

УДК 521.131 + 524.47

Периодические орбиты N тел на сфере

И.И. Смульский

Институт криосферы Земли Тюменского научного центра СО РАН, Федеральный Исследовательский Центр, г. Тюмень, Россия

JSmulsky@mail.ru

Поступила в редакцию 16.06.2017 г.

После доработки 27.03.2019 г.

Принята к публикации 25.04.2019 г.

Аннотация

В статье рассмотрены гравитационные взаимодействия N тел, которые образуют распределенную по сфере структуру. Разработаны метод и программа создания таких структур на основании точного решения задачи осесимметричного взаимодействия N тел. Выполнены исследования по созданию структур, и изучена их динамика и эволюция. На этой основе объяснена динамика и эволюция шаровых звездных скоплений.

Ключевые слова: задача N тел, сферические структуры, решения, эволюция, шаровые звездные скопления.

DOI: 10.31857/S0023420620010070

1. Введение

В современной звездной динамике преимущественно используется статистический подход к эволюции звездных ассоциаций. На основании ряда упрощений или гипотез вводится гравитационный потенциал Φ ассоциации [1] - [2]. Вероятность нахождения звезды в определенной точке пространства и с определенной скоростью выражается функцией фазовой плотности ψ . Так как от распределения тел в пространстве зависит потенциал Φ , то из зависимости Φ от ψ выводятся различные уравнения (столкновительные, бесстолкновительные и т. д.) звездной динамики. Далее задачей статистической звездной динамики является подбор функции фазовой плотности ψ , с использованием уравнений звездной динамики, такой, что бы она давала потенциал Φ , который обеспечивал бы наблюдаемые параметры звездной ассоциации.

Принято, что потенциал Φ создает регулярные силы, а воздействия на каждую звезду отдельных звезд создают иррегулярные силы. Поэтому определенная в первой задаче функция фазовой плотности ψ должна быть уточнена на действие иррегулярных сил.

Но так как в этом подходе вводится ряд упрощений, полученную звездную ассоциацию с функцией распределения ψ , необходимо проверить численным интегрированием дифференциальных уравнений движения всех звезд. Как правило, такая проверка показывает, что желаемая цель не достигнута. В результате выдвигаются разные объяснения и вводятся дополнительные факторы воздействия. Их поиск и учет порождает новые проблемы.

В статье применительно к шаровым звездным скоплениям рассматривается не статистический подход, а детерминированный. Звездная ассоциация задается детерминировано: каждая звезда имеет свою массу, радиус, координаты и скорости. А эволюция всей ассоциации исследуется в результате решения дифференциальных уравнений движения каждой звезды. При таком подходе необходима какая-то идея, как задать параметры (массы, координаты и скорости) звезд ассоциации, чтобы рассчитанные движения тел этой ассоциации действительно отражали эволюцию наблюдаемой ассоциации.

Тысячи звезд, которые входят в шаровые звездные скопления, притягиваются друг к другу по закону всемирного тяготения Ньютона. Их существование вызывает два вопроса. Если все звезды притягиваются друг к другу, то почему они не сольются в одно тело? Это можно объяснить тем, что в скорости каждой звезды имеется перпендикулярная

составляющая суммарной силе, поэтому ее движение происходит по криволинейной траектории. В результате все звезды совершают квазипериодические движения. Именно так происходит движение планет вокруг Солнца. Несмотря на то, что каждая планета притягивается Солнцем и другими планетами, она может обращаться вечно вокруг Солнца по квазиэллиптической орбите.

В Солнечной системе движение планет происходит почти в одной плоскости, и орбиты планет не пересекаются. А в шаровом скоплении плоскости орбит звезд расположены в пространстве, и их так много, что, казалось бы, столкновения неизбежны. В результате столкновений звезды будут сливаться в одну звезду, а при близких прохождениях будут выбрасываться из скопления. Поэтому со временем шаровое звездное скопление должно исчезнуть. Однако они не исчезают, и астрономы относят их к самым старым объектам галактик. Отсюда возникает второй вопрос: почему шаровые скопления длительно существуют?

Чтобы ответить на эти вопросы необходимо рассмотреть взаимодействие звезд в шаровом скоплении и исследовать их движения. Для задания координат и скоростей звезд можно воспользоваться опытом создания структур с взаимодействующими телами, которые совершают периодические движения на плоскости. Для таких структур получены точные решения для двух задач гравитационного взаимодействия N тел. В первой задаче [3] - [4] вокруг центрального тела равномерно на окружности расположено $N-1$ периферийных тел. В такой структуре в зависимости от скорости периферийных тел, они могут двигаться по эллипсу, параболе или гиперболе. При наличии только радиальной скорости, структура, в зависимости от величины и знака скорости, превращается в одно тело или тела в ней удаляются на бесконечность.

Во второй задаче [5] - [6] на плоскости рассматривается многослойная вращающаяся структура, которая состоит из N_2 слоев, на каждом из них расположено N_3 тел. За счет вариации радиусов слоев и углов взаимного расположения тел в соседних слоях можно создать бесчисленное количество разновидностей таких вращающихся структур. В работах [3] - [6] разработаны методы и программы создания структур, а динамика и их эволюция исследовалась с помощью системы Galactica [7] - [9].

В работах [5] - [6] отмечается возможность превращения плоских вращающихся структур в пространственные за счет разворота слоев в пространстве. В настоящей статье пространственная структура создается за счет использования результатов первой задачи. С этой целью в однослойной осесимметричной структуре орбиты тел последовательно разворачиваются в пространстве.

