулами представлены координаты и скорости тела  $m_{i+1}$ , где  $i + 1 = 3, 4, \dots, N_3$  в координатной системе  $i - 1$  тела. Тогда формулами (21) – (23) описываются преобразования  $i$ -ой системы координат в  $i - 1$ . Перепишем (21) – (23) для тела с номером  $l$

$$x_{i-1,l} = x_{i,l} \cos \Delta\psi - y_{i,l} \sin \Delta\psi \cdot \cos \Delta\theta + z_{i,l} \sin \Delta\psi \cdot \sin \Delta\theta; \quad (24)$$

$$y_{i-1,l} = x_{i,l} \sin \Delta\psi + y_{i,l} \cos \Delta\psi \cdot \cos \Delta\theta - z_{i,l} \cos \Delta\psi \cdot \sin \Delta\theta; \quad (25)$$

$$z_{i-1,l} = y_{i,l} \sin \theta + z_{i,l} \cos \Delta\theta. \quad (26)$$

Аналогичными выражениями описываются преобразования  $i$ -ой системы координат в  $i - 1$  систему координат для скоростей. Для каждого индекса  $l$  в формулах (24) – (26), начиная с 2 до  $N_3 - 1$ , представлены координаты тел от 3 до  $N_3$  в координатной

системе с номером на единицу меньшей. Поэтому по формулам (24) – (26) для тела с номером  $N_3$  нужно выполнить преобразований  $N_3 - 2$ , для тела с номером  $N_3 - 1$  выполнить  $N_3 - 3$  преобразований и т. д. до тела  $l = 3$  с одним преобразованием. Тогда повернутые в пространстве координаты и скорости всех тел будут выражены в координатной системе  $x_1y_1z_1$ .

#### 4. Программа создания структуры

Представленный алгоритм построения структуры, на первый вид – очень простой, содержит ряд нетривиальных проблем, многие из которых решены в наших предшествующих работах. Он реализован в программе SphDsSt4.for. Программа состоит из трех частей: 1) считывание исходных параметров; 2) построение сферически распределенной структуры; 3) создание файла начальных условий для системы Galactica.

В первой части основные исходные параметры считываются из файла данных SphDsSt4.dat, который представлен в Приложении 1. В этом файле задаются параметры структуры:  $N_3$  – количество периферийных тел;  $smi = mi$  – исходная общая масса структуры;  $pm0$  – часть массы  $mi$ , занимаемая центральным телом;  $A_{Sm}$  – полуось исходной орбиты в астрономических единицах (AU);  $es = e$  – эксцентриситет орбит периферийных тел;  $okf = k_\phi$  – коэффициент исходных углов тел при построении структуры;  $okfv = k_{\phi v}$  – коэффициент исходный углов скоростей, с помощью которого определяется угол поворота орбит;  $eps0$  – угол наклона плоскости  $x_1y_1$  к плоскости условного экватора;  $Rob$  – абсолютная плотность тел;  $Ivr$  – вариант построения структуры;  $dt$  – шаг интегрирования; FIMA5 – название файла начальных условий для программы Galactica;  $Idta$  – дата создания файла. Здесь второе обозначение параметров  $mi$ ,  $k_\phi$  и  $k_{\phi v}$  введено для использования в формулах.

Система Galactica [5] - [6] позволяет рассчитать динамику сферически распределенной структуры и исследовать ее эволюцию. Кроме того, в данной работе она используется для завершения создания структуры. В результате рассмотренных в предыдущем параграфе поворотов будет создана структура, в которой тела на сфере будут организованы по строгому математическому закону (15) - (16), (24) - (26). После их взаимодействия в течение некоторого времени тела равномерно распределятся по сфере. Для этого распределения и используется система Galactica.

Угол  $eps0$  в радианах задает наклон плоскости  $x_1y_1$  к некоторой плоскости, которая названа плоскостью экватора. На этот угол можно поворачивать созданную структуру. Поэтому она будет описываться другими начальными условиями. При исследовании структуры системой Galactica такой поворот позволяет проверить полученные результаты. Шаг интегрирования  $dt$  выражен в безразмерных единицах времени. А плотность тел  $Rob$



в  $\text{кг}/\text{м}^3$  необходима для расчета их радиусов. Радиусы тел используются в программе Galactica при расчете их столкновений.

В файле данных SphDsSt4.dat параметры задаются с 6-ю десятичными знаками. Дополнительно имеется возможность задания коэффициента исходных углов  $k_\varphi$  с любым числом знаков. Для этого используется файл file\_okf.dat. При наличии в нем правильно заданного числа в программе используется считанный из file\_okf.dat коэффициент  $k_\varphi$ .

Кроме исходных параметров в файле SphDsSt4.dat, ряд общих параметров и констант задаются в самой программе SphDsSt4.for (см. Приложении 2). Вторая ее часть начинается с расчета необходимых величин, а именно, общего количества тел  $N$ , массы центрального тела  $m_0$  и массы периферийного тела

$$N = N_3 + 1; \quad m_0 = m_i \cdot pm_0; \quad m_1 = (m_i - m_0) / N_3. \quad (27)$$

По формулам (11) и (14) определяются углы поворота структуры  $\Delta\psi$  и  $\Delta\theta$ , а по (7) рассчитывается  $f_{N_3}$  – вклад воздействия периферийных тел на одно из них. Затем по формулам (6) определяется параметр взаимодействия  $\mu_1$ .

По заданному эксцентриситету  $e$  орбит плоской структуры на основании формулы (9) рассчитывается параметр траектории  $\alpha_1$ . Определяется в размерном виде большая полуось орбиты  $a = A_{Sm} \cdot \text{AU}$ , где AU – астрономическая единица (полуось орбиты Земли). Затем по формуле (10) определяется радиус  $R_p$  перицентра.

Скорость  $v_p$  в перицентрии согласно (5) может быть рассчитана по формуле:

$$v_p = \sqrt{\mu_1 / (\alpha_1 \cdot R_p)}. \quad (28)$$

По формуле (8) определяется период  $P$  обращения тел по орбитам первоначальной плоской структуры.

В файле начальных условий для программы Galactica используются безразмерные величины [5]. Все массы тел отнесены к общей массе системы  $m_{ss} = m_i$ . Время выражается в сотнях периодов  $P$ . Для этого введен коэффициент времени

$$k_t = 1 / (100 \cdot P). \quad (29)$$

А геометрические размеры отнесены к величине

$$A_m = (G \cdot m_{ss} / k_t^2)^{1/3}. \quad (30)$$

Из выражений для величин  $P$ ,  $v_p$  и  $R_p$  следует, что масштабная величина  $A_m$  пропорциональна задаваемой в файле полуоси  $A_{Sm}$ . Поэтому при вариациях полуоси  $A_{Sm}$  безразмерные геометрические величины в файле начальных условий для программы Galactica не изменяются.

После нахождения рассмотренных параметров всем  $l$  периферийным телам, где  $l = 2, 3, \dots, N_3$ , присваиваются координаты (15) и скорости (17) - (19). Следует напомнить, что

это координаты и скорости тела, которое на угол  $\Delta\psi$  отстоит от оси  $x_{l-1}$ . Затем следуют вложенные друг в друга циклы пересчета этих координат и скоростей тел от  $l = 3$  до  $N_3$  в координатную систему  $x_1y_1z_1$  первого тела. Алгоритм пересчета выполнен по формулам (24) – (26) и представлен в программе SphDsSt4.for в Приложении 2. В программе приведены алгоритмы построения структур по третьему и четвертому вариантам, которые будут описаны ниже. Рассмотренный алгоритм является их составной частью.

Результатом работы исполняемого модуля SphDsSt4.exe программы являются файл исходных параметров и начальных условий для системы Galactica, а также информационный файл SphDsSt4Err. В этот файл выдаются сообщения об ошибках в работе программы. При их отсутствии в нем записываются координаты и скорости тел в размерном виде, период обращения  $P$ , минимальные расстояния между телами и параметры из файла SphDsSt4.dat.

Далее рассмотрим варианты создания структур.

### 5. Варианты создания структуры

Описанный выше алгоритм является первым вариантом структуры (I). Эта структура с  $N_3 = 99$ ,  $k_\varphi = 1.72$  и  $k_{\varphi v} = 1$  представлена на рис. 3 в системе координат  $xuz$ , связанной с первым телом. Выше она именовалась как  $x_1y_1z_1$ . Как видно из рис. 3, тела располагаются на окружности в верхней полусфере. Линия их расположения дважды обогнула верхнюю полусферу и на втором обороте тела приблизилась к телам первого оборота. Недостатком этой структуры является то, что тела находятся только в верхней полусфере, и при последующих оборотах они могут накладываться друг на друга.

Во втором варианте программы вектора скорости нечетных тел, начиная с третьего, поворачивались вниз (рис. 2), т.е.  $\Delta\theta < 0$ , а вектора скорости четных тел поворачивались вверх. Вид структуры (II) с  $k_\varphi = 0.8$  показан на рис. 3. Как видно, вектора скорости тел 98 и 99 пересекаются. Ее недостатком являлись парные сближения и столкновения соседних тел при исследовании взаимодействия структуры программой Galactica. После 100 обращений тел в этой структуре было 51 столкновение.

В третьем варианте алгоритма вектора скорости четных тел не только поворачивались вверх на угол  $\Delta\theta$ , но и изменялись на противоположное направление. Как видно из рис. 3, в структуре (III) с  $k_\varphi = 0.8$  вектора скорости соседних тел, например, 98 и 99 направлены в разные стороны. Поэтому при взаимодействии эти тела удаляются друг от друга. В этой структуре за 100 обращений не было ни одного столкновения.

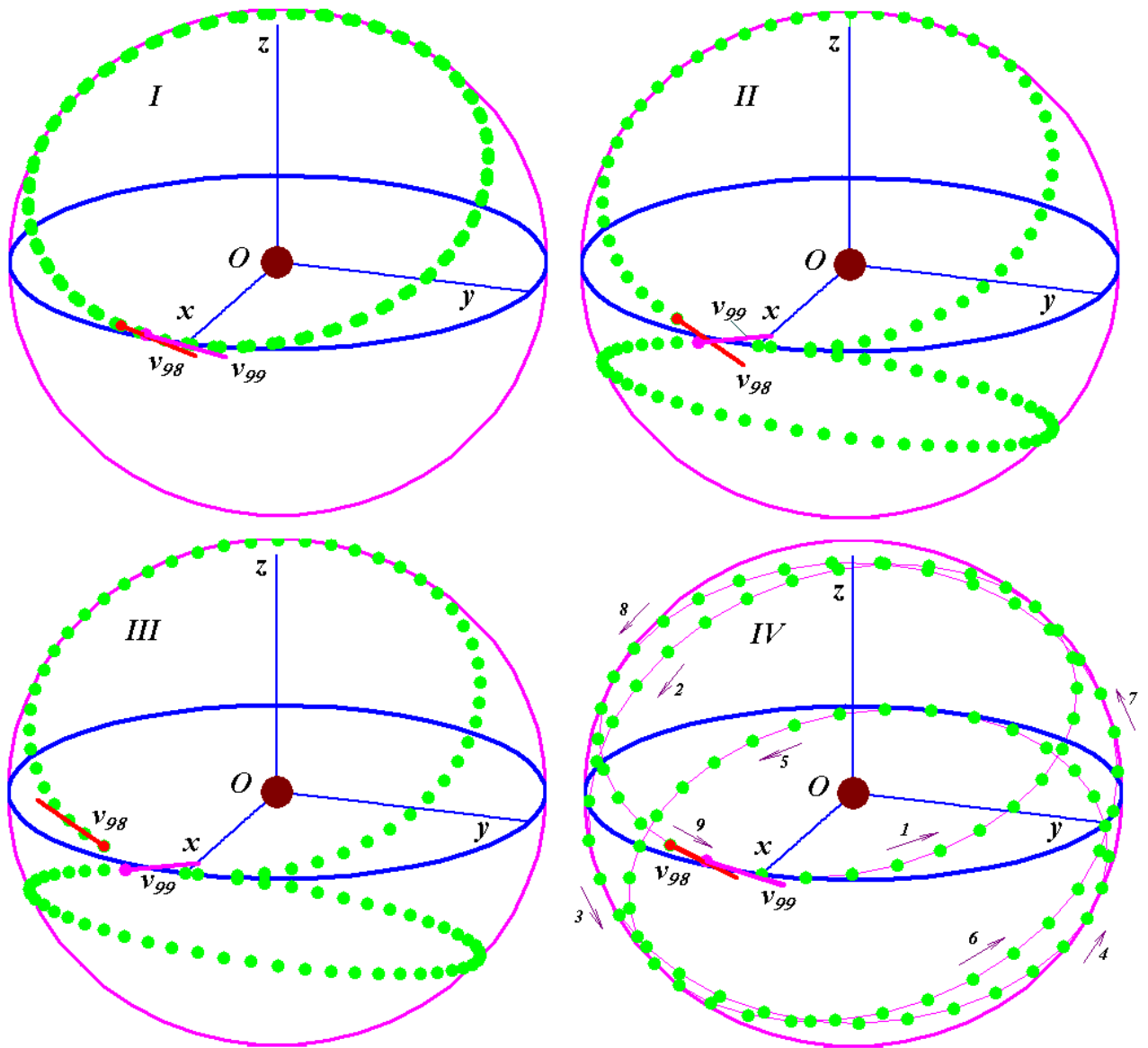


Рис. 3. Четыре варианта: *I*, *II*, *III* и *IV* сферически-распределенной структуры с  $N_3 = 99$  периферийных тел: общая масса структуры  $m_i = 1.99179 \cdot 10^{30}$  кг; масса центрального тела  $m_0 = 1.98912 \cdot 10^{30}$  кг; масса периферийного тела  $m_l = 2.69596 \cdot 10^{25}$  кг; радиус круговых орбит  $a = 149.598$  млн. км; период обращения  $P = 0.99945$  сидерических года; тело  $m_l$  находится на оси  $x$ ; вектора скорости тел 98 и 99 показаны отрезками; стрелками 1, 2, ... 9 показана последовательность расположения периферийных тел в варианте *IV*; сидерический год – период обращения Земли вокруг Солнца по отношению к неподвижным звездам.

В примерах приведенных вариантов на рис. 3. положение второго тела определялось не углом  $\Delta\psi$  согласно формулам (15), а углом  $\Delta\phi$ . Поэтому его расстояние от соседних тел отличается от расстояний других тел с соседними телами. Третий вариант алгоритма без этого недостатка представлен в программе SphDsSt4.for. Как уже отмечалось, он основан на последовательном повороте векторов скорости тел осесимметричной структуры. При этом тела находятся в перигелиях.

Был разработан четвертый алгоритм, в котором каждое  $i$ -ое тело на своей орбите находится на своем полярном угле  $\phi_{0,i}$ , согласно формуле (2). На рис. 1б показано

положение тела  $m_i$  на своей орбите. Полярный радиус  $r_i$  тела определяется формулой (4). Его радиальная скорость согласно [1] равна

$$v_{r,i} = \pm v_p \sqrt{(\alpha_1 + 1)^2 - (\alpha_1 + R_p / r_i)^2} . \quad (31)$$

Радиальная скорость положительна при движении тела от перицентра до апоцентра, и отрицательна – при возвращении к апоцентрию. Трансверсальная скорость запишется так:

$$v_{t,i} = v_p \cdot R_p / r_i \quad (32)$$

Запишем координаты и скорости тела  $m_i$  на координатную систему  $x_i, y_i, z_i$ , проходящую через перицентры  $P_{c,i}$  (рис. 1б):

$$x_{p,i} = r_i \cdot \cos \varphi_{0,i}; \quad y_{p,i} = r_i \cdot \sin \varphi_{0,i}; \quad z_{p,i} = 0; \quad (33)$$

$$v_{xp,i} = v_{r,i} \cdot \cos \varphi_{0,i} - v_{t,i} \cdot \sin \varphi_{0,i}; \quad v_{yp,i} = v_{r,i} \cdot \sin \varphi_{0,i} + v_{t,i} \cdot \cos \varphi_{0,i}; \quad v_{zp,i} = 0, \quad (34)$$

где  $\varphi_{0,i}$  определяется согласно формуле (2).

Как уже отмечалось, в отличие от предыдущих вариантов в четвертом варианте на первоначальной окружности (рис. 1 и рис. 2) находятся не тела  $m_i$ , а перицентры орбит  $P_{c,i}$  тел  $m_i$ . Они располагаются на окружности с интервалом  $\Delta\psi$  (рис. 1). При повороте орбит на угол  $\Delta\theta$  перицентры будут располагаться на сфере (рис. 2). А сами тела  $m_i$  будут располагаться на своих орбитах на угловом расстоянии от перицентров  $\varphi_{0,i}$ . При этом скорости тел  $m_i$  также привязаны к их перицентрам выражениями (33) – (34). Поэтому при повороте орбит координаты и скорости (33) – (34) будут преобразовываться согласно выражениям (24) – (26) от системы координат  $i$ -ой орбиты к  $i - 1$  орбите. В этом случае индекс  $i$  в выражениях (33) – (34) нужно заменить на индекс  $l$ . Весь алгоритм представлен в программе SphDsSt4.for.

По четвертому алгоритму была создана структура с  $N_3 = 99$ ,  $k_\varphi = 1.72$  и  $k_{\varphi v} = 1$ . Она представлена на рис. 3 в виде IV. Здесь тела по линии расположения на сфере, начиная с первого на оси  $x$ , начинают огибать верхнюю полусферу (стрелка 1) с лицевой стороны и завершают ее с тыльной стороны (2). Затем выходят на лицевую сторону нижней полусферы (3), проходят ее внизу (4). Далее проходят по лицевой стороне верхней полусферы (5) и проходят по тыльной стороне нижней полусферы (6). Затем они появляются на верхней полусфере (7), вверху проходят по тыльной стороне (8), а внизу выходят на лицевую сторону (9) и таким образом завершается расположение тела 99 возле 1-ого.

Итак, в этом варианте алгоритма тела располагаются на сфере по линии совершающей три оборота.

При расчете динамики этой структуры с помощью системы Galactica она не разрушалась в течение 10 обращений. После 100 обращений тела равномерно

распределились по сфере. Это новое свойство неизменности структуры в течение десятка обращений представляет значительный интерес. Возникает вопрос: можно ли создать структуру, которая бы длительно не изменялась?

В рассмотренных выше структурах эксцентриситет  $e = 0$ . Если орбиты эллиптические ( $e \neq 0$ ), то созданная сферически распределенная структура в третьем варианте будет пульсирующая, так как все тела одновременно будут совершать движения от перицентра до апоцентра и обратно. В четвертом варианте все тела первоначально равномерно распределены по эллиптической орбите, поэтому такая явная пульсация отсутствует.

### **6. Динамика и эволюция распределенных по сфере структур**

Движение тел в структурах изучалось в результате интегрирования дифференциальных уравнений их движения с помощью системы Galactica. Рассматривались структуры с двумя, 11, 99 и 999 периферийных тел. Базовые параметры были: масса центрального тела равна массе Солнца, масса периферийных тел равна массе всех планет, а радиус сферы равнялся полуоси Земной орбиты. Период обращения периферийных тел при этих условиях близок к 1 году.

В случае двух периферийных тел, обращающихся во взаимно-перпендикулярных плоскостях система исследовалась за время 1000 обращений. Плоскости орбит изменяются, и изменяется радиус орбит. В течение 500 обращений относительное отклонение радиуса орбиты  $\delta r$  колеблется в 4-ом знаке. Затем оно растет и к 1000-ому обращению достигает 18,7%. Радиус орбиты второго тела к этому моменту уменьшается на 10,8%.

Такая система из трех тел является ассиметричной, поэтому происходят ее изменения. В симметричной системе, когда периферийные тела находятся в одной плоскости, система существует без изменения практически неограниченное время.

Структура из 11 периферийных тел, созданная по варианту III, существовала без изменения на всем исследованном интервале в 100 обращений. К 100-му обращению наибольшие изменения радиуса орбит не превышали  $\delta r = \pm 0.06$ .

Динамика структур из 99 периферийных тел вкратце рассматривалась ранее при различных вариантах их построения. Кроме этих структур была создана структура с эллиптическими орбитами с эксцентриситетом  $e = 0.3$ . В процессе движения структура увеличивалась и уменьшалась в размерах. К 100-му обращению тела равномерно распределились по сфере, и пульсации по размеру структуры прекратились.

Далее рассматривались структуры с разными массами. В предыдущих структурах доля массы центрального тела была  $m_0 = 0.99866$ . При увеличении масс периферийных

тел до половины массы системы ( $pm0 = 0.5$ ), центр масс структуры существенно сдвигается от центра тела  $m_0$ . Скорости периферийных тел в момент создания структуры уменьшаются с 8.6 до 8 относительных единиц. Однако из-за больших масс периферийных тел происходит двух их них сближение за время  $T = 1.4 \cdot 10^{-4}$  и первоначальная конфигурация структуры нарушается. Здесь  $T$  – безразмерное время, единица которого равна сидерическому столетию, т.е. 36525.636042 дней. К 100 обращениям в структуре было 11 столкновений, и размер ее увеличился в 400 тыс. раз, т.е. она полностью разрушилась.

При меньшей массе периферийных тел ( $pm0 = 0.9$ ) они за три обращения распределились в пространстве, при этом размер системы увеличился не намного. С дальнейшим движением размер системы до  $T = 0.44$  остается без изменения. К 100 обращениям в системе произошли три слияния, и она существенно увеличилась в размере.

В предыдущих двух структурах шаг интегрирования был  $dT = 1 \cdot 10^{-7}$ . При дальнейшем уменьшении массы периферийных тел ( $pm0 = 0.95$ ) структура была более стабильной, поэтому шаг интегрирования был  $dT = 1 \cdot 10^{-6}$ . В этой структуре к 100 обращениям слияний было 7, причем одно слияние было с центральным телом, а четыре тела вышли далеко за границы структуры.

В момент создания структуры (рис. 3) расстояния между телами – наименьшие. Затем в процессе движения тел они распределяются по сфере и расстояния увеличиваются. Поэтому при больших массах периферийных тел их взаимодействие будет разрушать структуры прежде, чем тела распределятся по сфере. Поэтому были увеличены массы периферийных тел в уже созданной структуре после 100 ее обращений. Координаты новой структуры остались прежними, а скорости умножены на коэффициент  $k_{ver}$ . Этот коэффициент определялся как отношение скорости периферийного тела в осесимметричной плоской структуре с новыми массами к скорости в структуре с прежними массами. Таким образом была создана структура с  $pm0 = 0.5$ . Динамика ее исследовалась с шагом  $dT = 1 \cdot 10^{-7}$  до  $T = 0.033$ , т.е. за три обращения периферийного тела. За это время было одно столкновение периферийного тела с центральным телом, и размер системы немного увеличился. То есть, устойчивость этой структуры существенно возросла, по сравнению с ранее рассматриваемой структурой с  $pm0 = 0.5$ .

Таким же образом была создана структура с  $pm0 = 0.9$ . Ее движение было рассмотрено с шагом интегрирования  $dT = 1 \cdot 10^{-6}$  за  $T = 1$  столетие. За это время было слияние тела 85 с телом 73, которое не повлияло на изменение структуры. А сближение тела 79 с центральным телом привело к ее существенным изменениям. Это тело приобрело большую скорость, и было выброшено из структуры. Центральное тело вместе

с несколькими телами было выброшено из структуры в обратном направлении. А структура с оставшимися телами увеличивается в размерах.

Механизм сближения периферийного тела с центральным телом, с последующим выбросом из структуры, детально рассмотрен на примере кулоновского взаимодействия многослойных структур [8] – [9]. Этот механизм справедлив и в рассматриваемом случае.

Выполненные исследования с разными массами периферийных тел свидетельствуют, что при  $pt\theta < 0.95$  создать сферически-распределенную структуру проблематично при заданном радиусе структуры, равном радиусу земной орбиты. Для дальнейшего увеличения массы периферийных тел, необходимо увеличивать радиус структуры.

### 7. Динамика и эволюция структуры из 1000 тел

Основные исследования динамики и эволюции структуры были выполнены при общем количестве тел равным 1000. Такое количество тел приближается к количеству тел в шаровых звездных скоплениях. В качестве примера на рис. 4 приведено шаровое звездное скопление М53 в созвездии Волос Вероники [10]. Оно находится на расстоянии 60000 световых лет от центра Галактики и примерно на таком же расстоянии от Солнечной системы.



Рис. 4. Шаровое звездное скопление М 53 (или NGC 5024) в созвездии Волос Вероники [10].

В центральных областях шаровых звездных скоплениях, концентрация звезд составляет 100-1000 звезд на кубический парсек ( $1 \text{ пк} = 206264.8 \text{ а. е.}$ ), в то время как в окрестностях Солнца – порядка  $0.13 \text{ 1/пк}^3$ , т.е. в 700-7000 раз меньше. Диаметры скоплений – 20-60 пк, а их массы –  $10^4$ - $10^6$  масс Солнца. В центре шаровых скоплений имеются массивные звезды, массой порядка  $10^4$  и более масс Солнца. Из-за высокой

плотности звезд, в скоплениях часто происходят близкие прохождения звезд и их столкновения. При большом увеличении, как видно из рис. 4, шаровое скопление не имеет четкой границы, и представляет собой структуру с плавным убыванием количества звезд от его центра.

Была создана структура по третьему варианту (файл Str999c.dat) с  $N_3 = 999$  и параметрами, приведенными на рис. 5. При таком количестве тел расстояния между ними небольшие. Для первых тел плоскости орбит отличаются также мало, а вектора скорости соседних тел направлены противоположно. Это приводит их к столкновению. Эти задачи считались с шагом  $dT = 1 \cdot 10^{-7}$ . После 2000 шагов происходило столкновение тела 2 с телом 10. После удаления тела 2 и создания новой структуры, эта ситуация повторилась для тела 4. Таким образом, удалением из структуры Str999c.dat тел 2, 4, 8, 10 и 15 была создана структура Str994c.dat. Движение тел этой структуры исследовалось системой Galactica с шагом  $dT = 1 \cdot 10^{-7}$ .

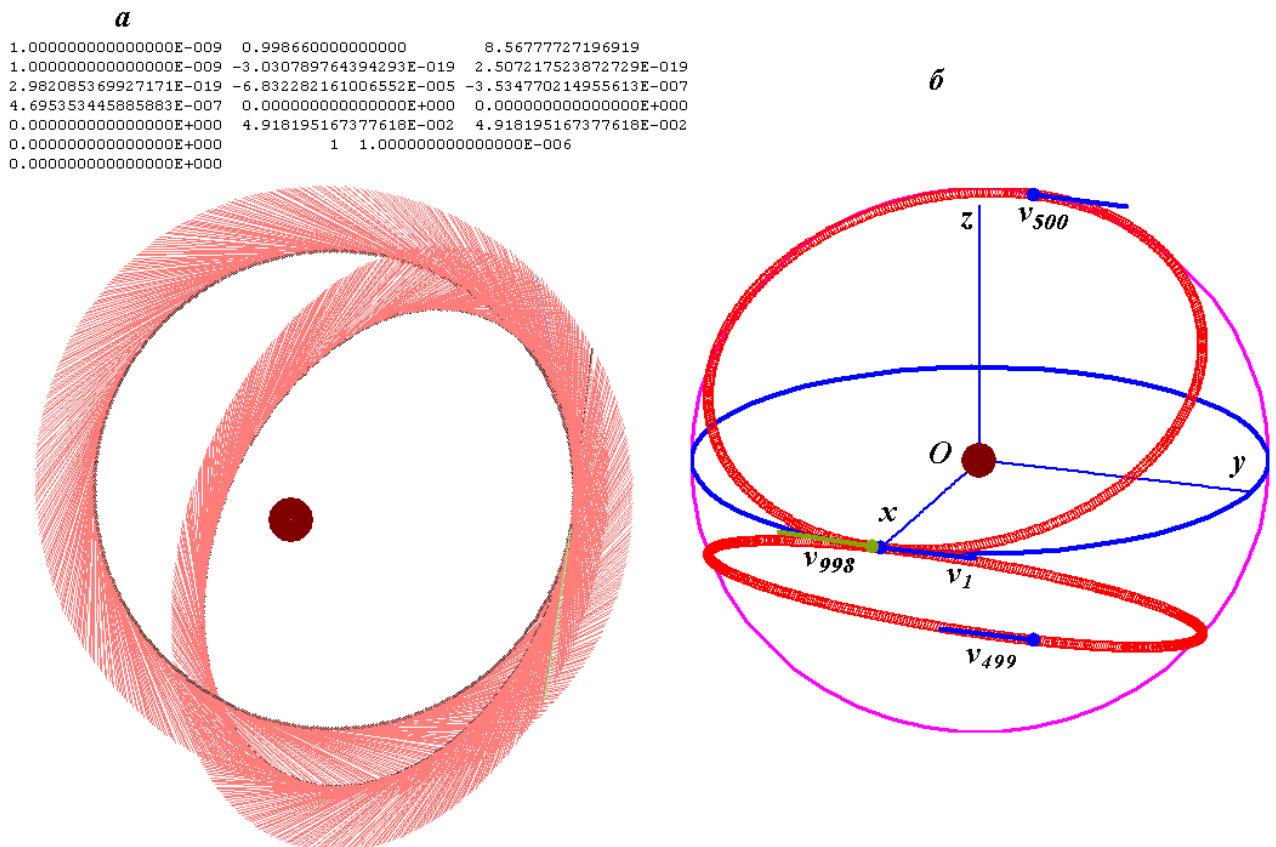


Рис. 5. Сферически-распределенная структура по варианту III с  $N = 1000$ ,  $k_\varphi = 0.86$ ,  $k_{\varphi v} = 1$ ,  $R = 1$  а.е.,  $P_{rd} = 1$  год и с массой центрального тела равной массе Солнца: *a* – проекция на горизонтальную плоскость после расчета движения структуры программой Galactica за один шаг по времени; числами показана динамические параметры структуры и характеристики вычислительного процесса [5]; *б* – вид в системе координат  $xyz$  на фронтальную плоскость: линиями у тел 1, 499, 500 и 998 показаны вектора скорости.