2. Основные результаты задачи осесимметричного взаимодействия N тел

В этой задаче [3] - [4] N_3 тел массой $m_i = m_1$ осесимметрично расположены на плоскости (см. рис. 1а) вокруг центрального тела массой m_0 . Через тело m_1 проходит ось x_1 . От нее отсчитываются полярные углы $\varphi_{0,i}$ остальных тел:

$$\varphi_{0,i} = (i-1) \cdot \Delta\varphi, \quad i = 1, 2, \dots, N_3, \quad \text{где } \Delta\varphi = 2\pi / N_3. \quad (1)$$

В полярных координатах r, φ_0 , где r на рис. 1а совпадает с x_1 , координаты тела m_i будут r_i, φ_{0i} . В результате решения задачи ньютоновского взаимодействия тел уравнение траектории в полярной системе координат получено в следующем виде [3] - [4]:

$$r_i = \frac{R_p}{(\alpha_1 + 1) \cdot \cos \varphi_i - \alpha_1}, \quad (2)$$

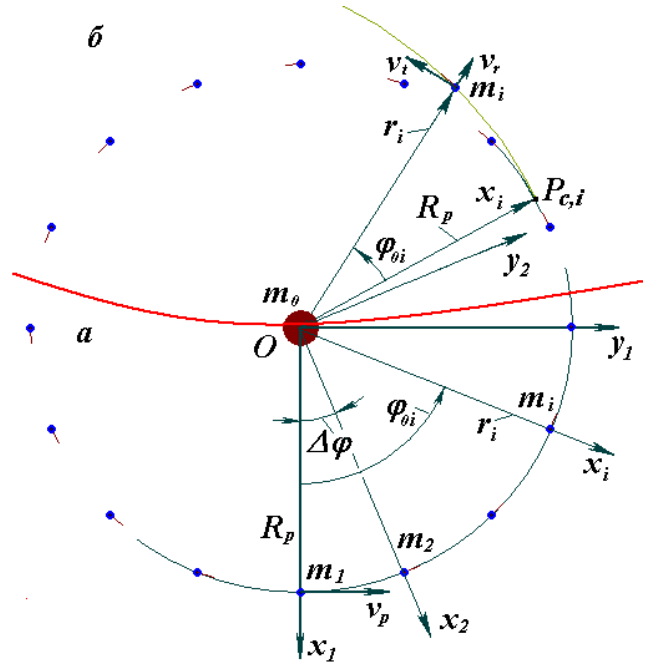
где R_p – радиус перицентра, т.е. точки на орбите с наименьшим расстоянием до центра O на (рис. 1);

$$\alpha_1 = \mu_1 / (R_p \cdot v_p^2); \quad (3)$$

$$\mu_1 = -G(m_0 + m_1 \cdot f_{N_3}); \quad (4)$$

$$f_{N_3} = 0.25 \sum_{i=2}^{N_3} \frac{1}{\sin[\pi(i-1)/N_3]}. \quad (5)$$

Рис. 1. Геометрические характеристики плоской однослойной осесимметричной структуры N тел с массой центрального тела m_0 и с массой каждого периферийного тела $m_i = m_1$: a – исходное расположение тел в вариантах I, II и III сферически распределенных структур, $\varphi_{0,i}$ – полярный угол тела m_i от оси x_1 ; b – исходное расположение тел в варианте IV , $\varphi_{0,i}$ – полярный угол тела m_i от перицентра его орбит $P_{c,i}$.



В формулах (2) - (5): φ_i – полярный угол тела m_i , отсчитываемый от его перицентра; α_1 – параметр траектории; μ_1 – параметр взаимодействия; f_{N3} – вклад воздействия $N_3 - 1$ периферийных тел на одно из них. В зависимости от параметра траектории α_1 , орбиты периферийных тел могут быть окружностями ($\alpha_1 = -1$), эллипсами ($-1 < \alpha_1 < -0.5$), параболами ($\alpha_1 = -0.5$) и гиперболами ($-0.5 < \alpha_1 < 0$). Время движения тела по траектории также зависит от α_1 [3] - [4].

Запишем еще четыре параметра орбиты периферийных тел [3]: период обращения по орбите

$$P = -\frac{2\pi\alpha_1 \cdot R_p}{v_p (-2\alpha_1 - 1)^{3/2}}, \quad (6)$$

скорость в перицентре

$$v_p = \sqrt{\mu_1 / (\alpha_1 \cdot R_p)}, \quad (7)$$

эксцентриситет орбиты

$$e = -(1 + 1/\alpha_1) \quad (8)$$

и большая полуось орбиты

$$a = R_p (2\alpha_1 + 1) / \alpha_1. \quad (9)$$

3. Геометрическое построение структуры N тел с периодическими орбитами на сфере

Начиная со второго тела (рис. 1а), производится поворот плоскости его орбиты вокруг полярного радиуса тела $r_2 = x_2$ совместно со всеми остальными телами с радиусами r_3, r_4, \dots, r_{N3} на угол $\Delta\theta$. Затем вокруг радиуса r_3 третьего тела на такой же угол поворачиваются орбиты тел r_3, r_4, \dots, r_{N3} . Если такие повороты произвести для всех остальных периферийных тел, то получим структуру N тел с периодическими орбитами на сфере. В дальнейшем будем ее называть сферически распределенной структурой.