По мере движения тел, первоначальные их положения на двух окружностях (рис. 5) изменялись, и тела более равномерно распределялись по сфере. При этом происходили столкновения отдельных периферийных тел, и они объединялись в тело с удвоенной массой. К телу с удвоенной массой может присоединиться еще одно тело и получится тело с утроенной массой. Кроме того, периферийное тело может столкнуться с центральным телом. В табл. 1 приведена хроника столкновений за исследованный период  $T = 1.65$  столетия.

Таблица 1. Динамика столкновений тел сферически распределенной структуры Str994c.dat за 165 обращений:  $k_{imp}$  – количество столкновений;  $k_{2m1}$  – количество тел с удвоенной массой;  $k_{3m1}$  – количество тел с утроенной массой;  $k_{m0}$  – количество тел, столкнувшихся с центральным телом.

Параметры	Изменение параметров по времени $T$														
	5	10	15	20	60	65	70	80	90	95	100	105	125	150	165
$T$ , лет	5	10	15	20	60	65	70	80	90	95	100	105	125	150	165
$k_{imp}$	40	45	46	49	49	51	54	54	55	55	56	57	58	59	61
$k_{2m1}$	32	35	34	37	37	39	40	40	41	41	40	41	42	43	45
$k_{3m1}$	2	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5
$k_{m0}$	4	4	4	4	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6

Как видно из табл. 1, основное количество столкновений  $k_{imp} = 40$  произошло за первые 5 обращений, что составляет  $2/3$  столкновений за весь период в 165 обращений. При этом образовалось 32 тела с удвоенной массой и 2 тела с утроенной. А четыре периферийных тела столкнулись с центральным телом. Для точного определения: тела, с какими массами образовали тело тройной массы и столкнулись с центральным телом, – нужно проводить логический анализ этих результатов. При этом необходимо иметь в виду, что в программе Galactica при столкновении двух тел образованному телу присваивается номер тела с большей массой, а масса меньшего тела приравнивается нулю. Поэтому, здесь количество столкновений  $k_{imp}$  определяется по количеству тел с нулевой массой.

За дальнейшие 5 лет, как видно из табл. 1 произошло 5 столкновений. При этом образовалось одно тело с тройной массой. За 5 лет с 10 до 15 обращения было одно столкновение, с 15 до 20 – три столкновения, а за 40 лет с 20 до 60 – не было столкновений. Не было также столкновений за 10-летний промежуток с 70 по 80 и с 90 по 95. В остальные пятилетия были по 1-2 столкновения.

Образовавшаяся структура с распределением тел по всей сфере показана на рис. 6 после 100 обращений. Расстояния периферийных тел от центрального тела преимущественно не отличается от первоначального расстояния на 3%. Периоды их обращений близки к 1 году. Ни одно тело не было выброшено из структуры. Только одно тело, а именно тело 2 приобрело большую эллиптичность орбиты, но период его

обращения существенно не изменился. Апоцентрий его орбиты находится на расстоянии  $L$  = 2.8 радиуса структуры (на рис. 6а расстояние  $L$  до тела 2 уменьшено в 2 раза).

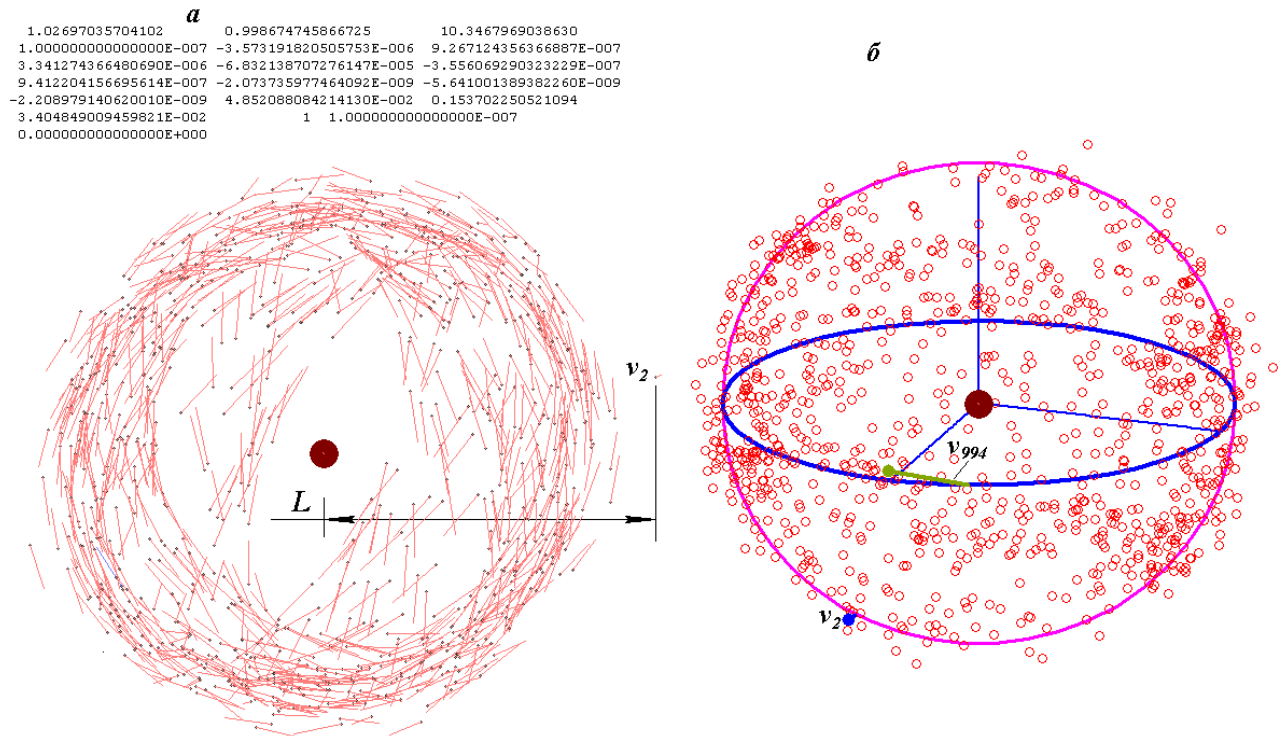


Рис. 6. Сферически-распределенная структура Str994c.dat с  $N3 = 994$  после движения за время  $T = 1.027$  столетия. На рисунке расстояние  $L$  до тела 2 уменьшено в 2 раза. Период обращения тела 2 близок к 1 году;  $a$  – проекция на горизонтальную плоскость при расчета программы Galactica [5];  $b$  – вид в системе координат  $xuz$  на фронтальную плоскость: вектора скорости тел 2 и 999 показаны отрезками.

Представленное на рис. 6 распределение тел по сфере уже сформировалось к 20 обращению. Второе тело вышло за границы первоначальной сферы за первые 5 обращений. Поэтому дальнейшее развитие структуры до 165 обращения можно рассматривать уже как стабильное существование сферически распределенной структуры. Временами происходят столкновения тел, и они объединяются в одно тело. Но чем дольше живет структура, тем меньше таких столкновений. В этой структуре тела с соседними номерами изначально по орбитам обращаются в разные стороны (см. рис. 5). Однако, столкновений на встречных скоростях не происходит. Все столкновения происходят при попутном сближении при пересекающихся орбитах тел. Только у второго тела, по-видимому, сближение произошло при встречных скоростях и, в результате изменения вектора скорости, оно приблизилось к центральному телу. После взаимодействия с ним оно перешло на вытянутую эллиптическую орбиту.

Была рассмотрена динамика и эволюция еще двух структур. Структура St4D999d.dat с 999 периферийными телами была создана по варианту IV с коэффициентом  $k_\varphi = 1.72$ . Она просчитана за  $T = 1.9$  столетия с шагом  $dT = 1 \cdot 10^{-7}$ . При этом коэффициенте  $k_\varphi$  расстояния между телами одинаковые, за исключением тел 999 и 1: между ними

расстояние в 4 раза больше. К пяти обращениям тела распределились по сфере, и было столкновений  $k_{imp} = 158$ , которые привели к образованию тел двойной массы  $k_{2ml} = 141$ , тройной массы  $k_{3ml} = 1$  и четверной массы  $k_{4ml} = 5$ . К 10 обращениям параметры столкновений были  $k_{imp} = 160$ ;  $k_{2ml} = 140$ ;  $k_{3ml} = 1$ ;  $k_{4ml} = 6$ . К 100 обращениям эти параметры изменились незначительно:  $k_{imp} = 171$ ;  $k_{2ml} = 139$ ;  $k_{3ml} = 3$ ;  $k_{4ml} = 7$ ;  $k_{6ml} = 1$ . Еще меньшие изменения произошли за последующие 90 обращений до  $T = 1.9$  столетия:  $k_{imp} = 173$ ;  $k_{2ml} = 139$ ;  $k_{3ml} = 3$ ;  $k_{4ml} = 6$ ,  $k_{6ml} = 2$ .

В этой структуре после 70 обращения появилось тело с  $6 \cdot m_1$ , и не было ни одного столкновения с центральным телом. На рис. 7,2 эта структура показана для сравнения с предыдущей структурой (рис. 7,1) после 100 обращений. Как уже отмечалось, эта структура сформировалась за 5 обращений, т.е. значительно раньше, чем предыдущая. В ней не было столкновений с центральным телом и не было больших выбросов периферийного тела.

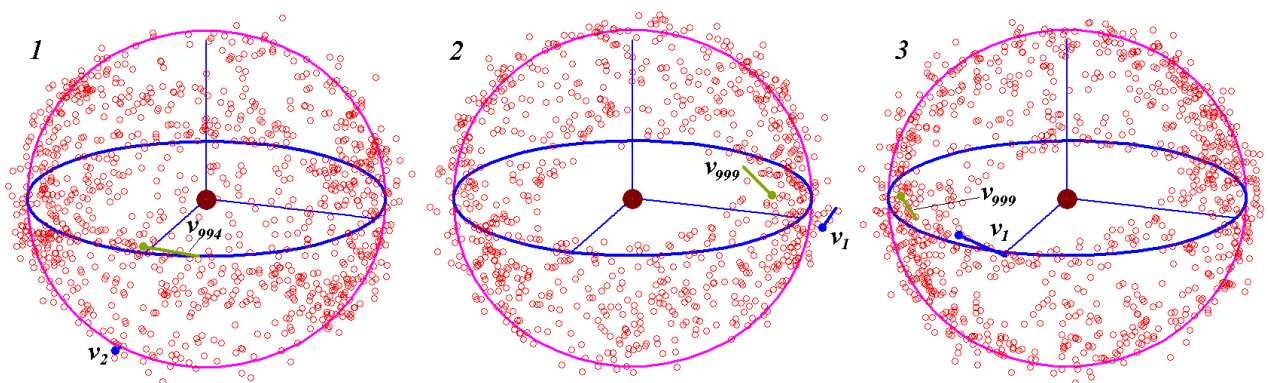


Рис. 7. Сферически-распределенные структуры с  $N=1000$ , первоначально образованные по разным вариантам, после 100 обращений периферийных тел: 1 – по варианту III; 2 – по варианту IV; 3 – по варианту IV с уточнением расстояния между телами 1 и  $N_3$ .

Структура St4D999e.dat была создана по четвертому варианту с дальнейшим уточнением. Коэффициент  $k_\phi$  подобран так, чтобы расстояние между телами 999 и 1 совпало с остальными расстояниями между телами. Далее такие структуры рассматриваются как регулярные, и по этой структуре приведена более детальная информация. Эта структура, представленная на Рис. 7,3, более стабильна, чем предыдущие. К 5-и обращениям больше половины тел находились на линии их первоначального образования. Тем не менее, к 10 обращениям все тела равномерно распределились по сфере. Столкновений в этой структуре было на порядок меньше. Например, к 5-ти обращениям  $k_{imp} = 14$  и  $k_{2ml} = 14$ ; к 100 обращениям  $k_{imp} = 26$ ,  $k_{2ml} = 24$  и  $k_{3ml} = 1$ . При этом с 95 по 160 обращения новых столкновений не было.

Таким образом, первоначальная регулярная форма создания структуры приводит в дальнейшем к более стабильной структуре с равномерным распределением всех тел по сфере.

Сравнивая вид полученных структур на рис. 7 с видом шарового звездного скопления на рис. 4, можно отметить следующее. Тела в структурах расположены компактнее, нежели в шаровом скоплении. Это объясняется «рукотворным» характером формирования структуры: первоначальная ее организация уменьшает количество тесных сближений, которые приводят в дальнейшем к большему разбросу тел по пространству.

Имеются также отличия структуры и звездного скопления, которые обусловлены самой моделью структуры: это неполная центральная симметрия структуры и ее разреженность в центральной области. При этом в менее регулярной структуре I по варианту III центральная область более заполнена. Увеличить концентрацию тел в центре можно созданием многослойных сферически распределенных структур. В многослойных структурах доля массы центрального тела  $m_0$  может быть уменьшена. Например, в структурах из 15 слоев [3] – [4] она равна порядка  $m_0 = 0.006$ .

Что касается эволюции структуры и звездного скопления, то они подобны. Эти объекты могут существовать длительно без изменения. Временами могут происходить сближения тел, которые будут приводить к изменению радиуса их орбит или их столкновению и слиянию. И чем дольше существует структура, тем меньше таких сближений.

### 8. Распределенные по сфере регулярные структуры

При создании первых структур с  $N_3 = 99$  телами коэффициент  $k_\varphi$  начального угла между телами был выбран так, чтобы тело 99 было на таком же угловом расстоянии от тела 1, как и расстояние между двумя соседними телами. Однако этот выбор был неточным. Как видно из варианта IV рис. 3 расстояние между 99 телом и телом 1 больше чем между другими соседними телами. Поэтому эта начальная асимметрия между 99 и 1 телами со временем приводит к ее увеличению и разрушению структуры. Чтобы это не происходило необходимо, чтобы угловое расстояние между телом  $N_3$  и первым телом с высокой точностью было равно расстоянию между соседними телами.

Был разработан следующий порядок расчета коэффициента  $k_\varphi$ . В алгоритме создания структуры было введено тело  $N_3+1$ . При точном значении  $k_\varphi$  тело  $N_3+1$  будет совпадать с телом 1. Согласно (1) координата тела I  $y = 0$  (см. рис. 1 и рис. 2). При неточном значении коэффициента  $k_{\varphi 1}$  тело  $N_3+1$  будет иметь координату  $y_1$ , при втором неточном значении  $k_{\varphi 2}$  координата будет  $y_2$ . Тогда уточненное значение коэффициента  $k_{\varphi c}$  находим по интерполяционной формуле

$$k_{\varphi c} = k_{\varphi 2} - y_2 \cdot \frac{k_{\varphi 2} - k_{\varphi 1}}{y_2 - y_1} \quad (35)$$

За 5-6 уточнений по формуле (35) коэффициент  $k_{\varphi c}$  определяется до 15 десятичного знака.