В момент построения тела осесимметричной структуры (рис. 1а) находятся в перицентрах с радиусом R_p , и они имеют только трансверсальные скорости v_p . Их радиальные скорости $v_r = 0$. На рис. 2 показан начальный этап построения структуры. С телом m_1 связана система координат $x_1 y_1 z_1$. Тело m_2 в плоскости $x_1 O y_1$ сдвинуто от тела m_1 на угол

$$\Delta\psi = k_\varphi \cdot \Delta\varphi. \quad (10)$$

Коэффициент k_φ введен для возможности вариации геометрии пространственной структуры. Запишем координаты и скорости первого тела m_1 в координатной системе $x_1 y_1 z_1$

$$x_{1,1} = R_p; y_{1,1} = 0; z_{1,1} = 0; v_{x,1,1} = 0; v_{y,1,1} = v_p; v_{z,1,1} = 0. \quad (11)$$

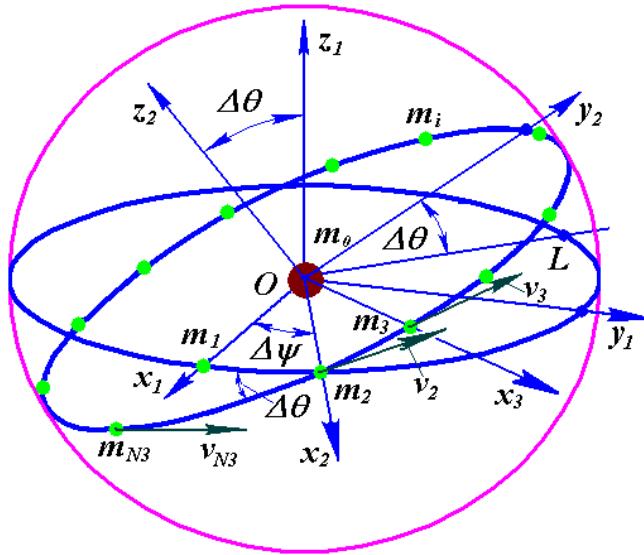


Рис. 2. Начальный этап построения сферически-распределенной структуры: плоскости орбит тел от m_2 до m_{N3} повернуты на угол $\Delta\theta$ вокруг оси Ox_2 , проходящей через тело m_2 .

В выражениях (11) первый индекс «1» обозначает номер системы координат, а второй индекс «1» обозначает номер тела. Со вторым телом m_2 связываем систему координат $x_2y_2z_2$ (рис. 2). Она повернута вокруг оси x_2 на угол

$$\Delta\theta = k_{\varphi_v} \cdot \Delta\varphi. \quad (12)$$

Коэффициент k_{φ_v} также введен для вариации геометрии пространственной

структуры.

С помощью углов $\Delta\psi$ и $\Delta\theta$ записываются выражения для координат $x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2}$ и скоростей $v_{x,1,2}, v_{y,1,2}, v_{z,1,2}$ второго тела в координатной системе $x_1y_1z_1$ первого тела. Для третьего тела эти преобразования выполнены в координатной системе $x_2y_2z_2$ второго тела. В результате такого последовательного рассмотрения получены преобразования для l -того тела с координатной системы i -того тела в координатную систему $i-1$ тела [10]:

$$x_{i-1,l} = x_{i,l} \cos \Delta\psi - y_{i,l} \sin \Delta\psi \cdot \cos \Delta\theta + z_{i,l} \sin \Delta\psi \cdot \sin \Delta\theta; \quad (13)$$

$$y_{i-1,l} = x_{i,l} \sin \Delta\psi + y_{i,l} \cos \Delta\psi \cdot \cos \Delta\theta - z_{i,l} \cos \Delta\psi \cdot \sin \Delta\theta; \quad (14)$$

$$z_{i-1,l} = y_{i,l} \sin \theta + z_{i,l} \cos \Delta\theta. \quad (15)$$

Аналогичными выражениями описываются преобразования для скоростей. Для каждого индекса l в формулах (13) - (15), начиная с 2 до $N_3 - 1$, представлены координаты тел от 3 до N_3 в координатной системе с номером на единицу меньше. Поэтому по формулам (13) - (15) для тела с номером N_3 нужно выполнить $N_3 - 2$ преобразований, для тела с номером $N_3 - 1$ выполнить $N_3 - 3$ преобразований и т. д. до тела $l = 3$ с одним преобразованием. Тогда повернутые в пространстве координаты и скорости всех тел будут выражены в координатной системе $x_1y_1z_1$.

4. Программа создания структуры

Этот алгоритм построения структуры, на первый вид – очень простой, содержит ряд нетривиальных проблем. Он реализован в программе SphDsSt4.for [10]. Программа состоит из трех частей: 1) считывание исходных параметров; 2) построение сферически распределенной структуры; 3) создание файла начальных условий для системы Galactica.

Основные исходные параметры считываются из файла данных SphDsSt4.dat [10]. В этом файле задаются параметры структуры: N_3 – количество периферийных тел; m_i – исходная общая масса структуры; p_{m0} – часть массы m_i , занимаемая центральным телом; A_{Sm} – полуось исходной орбиты в астрономических единицах (AU); e – эксцентриситет орбит периферийных тел; k_φ и k_{φ_v} – коэффициенты исходных углов тел и скоростей при построении структуры; ρ_b – абсолютная плотность тел. Следует отметить, что плотность тел ρ_b в $\text{кг}/\text{м}^3$ необходима для расчета их радиусов. Радиусы тел используются в программе Galactica при расчете их столкновений. В файле SphDsSt4.dat задается также ряд других параметров, необходимых для системы Galactica.

В программе SphDsSt4.for для тел от $l = 3$ до N_3 координаты и скорости тела согласно (13) – (15) пересчитываются в координатную систему $x_1y_1z_1$ первого тела с помощью вложенных друг в друга циклов. В этой программе приведены алгоритмы построения структур по третьему и четвертому вариантам, которые будут описаны ниже.

Система Galactica [7] - [8] позволяет рассчитать динамику сферически распределенной структуры и исследовать ее эволюцию. Кроме того, в данной работе она используется для завершения создания структуры. В результате поворотов будет создана структура, в которой тела на сфере будут организованы по строгому математическому закону (13) - (15). После их взаимодействия в течение некоторого времени тела равномерно распределятся по сфере. Для этого распределения и используется система Galactica.

В файле начальных условий для программы Galactica используются безразмерные величины [7]. Все массы тел отнесены к общей массе системы $m_{ss} = mi$. Время выражается в сотнях периодов P . Для этого введен коэффициент времени

$$k_t = 1/(100 \cdot P). \quad (16)$$

Следует отметить, что период P рассчитывается в программе SphDsSt4 согласно (6). Геометрические размеры в программе Galactica отнесены к величине

$$A_m = (G \cdot m_{ss} / k_t^2)^{1/3}. \quad (17)$$

В программе Galactica интегрируются дифференциальные уравнения взаимодействия тел по закону тяготения Ньютона. Они в безразмерном виде, например, для проекции x выглядят так:

$$\frac{d^2 x_j}{dT^2} = - \sum_{k \neq j}^N \frac{m_{ok} (x_j - x_k)}{r_{jk}^3}, \quad (18)$$

где $x_j = x_{C,j}/A_m$ – безразмерная координата i -того тела;

$x_{C,j}$ – координата j -того тела относительно центра масс всей структуры;

$m_{o,k} = m_k / m_{ss}$ – безразмерная масса k -того тела;

$j = k = 1, 2, \dots, N; N = N_3 + 1$.

В программе Galactica используется метод интегрирования высокой точности [7]. Применительно к динамике Солнечной системы точность программы Galactica на порядки превышает точность программ NACA [9]. Система Galactica, с набором необходимых средств для решения задач, свободно доступна на сайте <http://www.ikz.ru/~smulski/GalactcW/>. Ее описание представлено в файле GalDiscrp.pdf на русском языке, а в файле GalDiscrpE.pdf – на английском. Программа SphDsSt4, файл данных SphDsSt4.dat и упоминаемые здесь файлы структур представлены на сайте <http://www.ikz.ru/~smulski/Data/SphDsStr/>.

5. Варианты создания структуры

Описанный выше алгоритм является первым вариантом создания структуры (*I*). Эта структура с $N_3 = 99$, $k_\phi = 1.72$ и $k_{\phi v} = 1$ представлена на рис. 3 в системе координат $x_{1y_1z_1}$, связанной с первым телом, которая ранее именовалась как $x_{1y_1z_1}$. Рассматриваемые структуры имели следующие размерные параметры: масса центрального тела равна массе Солнца, масса периферийных тел равна массе всех планет, а радиус сферы равнялся полуоси Земной орбиты. Период обращения периферийных тел при этих условиях близок к 1 году. Как видно из рис. 3, тела располагаются на окружности в верхней полусфере. Линия их расположения дважды обогнула верхнюю полусферу и на втором обороте тела приблизилась к телам первого оборота. Недостатком этой структуры является то, что тела находятся только в верхней полусфере, и при последующих оборотах на линии их расположения они могут накладываться друг на друга.

Во втором варианте (*II*) вектора скорости нечетных тел, начиная с третьего, поворачивались вниз (рис. 2), т.е. $\Delta\theta < 0$, а вектора скорости четных тел поворачивались вверх. Вид структуры *II* с $k_\phi = 0.8$ показан на рис. 3. Как видно, вектора скорости тел 98 и 99 пересекаются. Поэтому происходят парные сближения и столкновения соседних тел при исследовании взаимодействия структуры программой Galactica. После 100 обращений тел в этой структуре было 51 столкновение.

В третьем варианте (*III*) вектора скорости четных тел не только поворачивались вверх на угол $\Delta\theta$, но и изменялись на противоположное направление. Как видно из рис. 3,

в структуре (III) с $k_\varphi = 0.8$ вектора скорости соседних тел, например, 98 и 99 направлены в разные стороны. Поэтому при взаимодействии эти тела удаляются друг от друга. В этой структуре за 100 обращений не было ни одного столкновения.