На рис. 8 показана структура с  $N_3 = 99$  и  $k_\phi = 1.732341654683966$  с уточненными 16 десятичными знаками. Ее динамика просчитана программой Galactica за 100 обращений. Вид структуры за это время не изменился. Таким образом, четвертый алгоритм позволяет создавать регулярные и равномерно распределенные по сфере структуры, которые длительно не изменяются.

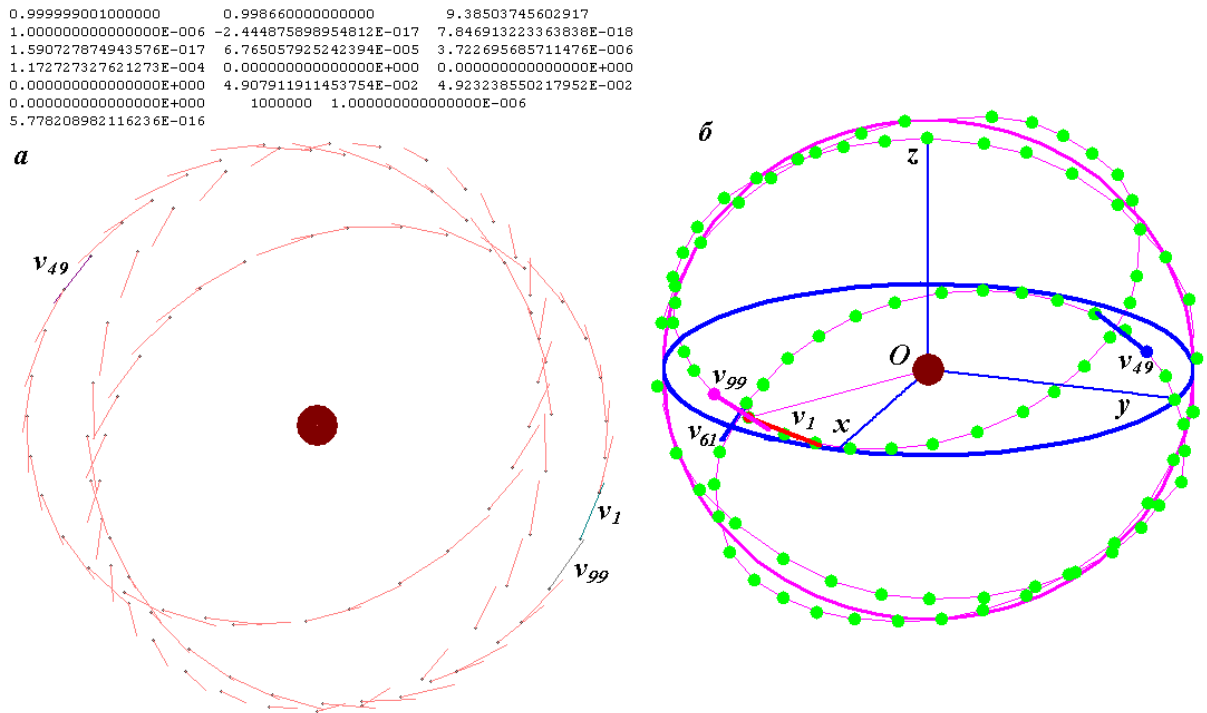


Рис. 8. Сферически-распределенная структура St4D99be.dat с одинаковыми расстояниями между соседними телами после расчета ее движения программой Galactica за 100 лет:  $N_3 = 99$ ; *a* – вид на экране дисплея: числами показана динамические параметры структуры и характеристики вычислительного процесса [5]; *b* – вид в системе координат *xuz*: вектора скорости тел 1, 49, 61 и 99 показаны отрезками. Первое тело с вектором скорости  $v_1$  за время интегрирования  $T = 1$  столетие не доходит до оси *x*, т.к. период обращения ( $Prd = 0.999447$  года) меньше 1 года.

## 9. Аналитическая динамика сферически распределенной регулярной структуры

Если сферически распределенная регулярная структура не изменяется во времени, то каждое ее тело совершает одно и то же движение. Найдем аналитические выражения для них, т.е. законы изменения координат тел  $x_i(t)$ ,  $y_i(t)$ ,  $z_i(t)$ . Каждое из периферийных тел  $m_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, N_3$  движется в своей плоскости по эллиптической орбите, согласно (8), с одинаковым периодом  $P$ . В начальный момент времени  $t = 0$  тела находятся в положениях, которые определились в результате построения структуры. Так как в последующие моменты времени они находятся на эллиптических орбитах, то их движение может быть точно определено по законам эллиптического движения.

Плоскость орбиты тела  $B_i$  на рис. 9 показана линией 3, а его орбита – линией 4. Перигентрий орбиты  $P_{c,i}$  находится на сфере  $I$ . В системе координат *xuz* восходящий узел  $\Omega_i$  плоскости орбиты орбиты определяется углом  $\varphi_{\Omega,i} = B_i \Omega_i$ . К плоскости *xOy* орбита

наклонена под углом  $i_{n,i}$ . Положение перицентра на сфере  $1$  определено углом  $\varphi_{p,i} = \Omega_i P_{c,i}$ . Положение тела  $B_i$  на орбите  $4$  определено полярными координатами  $r_i$  и  $\varphi_i$ , которые связаны с орбитальной системой  $x_{o,i}y_{o,i}$ . Ось  $x_{o,i}$  проходит через перицентр  $P_{c,i}$  орбиты. Эти же полярные координаты  $r_i$ ,  $\varphi_i$  и радиус перицентра  $R_p$  показаны на рис. 1б. Уравнение эллиптической траектории выражено формулой (4), а декартовы координаты тела  $B_i$  – выражением (33). Перепишем их в соответствии с новыми обозначениями:

$$x_{o,i} = r_i \cdot \cos \varphi_i; \quad y_{o,i} = r_i \cdot \sin \varphi_i; \quad z_{o,i} = 0, \quad (36)$$

где  $r_i$  по формуле (4) определяется в зависимости от  $\varphi_i$ .

Итак, в координатной системе  $x_{o,i}y_{o,i}z_{o,i}$ , связанной с плоскостью орбиты, определяются координаты всей структуры в зависимости от угла  $\varphi_i$ . В начальный момент  $t = 0$  углы  $\varphi_i$  определяются выражениями (2) – (3). Пересчитаем координаты (36) в координатную систему  $x_{\Omega,i}y_{\Omega,i}z_{\Omega,i}$  (см. рис. 9):

$$x_{\Omega,i} = x_{o,i} \cdot \cos \varphi_{p,i} - y_{o,i} \cdot \sin \varphi_{p,i}; \quad (37)$$

$$y_{\Omega,i} = x_{o,i} \cdot \sin \varphi_{p,i} + y_{o,i} \cdot \cos \varphi_{p,i}; \quad (38)$$

$$z_{\Omega,i} = 0. \quad (39)$$

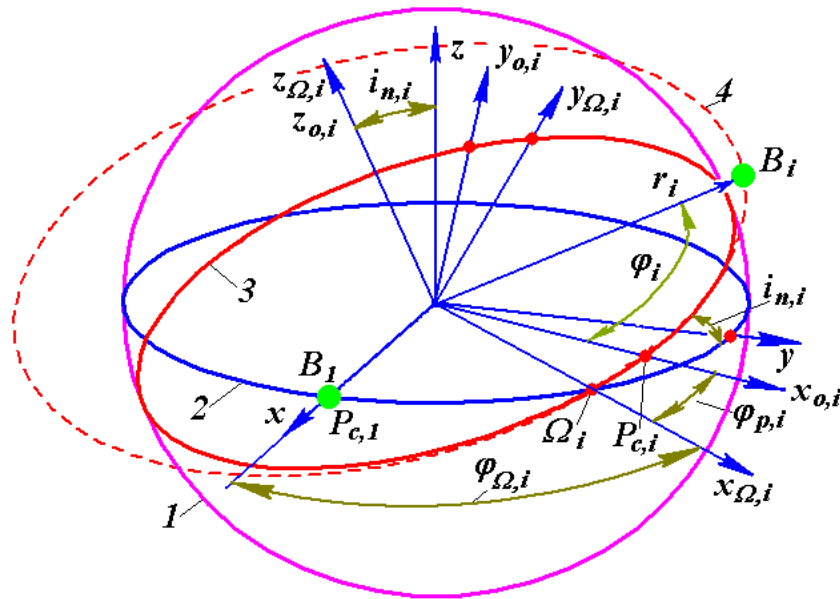


Рис. 9. Орбитальные параметры сферически распределенной регулярной структуры:  $1$  – сфера расположения перицентров орбит тел;  $2$  – плоскость орбиты тела  $B_1$ ;  $3$  – плоскость орбиты тела  $B_2$ ;  $4$  – орбита тела  $B_2$ ;  $\varphi_{p,i}$ ,  $\varphi_{\Omega,i}$  и  $i_{n,i}$  – углы перицентра  $P_{c,i}$ , восходящего узла  $\Omega_i$  и наклона орбиты тела  $B_i$ , соответственно.

Координаты (37) – (39) спроектируем на оси координат системы  $xuz$ . Выражениями (21) – (23) представлены проекции системы координат  $x_2y_2z_2$  согласно рис. 2, аналогичной системе  $x_{\Omega,i}y_{\Omega,i}z_{\Omega,i}$  с помощью углов  $\Delta\psi$  и  $\Delta\theta$ . В нашем случае они соответствуют углам  $\Omega_i$  и  $i_{n,i}$ , соответственно. Поэтому перепишем преобразования (21) – (23) для нашего случая:

$$x_i = x_{\Omega,i} \cdot \cos \varphi_{\Omega,i} - y_{\Omega,i} \cdot \sin \varphi_{\Omega,i} \cdot \cos i_{n,i}; \quad (40)$$

$$y_i = x_{\Omega,i} \cdot \sin \varphi_{\Omega,i} + y_{\Omega,i} \cdot \cos \varphi_{\Omega,i} \cdot \cos i_{n,i}; \quad (41)$$

$$z_i = y_{\Omega,i} \cdot \sin i_{n,i}. \quad (42)$$

Итак, выражениями (40) – (42) определяются положения тел сферически распределенной структуры, если известны орбитальные параметры  $\varphi_{p,i}$ ,  $\varphi_{\Omega,i}$  и  $i_{n,i}$  всех ее тел.

Для определения орбитальных параметров рассмотрим геометрию последовательного построения сферически распределенной структуры (см. рис. 10). В перицентриях  $P_{c,i}$  орбит тел, начиная со второго, плоскости орбит поворачиваются на угол  $\Delta\theta$  по отношению к плоскости орбит предыдущих тел. Восходящие узлы  $\Omega_i$  орбит тел лежат в точке пересечения круга плоскости орбиты  $i$ -того тела с кругом плоскости орбиты первого тела. Как видно из рис. 10, орбитальные параметры первых двух тел запишутся так:

$$\varphi_{p,1} = 0; \quad \varphi_{\Omega,1} = 0; \quad i_{n,1} = 0; \quad \varphi_{p,2} = 0; \quad \varphi_{\Omega,2} = \Delta\psi; \quad i_{n,2} = \Delta\theta. \quad (43)$$

А значения орбитальных параметров всех последующих тел зависит от сферического треугольника  $\Omega_{i-1}\Omega_iP_{c,i}$ . Обозначим орбитальные параметры тела  $B_{i-1}$ :

$$\varphi_{p,i-1} = \Omega_{i-1}P_{c,i-1}; \quad \varphi_{\Omega,i-1} = P_{c,1}\Omega_{i-1}; \quad i_{n,i-1} = \pi - \Omega_{i-1}. \quad (44)$$

Параметры орбит тел  $B_1$  и  $B_2$  согласно (43) известны, что идентично известности параметров орбиты тела  $B_{i-1}$  при  $i < 3$ . Для остальных тел  $i \geq 3$  параметры будут определяться однотипно в зависимости от параметров тела  $i - 1$ . В сферическом треугольнике  $\Omega_{i-1}\Omega_iP_{c,i}$  известны два угла  $\angle P_{c,i} = \Delta\theta$  и  $\angle \Omega_{i-1}$  и сторона

$$P_{c,i}\Omega_{i-1} = P_{c,i}P_{c,i-1} + P_{c,i-1}\Omega_{i-1} = \Delta\psi + \varphi_{p,i-1}. \quad (45)$$

По теореме косинусов находим угол  $\Omega_i$

$$\Omega_i = \arccos(-\cos \Delta\theta \cdot \cos i_{n,i-1} + \sin \Delta\theta \cdot \sin i_{n,i-1} \cdot \cos(\Delta\psi + \varphi_{p,i-1})). \quad (46)$$

В треугольнике  $\Omega_{i-1}\Omega_iP_{c,i}$  по теореме синусов определяем стороны

$$\Omega_{i-1}\Omega_i = \arcsin \frac{\sin \Delta\theta \cdot \sin \Omega_{i-1}P_{c,i}}{\sin \Omega_i}; \quad (47)$$

$$\Omega_iP_{c,i} = \arcsin \frac{\sin i_{n,i-1} \cdot \sin \Omega_{i-1}P_{c,i}}{\sin \Omega_i}. \quad (48)$$

С помощью полученных выражений можем записать орбитальные параметры тела  $B_i$

$$\varphi_{p,i} = \Omega_iP_{c,i} = \arcsin \frac{\sin i_{n,i-1} \cdot \sin(\Delta\psi + \varphi_{p,i-1})}{\sin(\pi - i_{n,i})}; \quad (49)$$

$$\varphi_{\Omega,i} = P_{c,1} \Omega_i = \varphi_{\Omega,i-1} + \Omega_{i-1} \Omega_i = \varphi_{\Omega,i-1} + \arcsin \frac{\sin \Delta \theta \cdot \sin(\Delta \psi + \varphi_{p,i-1})}{\sin(\pi - i_{n,i})}; \quad (50)$$

$$i_{n,i} = \pi - \Omega_i = \pi - \arccos(-\cos \Delta \theta \cdot \cos i_{n,i-1} + \sin \Delta \theta \cdot \sin i_{n,i-1} \cdot \cos(\Delta \psi + \varphi_{p,i-1})). \quad (51)$$

Формулами (49) – (51) последовательно определяются орбитальные параметры тел от  $B_3$  до  $B_{N3}$ . В регулярной структуре тело  $B_{N3+1}$  совпадает с телом  $B_1$ . Поэтому параметры орбиты этого тела должны быть

$$\varphi_{p,N3+1} = 0; \quad \varphi_{\Omega,N3+1} = 0; \quad i_{n,N3+1} = 0, \quad (52)$$

Здесь  $\varphi_{p,N3+1} = 0$  и  $\varphi_{\Omega,N3+1} = 0$  означает, что эти величины кратны  $2\cdot\pi$ . Условие (52) является проверочным.