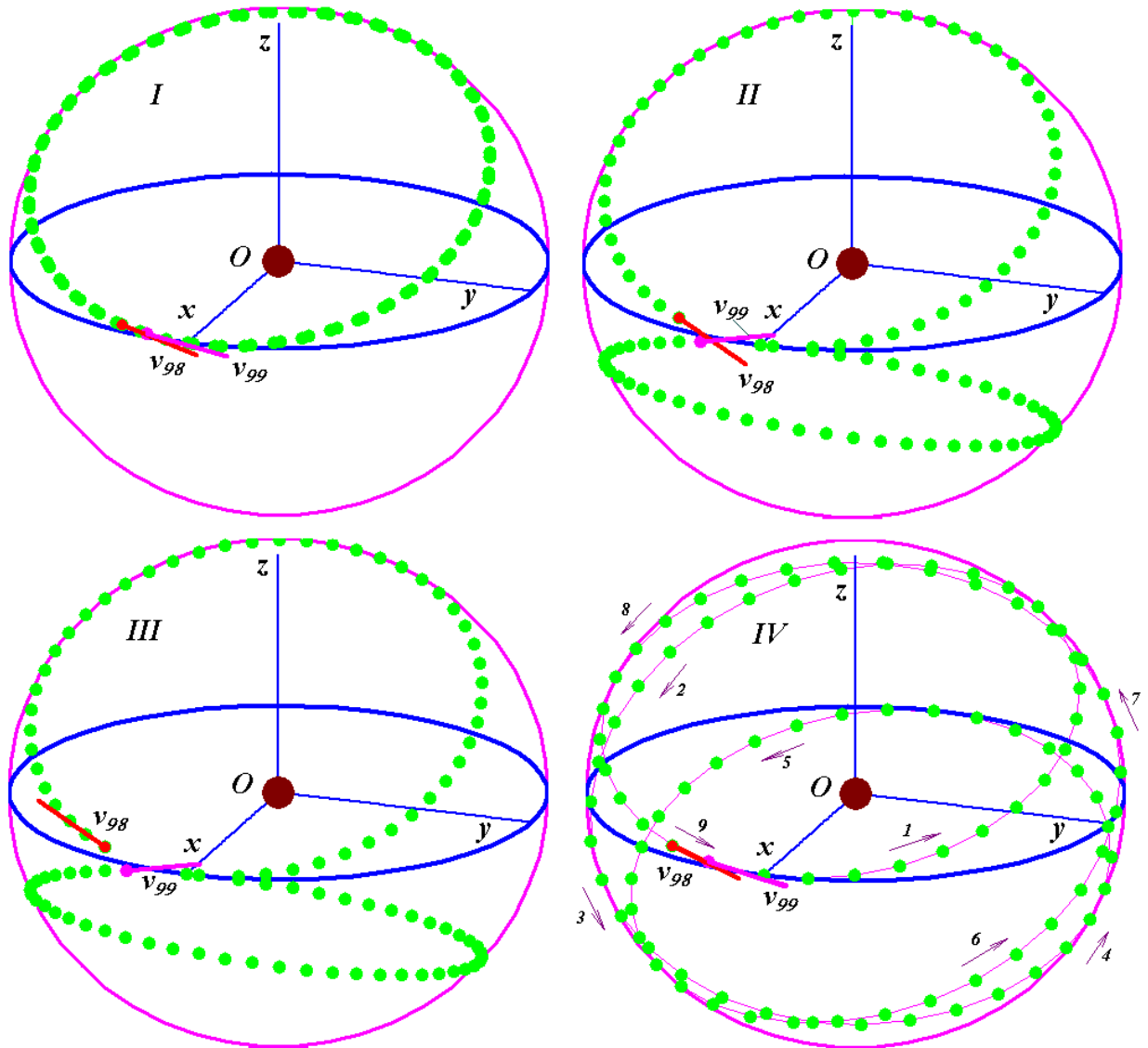


Рис. 3. Четыре варианта: I, II, III и IV создания сферически-распределенной структуры с $N_3 = 99$ периферийных тел: общая масса структуры $m_i = 1.99179 \cdot 10^{30}$ кг; масса центрального тела $m_0 = 1.98912 \cdot 10^{30}$ кг; масса периферийного тела $m_1 = 2.69596 \cdot 10^{25}$ кг; радиус круговых орбит $a = 149.598$ млн. км; период обращения $P = 0.99945$ сидерических года; тело m_1 находится на оси x ; вектора скорости тел 98 и 99 показаны отрезками; стрелками 1, 2, ... 9 показана последовательность расположения периферийных тел в варианте IV; сидерический год – период обращения Земли вокруг Солнца по отношению к неподвижным звездам.

Третий вариант алгоритма представлен в программе SphDsSt4.for. Как уже отмечалось, он основан на последовательном повороте векторов скорости тел осесимметричной структуры. При этом тела находятся в перицентрах.

В четвертом варианте каждое i -ое тело на своей орбите находится на своем полярном угле $\varphi_{0,i}$, согласно формуле (1). На рис. 1б показано положение тела m_i на своей орбите. Полярный радиус r_i тела определяется выражением (2). Его радиальная скорость равна [3]

$$v_{r,i} = \pm v_p \sqrt{(\alpha_1 + 1)^2 - (\alpha_1 + R_p / r_i)^2} . \quad (19)$$

Радиальная скорость положительна при движении тела от перицентра до апоцентра, и отрицательна – при возвращении к апоцентру. Трансверсальная скорость запишется так [3]:

$$v_{t,i} = v_p \cdot R_p / r_i \quad (20)$$

Координаты и скорости тела m_i в системе координат $x_i y_i z_i$ с осью x_i , проходящей через перицентр $P_{c,i}$, (рис. 1б) будут:

$$x_{p,i} = r_i \cdot \cos \varphi_{0,i}; \quad y_{p,i} = r_i \cdot \sin \varphi_{0,i}; \quad z_{p,i} = 0; \quad (21)$$

$$v_{xp,i} = v_{r,i} \cdot \cos \varphi_{0,i} - v_{t,i} \cdot \sin \varphi_{0,i}; \quad v_{yp,i} = v_{r,i} \cdot \sin \varphi_{0,i} + v_{t,i} \cdot \cos \varphi_{0,i}; \quad v_{zp,i} = 0. \quad (22)$$

Как уже отмечалось, в четвертом варианте на первоначальной окружности (рис. 1 и рис. 2) находятся не тела m_i , а перицентры орбит $P_{c,i}$ тел m_i . Они располагаются на окружности с интервалом $\Delta\psi$. При повороте орбит на угол $\Delta\theta$ перицентры будут располагаться на сфере, а сами тела m_i будут располагаться на своих орбитах на угловом расстоянии от перицентров $\varphi_{0,i}$. При этом скорости тел m_i также привязаны к их перицентрам выражениями (22). Поэтому при повороте орбит координаты и скорости (21) – (22) будут преобразовываться согласно выражениям (13) – (15) от системы координат i -ой орбиты к $i - 1$ орбите. Весь алгоритм представлен в программе SphDsSt4.for.

По четвертому варианту (IV) была создана структура с $N_3 = 99$, $k_\varphi = 1.72$ и $k_{\varphi v} = 1$ (рис. 3). Тела по линии расположения на сфере, начиная с первого на оси x , начинают огибать верхнюю полусферу (стрелка 1) с лицевой стороны и завершают ее с тыльной стороны 2. Затем выходят на лицевую сторону нижней полусферы 3, проходят ее внизу 4. Далее проходят по лицевой стороне верхней полусферы 5 и проходят по тыльной стороне нижней полусферы 6. Затем они появляются на верхней полусфере 7, вверху проходят по тыльной стороне 8, а внизу выходят на лицевую сторону 9 и таким образом завершается расположение тела 99 возле 1-ого. Итак, в этом варианте алгоритма тела располагаются на сфере по линии совершающей три оборота.

При расчете динамики этой структуры с помощью системы Galactica она не изменялась в течение 10 обращений. После 100 обращений тела равномерно распределились по сфере. Это новое свойство неизменности структуры в течение десятка обращений представляет значительный интерес: можно ли создать структуру, которая бы длительно не изменялась?

6. Динамика и эволюция распределенных по сфере структур

6.1. При разных количествах тел. Движение тел в структурах изучалось в результате интегрирования дифференциальных уравнений их движения (18) с помощью системы Galactica. Рассматривались структуры с двумя, 11, 99 и 999 периферийными телами.

В случае двух периферийных тел, обращающихся во взаимно-перпендикулярных плоскостях, система исследовалась за время 1000 обращений. Плоскости орбит изменяются, и изменяется радиус орбит. В течение 500 обращений относительное отклонение радиуса орбиты δr колеблется в 4-ом знаке. Затем оно растет и к 1000-ому обращению достигает 18.7%. Радиус орбиты второго тела к этому моменту уменьшается на 10.8%.

Такая система из трех тел является ассиметричной, поэтому происходят ее изменения. В симметричной системе, когда периферийные тела находятся в одной плоскости, система существует без изменения практически неограниченное время.

Структура из 11 периферийных тел, созданная по варианту III, существовала без изменения на всем исследованном интервале в 100 обращений. К 100-му обращению наибольшие изменения радиуса орбит не превышали $\delta r = \pm 0.06$.

6.2. При эллиптических орбитах. В рассмотренных выше структурах эксцентриситет $e = 0$. Были созданы структуры с эллиптическими орбитами с эксцентриситетом $e = 0.3$. В процессе движения структура в третьем варианте увеличивалась и уменьшалась в размерах, т.е. пульсировала. К 100-му обращению тела

равномерно распределились по сфере, и пульсации по размеру структуры прекратились. В четвертом варианте все тела первоначально равномерно распределены по эллиптической орбите, поэтому такая явная пульсация отсутствует.

6.3. При разных массах тел. Рассматривались также структуры с разными массами периферийных тел. В предыдущих структурах доля массы центрального тела была $p_{m0} = 0.99866$. При увеличении масс периферийных тел до половины массы системы ($p_{m0} = 0.5$), центр масс структуры существенно сдвигается от центра тела m_0 . Скорости периферийных тел в момент создания структуры уменьшаются с 8.6 до 8 относительных единиц. Однако из-за больших масс периферийных тел происходит сближение двух из них за время $T = 1.4 \cdot 10^{-4}$ и первоначальная конфигурация структуры нарушается. Здесь T – безразмерное время, единица которого равна сидерическому столетию, т.е. 36525.636042 дней. К моменту $T = 1$, т.е. к 100 обращениям в структуре было 11 столкновений, и размер ее увеличился в 400 тыс. раз, т.е. она полностью разрушилась.

При меньшей массе периферийных тел ($p_{m0} = 0.9$) они за три обращения распределились в пространстве, при этом размер системы увеличился не намного. С дальнейшим движением размер системы до $T = 0.44$ остается без изменения. К 100 обращениям в системе произошли три столкновения, и она существенно увеличилась в размере.

В предыдущих двух структурах с $p_{m0} = 0.5$ и $p_{m0} = 0.9$ шаг интегрирования был $\Delta T = 1 \cdot 10^{-7}$. При дальнейшем уменьшении массы периферийных тел ($p_{m0} = 0.95$) структура была более стабильной, поэтому шаг интегрирования был $\Delta T = 1 \cdot 10^{-6}$. В этой структуре к 100 обращениям столкновений было 7, причем одно столкновение было с центральным телом, а четыре тела вышли далеко за границы структуры.

В момент создания структуры (рис. 3) расстояния между телами – наименьшие. Затем в процессе движения тел они распределяются по сфере и расстояния увеличиваются. Поэтому при больших массах периферийных тел их взаимодействие вначале будет разрушать структуры прежде, чем тела распределятся по сфере. Поэтому были увеличены массы периферийных тел в уже созданной структуре после 100 ее обращений. Координаты новой структуры остались прежними, а скорости умножились на коэффициент k_{vcr} . Этот коэффициент определялся как отношение скорости периферийного тела в осесимметричной плоской структуре с новыми массами к скорости в структуре с прежними массами. Таким образом была создана структура с $p_{m0} = 0.5$. Динамика ее исследовалась с шагом $\Delta T = 1 \cdot 10^{-7}$ до $T = 0.033$, т.е. за три обращения периферийного тела. За это время было одно столкновение периферийного тела с центральным телом, и размер системы немного увеличился. То есть, устойчивость этой структуры существенно возросла, по сравнению с ранее рассматриваемой структурой с $p_{m0} = 0.5$.

Таким же образом была создана структура с $p_{m0} = 0.9$. Ее движение было рассмотрено с шагом интегрирования $\Delta T = 1 \cdot 10^{-6}$ за $T = 1$ столетие. За это время было столкновение тела 85 с телом 73, которое не привело к изменению структуры. А сближение тела 79 с центральным телом привело к ее существенным изменениям. Это тело приобрело большую скорость, и было выброшено из структуры. Центральное тело вместе с несколькими телами было также выброшено из структуры в обратном направлении. А структура с оставшимися телами начала увеличиваться в размерах.

Механизм сближения периферийного тела с центральным телом, с последующим выбросом из структуры, детально рассмотрен на примере кулоновского взаимодействия многослойных структур [11] – [13]. Этот механизм справедлив и в рассматриваемом случае.

Выполненные исследования с разными массами периферийных тел свидетельствуют, что при $p_{m0} < 0.95$ создать сферически-распределенную структуру проблематично при заданном радиусе структуры, который в пересчете на размерные величины равняется радиусу земной орбиты. Для дальнейшего увеличения массы периферийных тел, необходимо увеличивать радиус структуры.