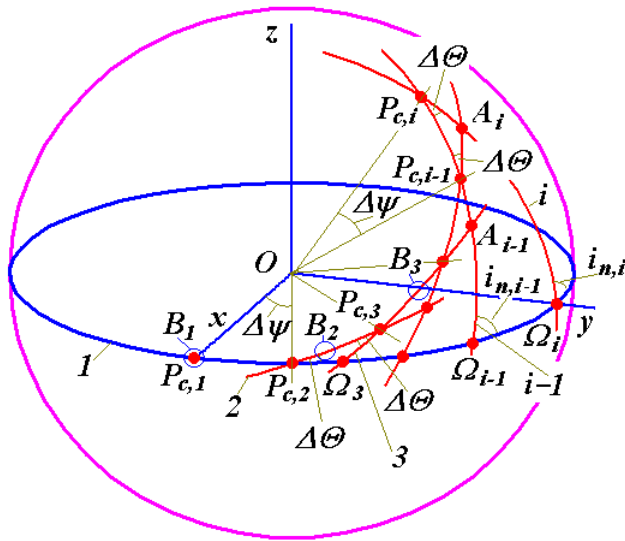


Рис. 10. Геометрия последовательного построения сферически-распределенной структуры: 1, 2, 3, ..., i-1, i – плоскости орбит соответствующих тел;  $P_{c,i}$  – перицентрий орбиты i-того тела;  $\Omega_i$  – восходящий узел орбиты i-того тела;  $i_{n,i}$  – угол наклона орбиты i-того тела;  $B_1, B_2$  и  $B_3$  – положения первых трех тел.

Итак, выражения (49) – (51) совместно с (43) полностью определяют параметры орбит тел сферически-распределенной структуры в зависимости

от углов  $\Delta\psi$  и  $\Delta\theta$  ее построения. А декартовы координаты тел  $x, y, z$  описываются выражениями (40) – (42). Последние, согласно (36) и (4), зависят от углов положения тел  $\varphi_{0,i}$ . Как уже отмечалось, в начальный момент  $t = 0$  углы  $\varphi_{0,i}$  определяются выражением (2). Введем обозначения изменяющегося во времени угла

$$\varphi_{t,i}(t) = \varphi_{0,i} + \varphi_i(t), \quad (53)$$

где  $\varphi_i(t)$  – изменяющаяся со временем часть полярного угла движущегося i-того тела.

Для эллиптического движения зависимость полярного угла от времени получена в виде обратной зависимости  $t_i = f(\varphi_{t,i}(t))$ . В работах [11] - [12] приведен алгоритм в среде MathCad по расчету  $\varphi_{t,i}(t)$  в зависимости от времени. С его помощью можно рассчитать изменение угла согласно (53) для последовательных моментов времени. Тогда уравнения (40) – (42) и (49) – (51) представят динамику сферически-распределенной регулярной структуры.

Для эллиптического движения зависимости  $\varphi_i(t)$  будут для каждого тела  $B_i$  свои. Это обусловлено тем, что тела первоначально находятся в разных частях эллипса. Для



круговых орбит изменение полярного угла  $\varphi_i(t)$  одинаково во всех частях окружности. Поэтому изменение угла со временем согласно (53) можно записать в виде

$$\varphi_{i,i}(t) = \varphi_{0,i} + (2\pi/P) \cdot t. \quad (54)$$

Выражение (54) совместно с формулами (40) – (42) и (49) – (51) представляет законы движения тел сферически-распределенной структуры при эксцентриситете  $e = 0$ .

### 7. Алгоритм расчета орбитальных параметров

Как видно из выражений (49) – (51), орбитальные параметры тела с номером  $i$  рассчитываются в зависимости от орбитальных параметров тела  $i - 1$ . Наличие осложнений в расчете хотя бы одного параметра какого-либо тела приводит к блокировке расчетов всех параметров всех последующих тел. Такими осложнениями являются циклический характер изменения углов  $\varphi_p$ ,  $\varphi_\Omega$  и  $i_n$ , переход их через узловые для тригонометрических функций значения:  $0.5\pi$ ,  $\pi$ ,  $1.5\pi$ ,  $2\pi$  и т.д., а также многозначность обратных тригонометрических функций  $\arcsin$  и  $\arccos$ . Кроме того, знаменатели аргументов  $\arcsin$  в выражениях (49) и (50) могут приближаться к нулю и даже обращаться в нуль. Поэтому расчет орбитальных параметров по формулам (49) – (51) представляет значительные трудности.

Аналогичные проблемы были досконально рассмотрены в работе [13], поэтому здесь мы детально на них останавливаться не будем. Отметим только, что для нахождения алгоритма выполнения вычислений по формулам (49) – (51) необходимо исследовать поведение аргументов функций  $\arcsin$  и  $\arccos$ . Однако в настоящей работе, в отличие от работы [13], эти исследования необходимо выполнять неоднократно, так как осложнения могут появиться при расчете параметров любого  $i$ -того тела.

Методы устранения осложнений могут быть разными. Они не просты, и в каждом случае их нужно разрабатывать. С этой целью необходимо пользоваться какими-то критериями истинности выбранного решения. Я пользовался двумя критериями. Во-первых, изменения параметров  $\varphi_p$ ,  $\varphi_\Omega$  и  $i_n$  в зависимости от номера тела  $i$  должны быть плавными. А, во-вторых, координаты (40) – (42) рассчитанных по  $\varphi_p$ ,  $\varphi_\Omega$  и  $i_n$  тел должны совпадать с координатами тел структуры, рассчитанной с помощью программы SphDsSt4.for.

Алгоритм расчета параметров по формулам (49) – (51) начинается с задания значений параметров для второго тела:  $i_{n,2} = \Delta\theta$ ;  $\varphi_{p,2} = 0$ ;  $\varphi_{\Omega,2} = \Delta\psi$ . Затем проводятся вычисления для тел от  $i = 3$  до  $N_3+1$ . Вначале рассчитывается угол наклона согласно (51):

$$Fn01_i = \arccos(-\cos \Delta\theta \cdot \cos i_{n,i-1} + \sin \Delta\theta \cdot \sin i_{n,i-1} \cdot \cos(\Delta\psi + \varphi_{p,i-1})); \quad (55)$$

$$Fn02_i = Fn01_i \text{ если } i \leq Ind1, \text{ в остальных случаях } Fn02_i = 2\pi - Fn01_i; \quad (56)$$

$$i_{n_i} = \pi - Fn02_i, \quad (57)$$

где  $Ind1$  – индекс тела, для которого функция  $Fn01$  после своего минимума достигает величины  $\pi$ , но не превосходит это значение. Для структуры с  $N_3 = 99$  и  $k_\varphi = 1.732341654683966$  индекс  $Ind1 = 50$ .

Затем по формуле (49) рассчитывается дуга перицентрия:

$$Fn03_i = \frac{\sin i_{n,i-1} \cdot \sin(\Delta\psi + \varphi_{p,i-1})}{\sin(\pi - i_{n,i})}; \quad (58)$$

$$Fn04_i = Fn03_i \text{ при } Fn03_i \leq 1; \quad Fn04_i = 1 \text{ при } Fn03_i > 1; \quad (59)$$

$$Fn04a_i = Fn04_i \text{ при } Fn04_i \geq -1; \quad Fn04a_i = -1 \text{ при } Fn04_i < -1; \quad (60)$$

$$Fn04b_i = Fn04a_i \text{ при } i_{n,i} \neq 0; \quad Fn04b_i = 0 \text{ при } i_{n,i} = 0; \quad (61)$$

$$Fn05_i = \arcsin Fn04b_i; \quad (62)$$

$$\varphi_{p,i}' = Fn05_i \text{ при } i \leq Ind2; \quad \varphi_{p,i}' = \pi - Fn05_i \text{ при } i > Ind2; \quad (63)$$

$$\varphi_{p,i} = \varphi_{p,i}' \text{ при } i \leq Ind3; \quad \varphi_{p,i} = 2\pi + Fn05_i \text{ при } i > Ind3, \quad (64)$$

где  $Ind2$  – номер тела, для которого функция  $Fn04b_i$  при своем увеличении достигает значения близкого к 1;

$Ind3$  – номер тела, для которого функция  $Fn04b_i$  при своем уменьшении достигает значения близкого к -1.

Для структуры с  $N_3 = 99$  и  $k_\varphi = 1.732341654683966$   $Ind2 = 26$ , а  $Ind3 = 76$ .

После этого по формуле (50) рассчитывается угол восходящего узла:

$$Fn06_i = \frac{\sin \Delta\theta \cdot \sin(\Delta\psi + \varphi_{p,i-1})}{\sin(\pi - i_{n,i})}; \quad (65)$$

$$Fn07a_i = Fn06_i \text{ при } Fn06_i \leq 1; \quad Fn07a_i = 1 \text{ при } Fn06_i > 1; \quad (66)$$

$$Fn07b_i = Fn07a_i \text{ при } Fn07a_i \geq -1; \quad Fn07b_i = -1 \text{ при } Fn07a_i < -1; \quad (67)$$

$$Fn07c_i = Fn07b_i \text{ при } i_{n,i} \neq 0; \quad Fn07c_i = 0 \text{ при } i_{n,i} = 0; \quad (68)$$

$$Fn08_i = \arcsin Fn07c_i; \quad (69)$$

$$Fn09_i = Fn08_i \text{ при } Fn08_i \geq 0; \quad Fn09_i = -Fn08_i \text{ при } Fn08_i < 0; \quad (70)$$

$$\varphi_{\Omega,i} = \varphi_{\Omega,i-1} + Fn09_i. \quad (71)$$

Проверкой этого алгоритма также являются орбитальные параметры тела  $N_3+1$

$$i_{n,N_3+1} = 0; \quad \varphi_{p,N_3+1} = 2\pi; \quad \varphi_{\Omega,N_3+1} = 2\pi. \quad (72)$$

## 11. Пример аналитической динамики регулярной сферически распределенной структуры

По представленному алгоритму разработана программа SpDSDynmcs.mcd в среде MathCad для расчета аналитической динамики регулярной структуры. В ней законы изменения координат определяются по формулам (40) – (42) при законе изменения полярного угла  $\varphi_{t,i}(t)$  согласно (54). С помощью этой программы были рассчитаны законы изменения координат регулярной сферически распределенной структуры с параметрами структуры St4D99be.dat. На рис. 11 линиями показано изменение относительной координаты  $x_r = x/R_p$  тел 1 и 49 за 20 обращений. Как уже отмечалось, период их обращения  $P$  равен примерно году. Поэтому координата  $x$  этих тел, как видно из рис. 11, совершает 20 колебаний по синусоиде.

На графике точками приведено изменение относительной координаты  $x_{r,G}$ , полученной в результате интегрирования дифференциальных уравнений движения тел этой структуры с помощью программы Galactica. На интервале 20 лет законы движения  $x_r$  и  $x_{r,G}$  практически не отличаются.

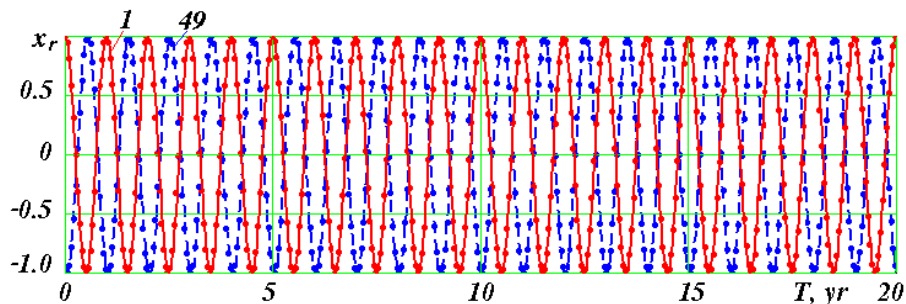


Рис. 11. Изменение относительной координаты  $x_r$  тел 1 и 49 за 20 обращений в сферически-распределенной регулярной структуре St4D99be.dat: линии – по формулам аналитической динамики, точки – по результатам интегрирования системой Galactica.

Рассмотрим более детально отличие аналитической динамики структуры от фактической, полученной в результате интегрирования системой Galactica. На рис. 12 приведено изменение относительной разности радиусов этих тел

$$\delta r = (r_G - r)/r \quad (73)$$

на этом же интервале времени 20 лет, где  $r$  – расстояние тела до начала координат, согласно аналитической динамике, а  $r_G$  – этот же радиус, полученный с помощью системы Galactica.

В аналитической динамике радиус орбиты постоянный, т.е.  $r = \text{const}$ . Как видно из рис. 12а величина  $\delta r$ , а, следовательно, и фактический радиус  $r_G$  орбит периферийных тел, колеблется с периодом 1 год. Кроме того имеются колебания с большими периодами, но меньшей амплитудой. Амплитуда колебаний с годовым периодом составляет  $\delta r_A = 0.0007$ . Это соответствует изменению радиуса орбиты тела за одно обращение на 0.07%. Таким

образом, фактическая орбита периферийного тела отличается от окружности. Она является эллипсом с очень малым эксцентриситетом  $e \approx 0.0004$ .

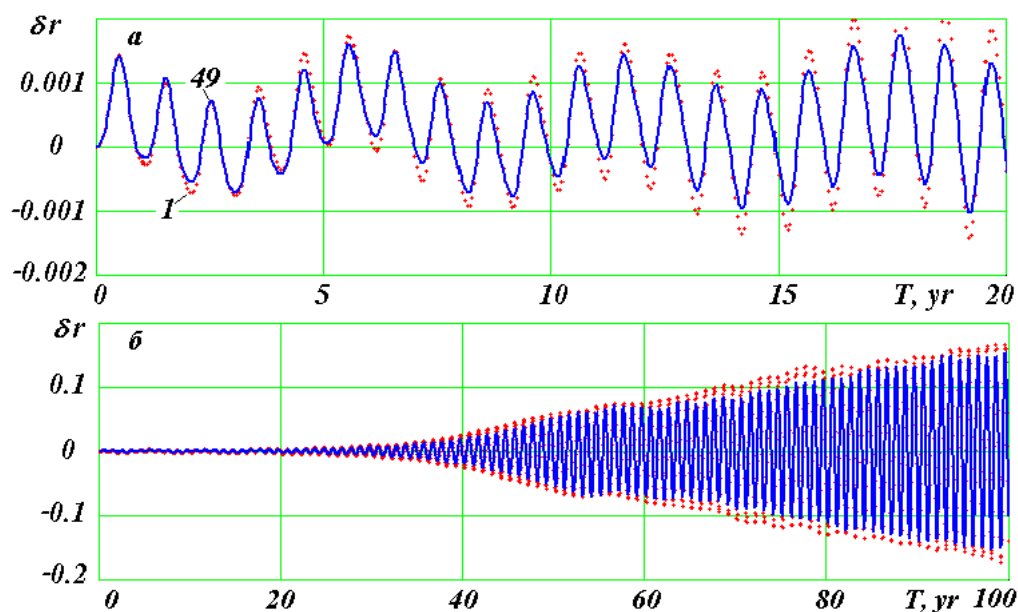


Рис. 12. Колебания относительного изменения радиуса орбиты  $\delta r$  тел 1 и 49 структуры (рис. 8): *a* – за 20 лет, *b* – за 100 лет.