7. Динамика и эволюция структуры из 1000 тел

Основные исследования динамики и эволюции структуры были выполнены при общем количестве тел равным 1000, которое приближается к количеству тел в шаровых звездных скоплениях. В качестве примера на рис. 4 приведено шаровое звездное скопление М53 в созвездии Волос Вероники [14]. Оно находится на расстоянии 60000 световых лет от центра Галактики и примерно на таком же расстоянии от Солнечной системы.

Рис. 4. Шаровое звездное скопление М 53 (или NGC 5024) в созвездии Волос Вероники [14].

В центральных областях шаровых звездных скоплений концентрация звезд составляет 100-1000 звезд на кубический парсек (1 пк = 206264.8 а. е.), в то время как в окрестностях Солнца – порядка 0.13 1/пк^3 , т.е. в 700-7000 раз меньше. Диаметры скоплений – 20-60 пк, а их массы – 10^4 - 10^6 масс Солнца. В центре шаровых скоплений имеются массивные звезды, массой порядка 10^4 и более масс Солнца. Из-за высокой плотности звезд, в скоплениях часто происходят близкие прохождения звезд и их столкновения. При большом увеличении, как видно из рис. 4, шаровое скопление не имеет четкой границы, и представляет собой структуру с плавным убыванием количества звезд от его центра.



Была создана структура по третьему варианту (файл StrD999c.dat) с $N_3 = 999$ и параметрами, приведенными на рис. 5. При таком количестве тел расстояния между ними небольшие. Для первых тел плоскости орбит отличаются также мало, а вектора скорости соседних тел направлены противоположно. Это приводит их к столкновению. Эти задачи считались с шагом $\Delta T = 1 \cdot 10^{-7}$. После 2000 шагов происходило столкновение тела 2 с телом 10. После удаления тела 2 и создания новой структуры, эта ситуация повторилась для тела 4. Таким образом, удалением из структуры StrD999c.dat тел 2, 4, 8, 10 и 15 была создана структура StrD994c.dat. Движение тел этой структуры исследовалось системой Galactica с шагом $\Delta T = 1 \cdot 10^{-7}$.

По мере движения тел, первоначальные их положения на двух окружностях (рис. 5) изменялись, и тела более равномерно распределялись по сфере. При этом происходили столкновения отдельных периферийных тел, и они объединялись в тело с удвоенной массой. К телу с удвоенной массой может присоединиться еще одно тело и получится тело с утроенной массой. Кроме того, периферийное тело может столкнуться с центральным телом. В табл. 1 приведена хроника столкновений за исследованный период $T = 1.65$ столетия.

Как видно из табл. 1, основное количество столкновений $k_{imp} = 40$ произошло за первые 5 обращений, что составляет $2/3$ столкновений за весь интервал времени в 165 обращений. При этом образовалось 32 тела с удвоенной массой и 2 тела с утроенной. А четыре периферийных тела столкнулись с центральным телом. Для точного определения: тела, с какими массами образовали тело тройной массы и какие столкнулись с центральным телом, – нужно проводить логический анализ этих результатов. При этом необходимо иметь в виду, что в программе Galactica при столкновении двух тел образованному телу присваивается номер тела с большей массой, а масса меньшего тела приравнивается нулю. Поэтому, здесь количество столкновений k_{imp} определяется по количеству тел с нулевой массой.

a

```

1.0000000000000000E-009 0.9986600000000000 8.56777727196919
1.0000000000000000E-009 -3.030789764394293E-019 2.507217523872729E-019
2.982085369927171E-019 -6.832282161006552E-005 -3.534770214955613E-007
4.695353445885883E-007 0.0000000000000000E+000 0.0000000000000000E+000
0.0000000000000000E+000 4.918195167377618E-002 4.918195167377618E-002
0.0000000000000000E+000 1 1.0000000000000000E-006
0.0000000000000000E+000

```

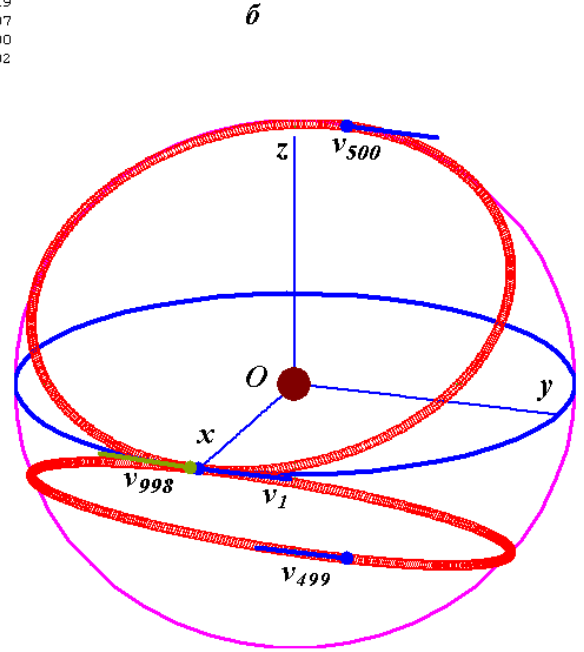
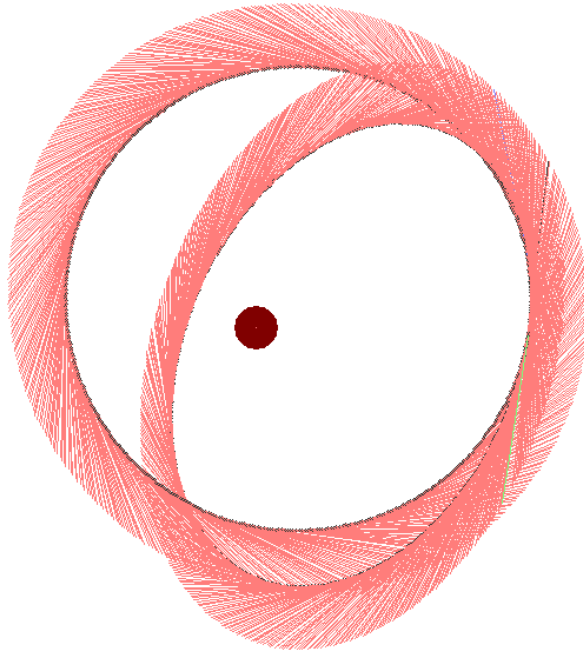