Из рис. 12а видно, что колебания радиуса орбиты для тел 1 и 49 синхронны, хотя, как видно из рис. 8б, они находятся на противоположных концах диаметра сферы. По-видимому, сфера, на которой расположены тела, также колеблется с таким периодом.

Амплитуда колебаний  $\delta r$ , как видно из рис. 12а, со временем растёт и к 20 годам увеличивается в 1.6 раза. На рис. 12б показано изменение  $\delta r$  за 100 лет. За следующие 20 лет, с  $T = 20$  до  $T = 40$ , амплитуда колебаний радиуса увеличилась в 8 раз и достигла величины  $\delta r = 0.01$ . Далее идет линейный закон увеличения амплитуды, и к 100 годам она увеличивается до  $\delta r = 0.085$ . Таким образом, радиус орбиты периферийных тел к 100 годам за одно обращение изменяется на 8.5%.

Таким образом, форма орбиты периферийного тела не является точной окружностью. С первого обращения орбита близка по форме к эллипсу с эксцентриситетом  $e = 4 \cdot 10^{-4}$ . Со временем эксцентриситет орбиты нарастает и к 100 обращению он достигает величины  $e = 0.043$ .

Орбита периферийного тела также не является плоской. Относительный ее размер вдоль оси  $z_n$ , перпендикулярной средней плоскости, при первом обращении  $\delta z_n = 6 \cdot 10^{-4}$ . Со временем он увеличивается и после 100 обращений  $\delta z_n = 0.14$ , т.е. орбита на 7% отходит от своей средней плоскости.

Кроме того, положение орбиты в пространстве изменяется, т.е. изменяются углы положения перицентров  $\varphi_{p,i}$ , углы наклонов плоскостей орбит  $i_{n,i}$  и их восходящие узлы  $\varphi_{\Omega,i}$ . В результате исследования эволюции структуры с помощью системы Galactica можно

определить зависимость от времени шести параметров орбиты  $R_p(t)$ ,  $\alpha_l(t)$  или  $e(t)$ ;  $P(t)$  или  $v_p(t)$ ;  $\varphi_p(t)$ ,  $i_n(t)$  и  $\varphi_{\Omega}(t)$ . При этих параметрах выражения (40) – (42) будут описывать не только динамику регулярной сферически распределенной структуры, но и ее эволюцию.

Такие исследования были выполнены для Солнечной системы [14] – [15]. Они показали, что так полученные аналитические выражения полностью описывают эволюцию Солнечной системы. В этом случае для каждой планеты, а также для Луны используется свой набор законов изменения орбитальных параметров во времени. В случае регулярной структуры, зависящая от времени часть параметров  $R_{p,i}$ ,  $\alpha_{l,i}$ ,  $P_i$ ,  $\varphi_{p,i}$ ,  $i_{n,i}$ ,  $\varphi_{\Omega,i}$  будет одинаковой для всех периферийных тел. Начиная с того момента времени, когда эти параметры у разных тел начнут отличаться, структура перестает быть регулярной.

## 12. Разные конфигурации регулярных сферически распределенных структур

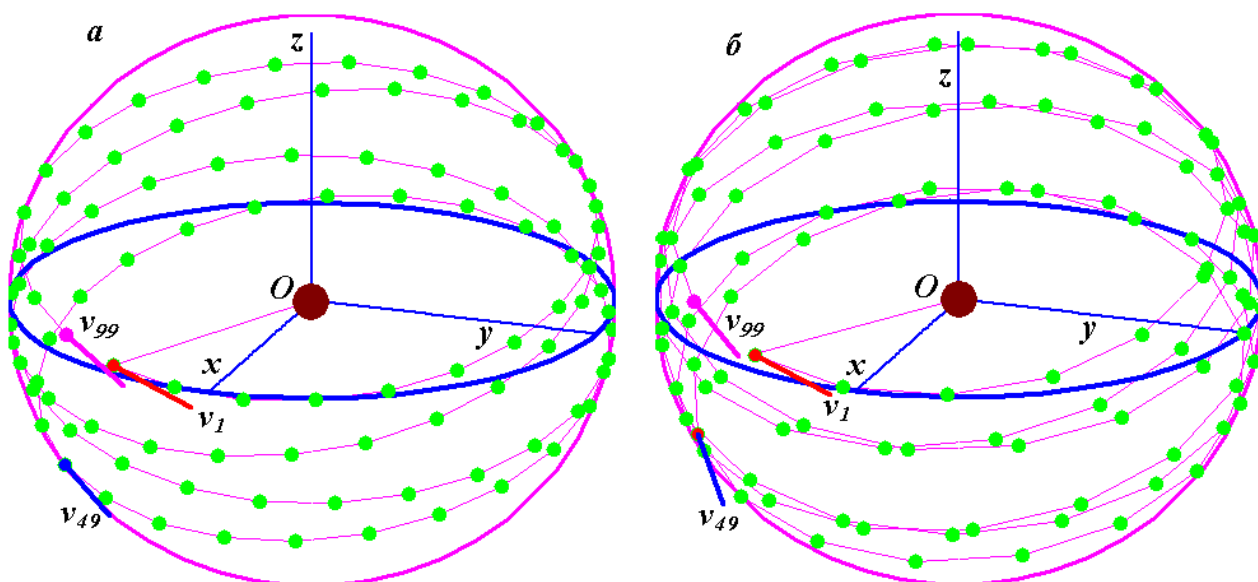


Рис. 13. Регулярные сферически распределенные структуры, с разным количеством оборотов их линии первоначального расположения, после 100 обращений периферийных тел: *a* – St4D99bg.dat с 4 оборотами линии; *б* – St4D99bh.dat с 6 оборотами линии.

Рассмотренная конфигурация регулярной сферически распределенной структуры выполнена при определенных коэффициентах исходных углов  $k_\varphi$  и  $k_{\varphi v}$ . На рис. 13 приведены еще две конфигурации при других коэффициентах. В структуре St4D99bg.dat на рис. 13а увеличен коэффициент  $k_\varphi$  до такой величины, чтобы тела расположились на линии с четырьмя оборотами. Как отмечалось, в прежней структуре (рис. 8) тела располагаются на линии с тремя оборотами. Значения коэффициентов и других параметров регулярных структур приведены в табл. 2.

В третьей структуре St4D99bh.dat (рис. 13б) был вдвое увеличен коэффициент угла скорости  $k_{\varphi v}$ , а коэффициент  $k_\varphi$  рассчитан согласно выражению (35). В этом случае тела располагаются по линии с пятью оборотами.

Таким образом, отсюда следует, что при разных значениях коэффициента  $k_{\varphi v}$  можно расчетом по формуле (35) определить коэффициент  $k_{\varphi}$  и таким образом создать новую регулярную структуру. Поэтому таких структур для каждого набора параметров  $N_3$ ,  $smi$ ,  $pm0$ ,  $Asm$ ,  $e$  может быть бесконечно много.

Таблица 2. Параметры и характеристики регулярных сферически-распределенных структур

№	Имя структуры	$k_{\varphi}$	$k_{\varphi v}$	$\delta r$	Расстояния между соседними телами		Наименьшие расстояния между телами $i1$ и $i2$		$\varphi_{st}$
					$\Delta r_{r,2}$	$\Delta \Delta r_{ra}$	$\Delta r_{r,i1,i2}$	$i1$ и $i2$	
1	St4D99be.dat	1.73234165 4683966	1	0.092	0.173114	$7.14 \cdot 10^{-4}$	0.063854	18 и 85	-0.37
2	St4D99bg.dat	2.82890223 5710249	1	$1.2 \cdot 10^{-4}$	0.242316	$5.18 \cdot 10^{-4}$	0.119005	15 и 89	-0.45
3	St4D99bh.dat	4.58566041 6713051	2	$1.4 \cdot 10^{-3}$	0.352234	$1.41 \cdot 10^{-3}$	0.073407	20 и 86	-0.57
4	St4D11ba.dat	1.75663812 8448965	1	0.035	1.364852	0.06	0.657737	4 и 11	3.0
5	St4D999e.dat	1.73205366 2399625	1	0.21	0.017183	$7.01 \cdot 10^{-6}$	8.65E-3	165 и 838	-0.02

На рис. 13 структуры показаны после интегрирования дифференциальных уравнений движения тел программой Galactica за время 100 обращений. Эти структуры более устойчивые: их вид, в отличие структуры на рис. 8 за 100 обращений не изменился. В таблице 2 приведено максимальное относительное изменение радиуса орбиты  $r$  одного из тел

$$\delta r = (r - r_0) / r_0, \quad (74)$$

где  $r_0$  – начальный радиус его орбиты. Как видно, за 100 обращений изменение размера орбиты  $\delta r$  в структуре 2 на три порядка, а структуры 3 – на два порядка меньше, по сравнению со структурой 1. Таким образом, структура 2 является наиболее устойчивой.

### 13. Причины изменения регулярных сферически распределенных структур

Были проведены исследования по выявлению причин изменения этих структур. Выяснилось, что в структурах расстояния между соседними телами на первоначальной линии их нахождения не одинаковы. В этих исследованиях рассматривалось относительное расстояние тела  $i$  от предыдущего тела  $i-1$

$$\Delta r_{r,i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2} / a, \quad i = 1, 2, \dots, N_3. \quad (75)$$

При расчете  $\Delta r_{r,i}$  первого тела предыдущим телом было тело  $N_3$ . Расстояние  $\Delta r_{r,2}$  второго тела от первого приведены для трех структур в табл. 2. Как видно, это расстояние между телами увеличивается с увеличением длины первоначальной линии, на которой расположены тела. Так как сила взаимодействия (1) между телами уменьшается с увеличением расстояния между ними, то устойчивость их движения от возмущений

соседних тел повышается. Поэтому время существования структур с увеличением длины первоначальной линии будет повышаться.

Выяснилось, что величина расстояния между соседними телами  $\Delta r_{r,i}$  каждой структуры непостоянна. Поэтому была исследована разность соседних расстояний между телами

$$\Delta \Delta r_{r,i} = \Delta r_{r,i} - \Delta r_{r,i-1}. \quad (76)$$

Величина  $\Delta \Delta r_{r,i}$  по телам  $i$  от 1 до  $N_3$  совершает 2 гармонических колебания с амплитудой  $\Delta \Delta r_{ra}$ . Величина амплитуд для рассмотренных структур приведена в табл. 2, а на рис. 14 представлены графики изменения разностей расстояний в относительном виде

$$\delta \Delta r_{r,i} = \Delta \Delta r_{r,i} / \Delta \Delta r_{ra} \quad (77)$$

в зависимости от номеров тел  $i$ . Как видно из графиков, относительная разность расстояний  $\delta \Delta r_{r,i}$  колеблется от -1 до 1 и совершает два колебания. Графики для разных структур в табл. 2 немного сдвинуты по фазе. Наименьшая разница расстояний по отношению к расстоянию между телами  $\Delta \Delta r_{ra} / \Delta r_{r,2} = 2.14 \cdot 10^{-3}$  у структуры 2. Поэтому она более устойчива, по сравнению с другими структурами.

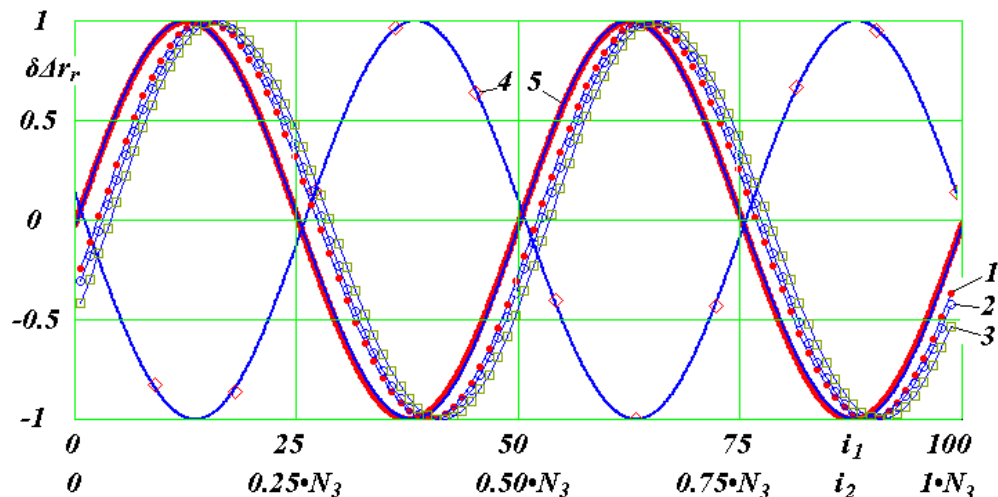


Рис. 14. Относительная разность соседних расстояний  $\delta \Delta r_r$  между телами  $i$ ,  $i-1$  и  $i-2$ , в зависимости от номера тела  $i$ : 1 - 5 – номера регулярных структур согласно табл. 2; линиями представлена зависимость (78);  $i_1$  – шкала для структур 1 - 3, а  $i_2$  – шкала для структур 4 - 5.

Кроме изменчивости расстояний между соседними телами на устойчивость структуры влияет сближения тел в точках самопересечения их линии расположения, например, в точках нахождения тел 1 и 61 на рис. 8б. О величинах этих сближений может свидетельствовать минимальное расстояние между телами в момент создания структуры. В программе SphDsSt4.for это расстояние  $\Delta r_{r,i_1,i_2}$  между телами  $i_1$  и  $i_2$  вычисляется и выдается в файле SphDsSt4Err. Минимальные величины расстояния  $\Delta r_{r,i_1,i_2}$  приведены в табл. 2. Как видно, оно также наибольшее для структуры 2. В отличие от разности расстояния  $\Delta \Delta r_{r,i}$  между соседними телами, которое оказывает постоянное возмущение, расстояние  $\Delta r_{r,i_1,i_2}$  влияет кратковременно, в момент пересечения промежутка между

двумя телами. Для структуры 2 оно равно половине расстояния  $\Delta r_{r,2}$  между соседними телами. Это оптимальное соотношение. Для структур 1 и 3 расстояния  $\Delta r_{r,il,i2}$  значительно меньше. Это обстоятельство также способствует большей устойчивости структуры 2.

Как уже отмечалось, найденные расстояния  $\Delta r_{r,il,i2}$  в момент создания структуры характеризуют минимальные сближения тел в процессе движения. Эти сближения испытывают все периферийные тела. Например, в структуре 1 (Табл. 2), в начальный момент происходит сближения тел 18 и 85, затем 17 и 84, затем 16 и 83 и т.д. И все эти сближения будут происходить на расстоянии близком к  $\Delta r_{r,il,i2} = 0.063854$ . Поэтому при создании регулярной структуры необходимо проверять расстояние  $\Delta r_{r,il,i2}$ . При малом его значении произойдет сильное взаимодействие между сблизившимися частицами и регулярность структуры нарушится. Оптимальная величина этого расстояния, как уже отмечалось, должна быть  $\Delta r_{r,il,i2} = 0.5 \cdot \Delta r_{r,2}$ .

В табл. 2 приведены также параметры регулярной структуры St4D11ba.dat с 11 периферийными телами под № 4 и St4D999e.dat под № 5 с 999 периферийными телами. В структуре 4 из-за большого углового расстояния между телами амплитуда колебаний  $\Delta \Delta r_{ra}$  очень большая. При этом, минимальное расстояние  $\Delta r_{r,il,i2}$  между телами 4 и 11 по отношению к  $\Delta r_{r,2}$  равно 0.4819, т.е. близко к оптимальному. Однако массы периферийных тел в этом случае большие и при этих амплитудах  $\Delta \Delta r_{ra}$  существуют предпосылки для неустойчивости структуры. При интегрировании уравнений движения ее тел системой Galactica это подтвердилось. Через несколько обращений начали наблюдаться изменения в ее регулярной структуре. Затем начались заметные колебания тел и к 100 обращению все тела структуры расположились в нижнем полушарии.

В структуре 5 в табл. 2 с 999 периферийными телами расстояние  $\Delta r_{r,2} = 0.017183$  между телами очень мало. Поэтому она быстро разрушается в течение первых обращений. После 5-и обращений еще половина тел находится на линии первоначального образования, а после 10 обращений регулярность структуры полностью исчезает.

Зависимость относительной разности расстояний  $\delta \Delta r_r$  от числа тел  $i$  для этих двух структур показана позициями 4 и 5 на рис. 14. Как видим, величина  $\delta \Delta r_r$ , как и для структур с  $N_3 = 99$ , совершает два гармонических колебания, которые отличаются фазой  $\varphi_{st}$ . Линиями на графиках представлена аналитическая зависимость

$$\delta \Delta r_{ar} = \sin(\varphi_{st} + 2\pi \cdot i / P_{st}) \quad (78)$$

где период колебания  $P_{st}$  расстояния  $\delta \Delta r_{ar}$

$$P_{st} = 0.5 \cdot N_3, \quad (79)$$

а фазы колебаний  $\varphi_{st}$  приведены в табл. 2.



На рис. 14 количество тел  $i$  структур 4 и 5 дано в виде шкалы  $i_2$ . Как видно из графиков, зависимость (78) в точности описывает изменение расстояния между телами для всех структур. Поэтому согласно (78) - (79), закон этого колебания можно представить в виде

$$\Delta \Delta r_r = \Delta \Delta r_{r,a} \cdot \sin(\varphi_{st} + 4\pi \cdot i / N_3) \quad (80)$$

где  $\Delta \Delta r_{r,a}$  и  $\varphi_{st}$  приведены в табл. 2

Вернемся снова к колебаниям расстояния  $\delta \Delta r_{r,i}$  между соседними частицами. Почему оно происходит? При построении структуры с каждым телом происходят одни и те же повороты в трех разных плоскостях на углы  $\Delta \psi$ ,  $\Delta \theta$  и  $\Delta \varphi$ . Однако, поворот на угол  $\Delta \theta$  в 4-м варианте структуры приводит к неодинаковым смещениям тел. На рис. 10 положения первых трех тел отмечено символами  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$ . Угловые их расстояния от осей поворота на угол  $\Delta \theta$ , проходящих через точки  $P_{c,i}$  и равных  $\varphi_{0,i}$ , являются неодинаковыми. Вследствие этого при повороте плоскостей орбит на угол  $\Delta \theta$  тела перемещаются на разные расстояния. Поэтому происходят вариации расстояния  $\Delta r_{r,i}$  между соседними телами.

Эти вариации тем больше, чем больше угол  $\Delta \theta$ . Так как этот угол согласно (14) и (3) увеличивается с уменьшением количества  $N_3$  тел, то для малого количества тел, например,  $N_3 = 11$ , эти структуры – менее регулярны и менее устойчивы, чем по другим вариантам. При большом количестве тел, например,  $N_3 = 100$  и больше, регулярность структур повышается. Однако, для достижения абсолютной регулярности необходимо проводить дальнейшие работы.

Выше было рассмотрено ряд факторов, которые ухудшают устойчивость структуры или улучшают ее регулярность. К ним можно добавить еще один. Как видно из рис. 8а и рис. 13, в структуре St4D99bg.dat (рис. 13а) линии первоначального расположения тел более равномерно расположены на сфере по сравнению с другими структурами. Это тоже способствует ее большей устойчивости. Поэтому использование этих и других факторов позволяет увеличивать степень регулярности структуры даже, если вопрос об абсолютной регулярности не решен.

#### 14. Масштабирование структур

Как уже отмечалось, файлы структур с начальными условиями, например, St4D999e.dat создаются в безразмерном виде [5]. Размеры относятся к масштабному параметру  $Am$ , время умножается на коэффициент  $k_t$ , а массы делятся на массу системы  $m_{ss}$ . Причем, согласно (30) эти параметры связаны друг с другом. Поэтому при известных  $Am$  и  $m_{ss}$  коэффициент времени определяется так

$$k_t = \sqrt{G \cdot m_{ss} / Am^3}. \quad (81)$$

В рассматриваемой структуре с  $N = 1000$  тел, массой системы  $m_{ss} = 1.99179 \cdot 10^{30}$  кг, долей центрального тела  $pm0 = 0.99866$ , полуосью орбиты  $a_0 = 1$  AU, масштабные параметры были  $A_{m0} = 1.0973762 \cdot 10^{13}$  м и  $k_{t0} = 3.1687536 \cdot 10^{-10}$  1/сек. А безразмерная полуось была  $a_{im} = 0.0136323$  и безразмерный период обращения периферийного тела  $P_{im} = 9.9920079 \cdot 10^{-3}$ .

Рассмотрим другую структуру с параметрами близкими к шаровому звездному скоплению:  $m_{ss} = 10^5 \cdot M_s = 1.989118 \cdot 10^{35}$  кг, где  $M_s$  – масса Солнца; полуось орбиты  $a = 1$  пк =  $206264.8 \cdot AU = 3.0856775 \cdot 10^{16}$  м. Начальные условия в файле St4D999e.dat будут соответствовали новой структуре, если безразмерные массы, размеры и скорости в нем будут соответствовать новой задаче. В частности, безразмерная полуось  $a_{im}$  должна быть такая же. Отсюда находим масштабный параметр  $Am = a/a_{im} = 2.263501 \cdot 10^{18}$  м. Из выражения (81) определяется коэффициент времени  $k_t = 1.06980958 \cdot 10^{-15}$  1/сек.

Все полученные результаты, в том числе представленные графики и рисунки, при интегрировании дифференциальных уравнений движения системой Galactica с начальными условиями файла St4D999e.dat соответствуют новой структуре с полученными параметрами  $Am$  и  $k_t$ . Например, период обращения периферийных тел в ней

$$P = P_{im}/k_t = 9.34 \cdot 10^{12} \text{ сек} = 296.198 \text{ тыс. лет.} \quad (82)$$

То есть, если в предыдущей структуре периферийные тела обращались вокруг центрального тела за 1 год, то в новой структуре – почти за 300 тыс. лет.

В примере мы рассмотрели структуру с новой массой и новым размером, равным  $2 \cdot a$ . Полученные результаты можно использовать по изучению влияния массы структуры или ее размера на ее характеристики, если изменять только массу или только размер системы. Поэтому приведенный здесь алгоритм масштабирования может быть использован для разнообразных исследований гравитационных взаимодействий в структурах на основе уже полученных решений.

## 15. Дальнейшие работы

Полученные результаты требуют осмысления и дальнейшего развития. Например, период обращения тела в плоской осесимметричной структуре и в сферически распределенной структуре совпадает. Это свидетельствует, что силы воздействия всех тел на одно из периферийных тел совпадают в этих двух структурах. Этот результат получен практически. Необходимо доказать его теоретически.

Используя полученные алгоритмы, представляется интересным развернуть в пространстве многослойную вращающуюся структуру [3] - [4]. Такая структура будет моделировать шаровое звездное скопление, заполненное телами не только по сфере, но и внутри нее.

В этом случае тела на всех слоях имеют одинаковый период обращения. Сохранится ли он? Можно ли создать регулярные движения тел в слоях?

Разработанный алгоритм применим для создания сферически-распределенных кулоновских структур [8]-[9]. Возможно, создание и исследование их приблизит нас к пониманию устройства атома.

### Благодарности

Для исследования динамики сферически-распределенных структур вычисления выполнялись на суперкомпьютерах ЦКП Сибирский Суперкомпьютерный Центр ИВМиМГ СО РАН, г. Новосибирск.

### Литература

1. *Смульский И.И.* Теория взаимодействия. – Новосибирск: Из-во Новосиб. ун-та, НИЦ ОИГМ СО РАН, 1999 г. – 294 с. [http://www.ikz.ru/~smulski/TVfulA5\\_2.pdf](http://www.ikz.ru/~smulski/TVfulA5_2.pdf).
2. *Смульский И.И.* Осесимметричная задача гравитационного взаимодействия N-тел // Математическое моделирование, 2003, т. 15, № 5, с. 27-36. <http://www.smul1.newmail.ru/Russian1/IntSunSyst/Osvnb4.doc>.
3. *Смульский И.И.* Осесимметричные многослойные вращающиеся структуры / Институт криосферы Земли СО РАН. - Тюмень, 2013. - 27 с. - Илл.: 7.- Библиогр.: 16 назв. - Рус. Деп. в ВИНТИ 28.10.2013, № 303-B2013. <http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/OsMVStr.pdf>.
4. *Smulsky J.J.* Exact solution to the problem of  $N$  bodies forming a multi-layer rotating structure // SpringerPlus. 2015, 4:361, pp. 1-16, DOI: 10.1186/s40064-015-1141-1, URL: <http://www.springerplus.com/content/4/1/361>.
5. *Smulsky J.J.* The System of Free Access Galactica to Compute Interactions of N-Bodies. I.J.Modern Education and Computer Science, 2012, 11, 1-20. DOI: 10.5815/ijmecs.2012.11.01. <http://www.mecs-press.org/>.
6. *Смульский И.И.* Система Galactica. Институт криосферы Земли СО РАН. – Тюмень, 2012. <http://www.ikz.ru/~smulski/GalacteW/>.
7. *Смульский И.И., Кротов О.И.* Изменение кинетического момента в динамике Солнечной системы // Космические исследования, 2015, том 53, № 3, с. 253–262. DOI: 10.7868/S0023420615020090. [http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/IzmMom5\\_1J.pdf](http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/IzmMom5_1J.pdf).
8. *Смульский И.И.* Плоские многослойные кулоновские структуры / Институт криосферы Земли СО РАН. – Тюмень, 2015. – 54 с. – Илл.: 35.- Библиогр.: 24 назв. - Рус. Деп. в ВИНТИ 27.02.2015, № 38-B2015. <http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/PMKStr.pdf>.
9. *Smulsky J.J.* Multilayer Coulomb Structures: Mathematical Principia of Microcosm Mechanics // Open Access Library Journal, 2015, 2: e1661, 46 p. <http://dx.doi.org/10.4236/oalib.1101661>.

10. Шаровое скопление М 53. [https://ru.wikipedia.org/wiki/М\\_53](https://ru.wikipedia.org/wiki/М_53).
11. *Смульский И.И., Кротов О.И.* Новый алгоритм расчета инсоляции Земли / Институт криосферы Земли СО РАН. – Тюмень, 2013. – 38 с. – Деп. в ВИНТИ 08.04.2013 № 103-В2013. <http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/NwAlClI2c.pdf>.
12. *Smulsky J.J. and Krotov O.I.* New Computing Algorithm of the Earth's Insolation // Applied Physics Research, Vol. 6, No. 4; 2014, p. 56-82. <http://dx.doi.org/10.5539/apr.v6n4p56>.
13. *Смульский И.И.* Феномены Солнца в исторической перспективе / Институт криосферы Земли СО РАН. - Тюмень, 2016. - 66 с. - Илл.: 23.- Библиогр.: 24 назв. - Рус. Деп . в ВИНТИ РАН 11.01.2016, № 9-В2016. <http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/SunPhnmen.pdf>.
14. *Смульский И.И.* Математическая модель Солнечной системы / В сб. Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа. Российская Академия Наук: ВЦ им. А.А. Дородницына. М.: ВЦ РАН А.А. Дородницына, 2007. – С. 119-138. <http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/MatMdSS5.pdf>.
15. *Смульский И.И.* Основные положения и новые результаты астрономической теории изменения климата / Институт криосферы Земли СО РАН. - Тюмень, 2014. - 30 с.: ил: 16.- Библиогр.: 44 назв. - Рус. Деп . в ВИНТИ РАН 30.09.2014, № 258-В2014. [http://samlib.ru/s/smulxskij\\_i\\_i/ospoatlp3.shtml](http://samlib.ru/s/smulxskij_i_i/ospoatlp3.shtml), <http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/OsPoATLP3.pdf>.
16. Smulsky, J.J. Fundamental Principles and Results of a New Astronomic Theory of Climate Change. Advances in Astrophysics, 2016, Vol. 1, No. 1, 1-21. <http://www.isaacpub.org>, <http://www.isaacpub.org/Journal/AdAp>.

**Приложение. Содержание файла исходных данных и текст программы для создания сферически распределенных структур**

**1. Содержание файла исходных данных SphDsSt4.dat**

No	Описание параметра	Параметр	Величина, начиная с 60 позиции
1	The number of bodies in the ring 22.07.2016	N3	99
2	The mass of all bodies	smi	1.99179D+30
3	The mass of the central body in part of smi	pm0	0.99866D+0
4	Semi-axis of initial orbit in AU	Asm	1.00000D+0
5	Initial eccentricity of orbits	ec	0.00000D+0
6	Coefficient of initial angles of bodies	okf	0.80000D+0
7	Coefficient of initial angles of velocities	okfv	1.00000D+0
8	Angle of inclination of the rings to equator	eps0	0.00000D+0
9	Absolute density of bodies, kg/m <sup>3</sup>	Rob	5000.
10	Variant of structure	Ivr	4
11	Step time integration	dt	1.00000D-6
12	The initial data file name	FIMA5	Tm4D99bd.dat
13	Creation date of the initial conditions file	Idta	20160714

**2. Текст программы SphDsSt4.for**

```

C*****
C*      *****SphDsSt4.for from SphDsStr3.for      *****
C          Сферически распределенные однослойные структуры
C          Joseph J. Smulsky
C  Начато 28.11.2015 г. Последнее изменение 22.07.2016
C*****
C-----
C  Нужно задать значения параметров!
PARAMETER (I2=1002,I4=6000) !
C-----
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION XV(2,I2), YV(2,I2), ZV(2,I2), XV0(2,I2), YV0(2,I2),
*ZV0(2,I2), U1(I2,3), Pns(3), Xc(3), AM1(3), Pn(3), omo(I2),
*Xo(I2,3), Uo(I2,3), X(I2,3), U(I2,3), Sp(I2,3), Et(I2),
*Ra(I2), dUp(I2,3), X1(I2,3)
INTEGER*4 N,N3,Idta,q
CHARACTER*12 FIMA1,FIMA3,FIMA5,FIMA6
C  CHARACTER*59 Space59
FIMA1 ='SphDsSt4.dat'
FIMA3 ='SphDsSt4Err'
FIMA6 ='file_okf.dat'
C---  Считывание файла SphDsSt3.dat.
OPEN(UNIT=1,FILE=FIMA1,STATUS='OLD')
READ(1,39,ERR=40)N3
READ(1,54,ERR=40)smi
READ(1,54,ERR=40)pm0
READ(1,54,ERR=40)Asm
READ(1,54,ERR=40)ec
C  READ(1,54,ERR=40)Space59,okf
READ(1,54,ERR=40)okf
READ(1,54,ERR=40)okfv
READ(1,54,ERR=40)eps0

```

```

READ(1,54,ERR=40)Rob
READ(1,39,ERR=40)Ivr
READ(1,54,ERR=40)dt
READ(1,'(59X,A12)',ERR=40)FIMA5
READ(1,39,ERR=40)Idta
CLOSE(1)
OPEN(UNIT=1,FILE=FIMA6,STATUS='OLD',ERR=1)
READ(1,*,ERR=1)okf
CLOSE(1)
39 FORMAT(59X,I12)
54 FORMAT(59X,D11.5)
55 FORMAT(I4,3(D13.6))
GO TO 1
40 WRITE(*,*)'*01Rt Error reading file SphDsSt3.dat *** ',
*N3,smi,pm0,Asm,Prd,ec,okf,okfv,eps0,Rob,dt,FIMA5,Idta
OPEN(UNIT=3,FILE=FIMA3)
WRITE(3,*)'*01Rt Error reading file SphDsSt3.dat *** ',
*N3,smi,pm0,Asm,Prd,ec,okf,okfv,eps0,Rob,dt,FIMA5,Idta
CLOSE(3)

GO TO 150
1 pi = 3.1415926535897932385D+00
p2 = 2.0D+00*pi
G = 6.67259D-11
AU = 1.49597870691D+11
Yrs = 365.25636042D+00
dsc = 24D+00*3600D+00
Rmin = 1.0D+99

DZI = 0.0D+00
PND1 = 3.0D+00/2.0D+00
PND2 = 1.0D+00/3.0D+00
dfi0 = p2/N3
dfi1 = okf*dfi0
dfi2 = okfv*dfi0
dfi3 = dfi1*2.0D+0
C1 = DCOS(df1)
S1 = DSIN(df1)
C2 = DCOS(df2)
S2 = DSIN(df2)
C3 = DCOS(df3)
S3 = DSIN(df3)

fn3 = DZI
DO 1 = 2,N3
fn3 = fn3 + 0.25D+0/DSIN((1-1)*pi/N3)
END DO ! 1
N = N3 + 1
k1 = 1
C--- Массы центрального тела и одного периферийного тела
cm0 = smi*pm0
sm = smi - cm0
cm1 = sm/N3
ax = Asm*AU
al1 = -1/(1 + ec)

```

```

Rp = ax*(2*al1 + 1)/al1
omu1 = -G*(cm0 + cm1*fn3)
Vp = DSQRT(omu1/(al1*Rp))
TMP = Vp*(-2*al1-1)**PND1
Prdsc = -p2*al1*Rp/TMP
Prd = Prdsc/(Yrs*dsc)
okt = 1/(100*Prdsc)
С--- Время в сотнях периодов Prd, который измеряется
С--- в сидерических годах
С   Трехмерные структуры
IF(Ivr.EQ.4) GO TO 6
С   Структура по варианту 3
С 1- номера тел кольца
IF(N3.LT.3) GO TO 2
DO 1 = 2,N3
I5 = (-1)**(I+1)
XV(1,I) = Rp*C3
YV(1,I) = Rp*S3
ZV(1,I) = DZI
XV(2,I) = -Vp*S3*C2
YV(2,I) = Vp*C3*C2
ZV(2,I) = Vp*S2*I5
С   WRITE(*,*)'начальн',I5,I,ZV(2,I)
END DO ! 1
С Поворот векторов скорости нечетных тел кольца
DO I3 = 1,2
DO I1 = 3,N3+1,2
I22 = N3 + 3 - I1
DO 1 = 3,I22,2
I5 = (-1)**I
Xt = XV(I3,I)*C3 - YV(I3,I)*C2*S3 + ZV(I3,I)*S3*S2*I5
Yt = XV(I3,I)*S3 + YV(I3,I)*C3*C2 - ZV(I3,I)*C3*S2*I5
Zt = YV(I3,I)*S2*I5 + ZV(I3,I)*C2
XV(I3,I-2) = Xt
YV(I3,I-2) = Yt
ZV(I3,I-2) = Zt
END DO ! 1
XV0(I3,I1+1) = XV(I3,I)
YV0(I3,I1+1) = YV(I3,I)
ZV0(I3,I1+1) = ZV(I3,I)
END DO ! I1
END DO ! I3
IF(N3.LT.4) GO TO 2
С Поворот векторов скорости четных тел кольца
Vp1 = -Vp
DO 1 = 2,N3
I5 = (-1)**(I+1)
XV(1,I) = Rp*C3
YV(1,I) = Rp*S3
ZV(1,I) = DZI
XV(2,I) = -Vp1*S3*C2
YV(2,I) = Vp1*C3*C2
ZV(2,I) = Vp1*S2*I5
END DO ! 1
DO I3 = 1,2

```

```

DO 11 = 4,N3+1,2
I22 = N3 + 4 - 11
DO 1 = 4,I22,2
Xt = XV(13,1)*C3 - YV(13,1)*C2*S3 + ZV(13,1)*S3*S2
Yt = XV(13,1)*S3 + YV(13,1)*C3*C2 - ZV(13,1)*C3*S2
Zt = YV(13,1)*S2 + ZV(13,1)*C2
XV(13,1-2) = Xt
YV(13,1-2) = Yt
ZV(13,1-2) = Zt
END DO ! 1
XV0(13,11+1) = XV(13,2)
YV0(13,11+1) = YV(13,2)
ZV0(13,11+1) = ZV(13,2)
C   WRITE(*,*)'четн',13,I22,11,ZV0(13,11+1)
END DO ! 11
END DO ! 13
C 1- номера центрального тела и тел кольца
2  XV0(1,1) = DZI
YV0(1,1) = DZI
ZV0(1,1) = DZI
XV0(2,1) = DZI
YV0(2,1) = DZI
ZV0(2,1) = DZI
XV0(1,2) = Rp
YV0(1,2) = DZI
ZV0(1,2) = DZI
XV0(2,2) = DZI
YV0(2,2) = Vp
ZV0(2,2) = DZI
XV0(1,3) = Rp*C3
YV0(1,3) = Rp*S3
ZV0(1,3) = DZI
XV0(2,3) = -Vp*S3*C2
YV0(2,3) = Vp*C3*C2
ZV0(2,3) = Vp*S2
GO TO 8
C   Структура по варианту 4
C 1, I - номера тел кольца
C--- Параметры тел на своих орбитах
6 DO I = 1,N3 + 1
fi = dfi0*(I-1)
CI = DCOS(fi)
SI = DSIN(fi)
ri = Rp/((al1+1)*CI - al1)
Vr = Vp*DSQRT((al1+1)*(al1+1)-(al1+Rp/ri)*(al1+Rp/ri))
IF(SILT.DZI) vr = -vr
Vt = Vp*Rp/ri
XV(1,I) = ri*CI
YV(1,I) = ri*SI
ZV(1,I) = DZI
XV(2,I) = Vr*CI - Vt*SI
YV(2,I) = Vr*SI + Vt*CI
ZV(2,I) = DZI
END DO ! I

```



С Поворот векторов скорости тел кольца

```

DO I3 = 1,2
DO I1 = 2,N3+1
I22 = N3 + 3 - I1
DO I = 2,I22
Xt = XV(I3,I)*C1 - YV(I3,I)*C2*S1 + ZV(I3,I)*S1*S2
Yt = XV(I3,I)*S1 + YV(I3,I)*C1*C2 - ZV(I3,I)*C1*S2
Zt = YV(I3,I)*S2 + ZV(I3,I)*C2
XV(I3,I-1) = Xt
YV(I3,I-1) = Yt
ZV(I3,I-1) = Zt
END DO ! I
XV0(I3,I1+1) = XV(I3,I)
YV0(I3,I1+1) = YV(I3,I)
ZV0(I3,I1+1) = ZV(I3,I)
END DO ! I22
END DO ! I3

```

С I- номера центрального тела и тел кольца

```

XV0(1,1) = DZI
YV0(1,1) = DZI
ZV0(1,1) = DZI
XV0(2,1) = DZI
YV0(2,1) = DZI
ZV0(2,1) = DZI
XV0(1,2) = Rp
YV0(1,2) = DZI
ZV0(1,2) = DZI
XV0(2,2) = DZI
YV0(2,2) = Vp
ZV0(2,2) = DZI
8 ssm = smi

```

С--- Массы тел в программе Galactica и начальные параметры

```

omo(1) = cm0/ssm
TMP = G*ssm/(okt*okt)
Am = TMP**PND2
okv = 1/(okt*Am)
Robo = Rob*Am*Am*Am/ssm
DO k = 1,N
IF(k.NE.1) omo(k) = cm1/ssm
Xo(k,1) = XV0(1,k)/Am
Xo(k,2) = YV0(1,k)/Am
Xo(k,3) = ZV0(1,k)/Am
Uo(k,1) = XV0(2,k)*okv
Uo(k,2) = YV0(2,k)*okv
Uo(k,3) = ZV0(2,k)*okv
END DO ! k

```

С--- Координаты и скорости периферийных тел в экваториальной плоскости

```

DO k = 2,N
X1(k,1) = Xo(k,1)
X1(k,2) = Xo(k,2)*DCOS(eps0) - Xo(k,3)*DSIN(eps0)
X1(k,3) = Xo(k,2)*DSIN(eps0) + Xo(k,3)*DCOS(eps0)
U1(k,1) = Uo(k,1)
U1(k,2) = Uo(k,2)*DCOS(eps0) - Uo(k,3)*DSIN(eps0)
U1(k,3) = Uo(k,2)*DSIN(eps0) + Uo(k,3)*DCOS(eps0)
END DO ! k

```

```

C--- Координаты и скорости центрального тела в экваториальной плоскости
DO q = 1,3
X1(1,q) = DZI
U1(1,q) = DZI
END DO ! q
C--- Параметры центра масс.
30 DO q = 1,3
Pns(q) = DZI
Xc(q) = DZI
AM1(q) = DZI
END DO ! q
DO k = k1,N
IF(omo(k).EQ.DZI) GO TO 32
DO q = 1,3
Xc(q) = Xc(q) + omo(k) * X1(k,q)
Pn(q) = omo(k) * U1(k,q)
Pns(q) = Pns(q) + Pn(q)
END DO ! q
32 END DO ! k
C--- Приведение к центру масс.
DO k = k1,N
IF(omo(k).EQ.DZI) GO TO 16
DO q = 1,3
X(k,q) = X1(k,q) - Xc(q)
U(k,q) = U1(k,q) - Pns(q)
END DO ! q
AM1(1) = AM1(1)-omo(k)*U(k,2)*X(k,3)+omo(k)*U(k,3)*X(k,2)
AM1(2) = AM1(2)+omo(k)*U(k,1)*X(k,3)-omo(k)*U(k,3)*X(k,1)
AM1(3) = AM1(3)+omo(k)*U(k,2)*X(k,1)-omo(k)*U(k,1)*X(k,2)
16 END DO ! k
C   WRITE(*,*)' 1. AM1(1) = ',Am1(1),Amn,vkn
DO q = 1,3
Pns(q) = DZI
END DO ! q
omm = DZI
DO k = k1,N
DO q = 1,3
Pn(q) = omo(k) * U(k,q)
Pns(q) = Pns(q) + Pn(q)
dUp(k,q) = DZI
Sp(k,q) = DZI
END DO ! q
Et(k) = DZI
TMP = 3*omo(k)/(4*pi*Robo)
19 Ra(k) = TMP**PND2
IF(omo(k).LT.omm) GO TO 13
omm = omo(k)
13 END DO ! k
A = 1.0D+0
B = 0.5D+0
C = 0.25D+0
TMP = (N+1)**PND2
Mu = NINT(TMP)
T = DZI
Um = DZI
Spsx = DZI

```

```

Spsy = DZI
Spsz = DZI
E = DZI
Em = DZI
Ett = DZI
dtp = DZI
C--- Создание файла начальных условий FIMA5 для программы Galactica.
OPEN(UNIT=5,FILE=FIMA5)
WRITE(5,*)T,omm,Um,dtp,Pns(1),Pns(2),Pns(3),AM1(1),AM1(2),
*AM1(3),Spsx,Spsy,Spsz,E,Em,Ett,dt,1,1,N,A,B,C,Mu
DO k = k1,N
WRITE(5,*) omo(k),(X(k,q),q=1,3),(U(k,q),q=1,3),
*(dUp(k,q),q=1,3),(Sp(k,q),q=1,3),Ra(k),Et(k)
END DO ! k
C--- Information line at end of file
WRITE(5,*)Idta,N,ssm,Am,okv,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
CLOSE(5)
C--- Minimal distance between bodies lmn1 and lmn2
DO l = 2,N3 + 1

DO ll = 2,N3 + 1
IF(ll.EQ.l) GO TO 4
XX = XV0(1,ll) - XV0(1,l)
XX = XX*XX
YY = YV0(1,ll) - YV0(1,l)
YY = YY*YY
ZZ = ZV0(1,ll) - ZV0(1,l)
ZZ = ZZ*ZZ
RIJ = DSQRT(XX + YY + ZZ)
IF(1.EQ.2.AND.ll.EQ.3) R23 = RIJ
IF(RIJ.GT.Rmin) GO TO 4
Rmin = RIJ
lmn1 = l
lmn2 = ll
4 END DO ! ll
END DO ! l
OPEN(UNIT=3,FILE=FIMA3)
DO l = 1,N3 + 2
DO l3 = 1,2
WRITE(3,55)l,XV0(l3,l),YV0(l3,l),ZV0(l3,l)
END DO ! l3
END DO ! l
WRITE(3,*)'Coordinates and velocities of the system baricentre'
WRITE(3,*)(Xc(q),q=1,3)
WRITE(3,*)(Pns(q),q=1,3)
WRITE(3,*)'Initial undimensional coordinates and velocities'
WRITE(3,*)'      of the 1-st body'
WRITE(3,*)(X1(2,q),q=1,3)
WRITE(3,*)(U1(2,q),q=1,3)
WRITE(3,*)'Initial period in sidereal years = ',Prd
WRITE(3,*)'Distance between bodies 2 and 3',R23
WRITE(3,*)'Minimal distance between bodies ',lmn1,
*' and ',lmn2,', ',Rmin
WRITE(3,*)'Initial data in file ',FIMA1
WRITE(3,*)N3,smi,pm0,Asm,ec,okf,okfv,eps0,Rob,Ivr,dt,', ',FIMA5,
*Idta
CLOSE(3)
150 CONTINUE
END

```

Печатается в соответствии с решением Ученого Совета Института криосферы Земли  
Сибирского отделения Российской академии наук от 11 июля 2016 г., протокол № 6.