Рис. 5. Сферически-распределенная структура по варианту III с $N = 1000$, $k_\phi = 0.86$, $k_{\phi v} = 1$, $R = 1$ а.е., $P_{rd} = 1$ год и с массой центрального тела равной массе Солнца: *a* – проекция на горизонтальную плоскость после расчета движения структуры программой Galactica за один шаг по времени; числами показана динамические параметры структуры и характеристики вычислительного процесса [7]; *б* – вид в системе координат xuz на фронтальную плоскость: линиями у тел 1, 499, 500 и 998 показаны вектора скорости.

За дальнейшие 5 лет, как видно из табл. 1, произошло 5 столкновений. При этом образовалось одно тело с тройной массой. За 5 лет с 10 до 15 обращений было одно столкновение, с 15 до 20 обращений – три столкновения, а за 40 лет с 20 до 60 обращений – не было столкновений. Не было также столкновений за 10-летний промежуток с 70 по 80 и с 90 по 95. В остальные пятилетия были по 1-2 столкновения.

Таблица 1. Динамика столкновений тел сферически распределенной структуры StrD994c.dat за 165 обращений: k_{imp} – количество столкновений; k_{2m1} – количество тел с удвоенной массой; k_{3m1} – количество тел с утроенной массой; k_{m0} – количество тел, столкнувшихся с центральным телом.

Параметры	Изменение параметров по времени T														
	T , лет	5	10	15	20	60	65	70	80	90	95	100	105	125	150
k_{imp}	40	45	46	49	49	51	54	54	55	55	56	57	58	59	61
k_{2m1}	32	35	34	37	37	39	40	40	41	41	40	41	42	43	45
k_{3m1}	2	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5
k_{m0}	4	4	4	4	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6

Образовавшаяся структура после 100 обращений с распределением тел по всей сфере показана на рис. 6. Расстояния периферийных тел от центрального тела преимущественно отличаются от первоначального расстояния не более чем на 3%. Периоды их обращений близки к 1 году. Ни одно тело не было выброшено из структуры. Только одно тело, а именно тело 2 приобрело большую эллиптичность орбиты, но период

его обращения существенно не изменился. Апоцентр его орбиты находится на расстоянии $L = 2.8$ радиуса структуры (на рис. 6а расстояние L до тела 2 уменьшено в 2 раза).

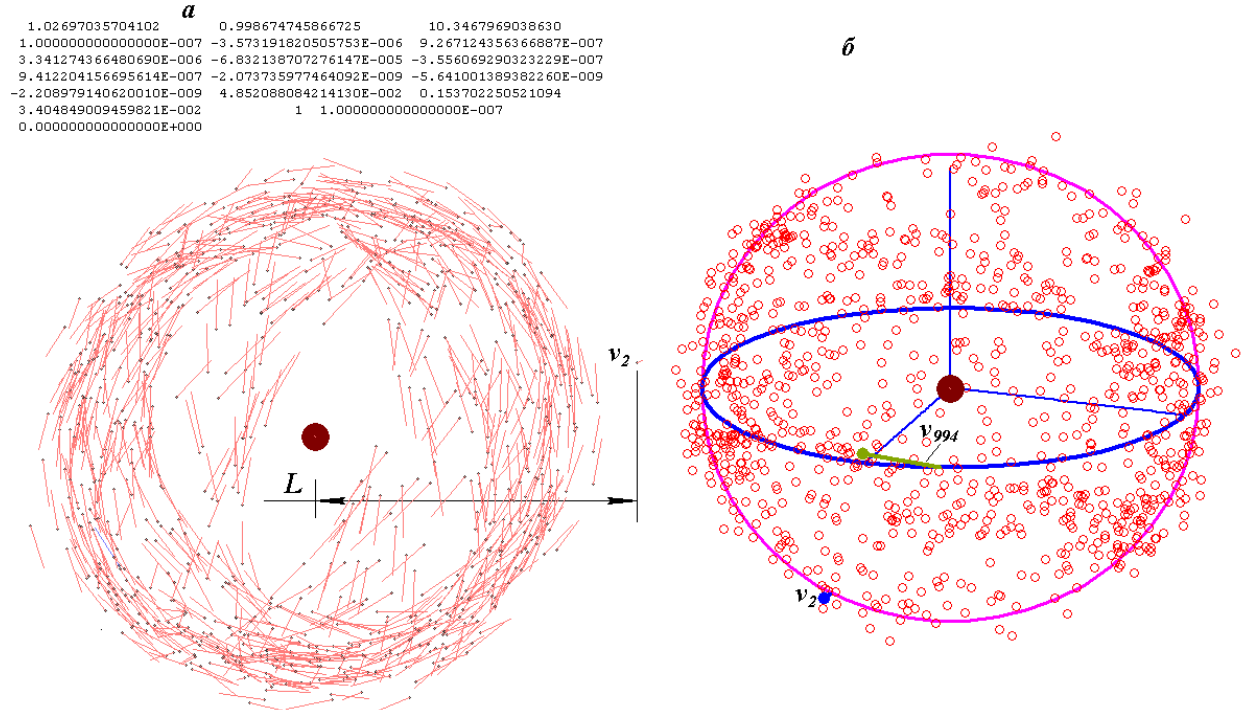


Рис. 6. Сферически-распределенная структура StrD994c.dat с $N3 = 994$ после движения за время $T = 1.027$ столетия. На рисунке расстояние L до тела 2 уменьшено в 2 раза. Период обращения тела 2 близок к 1 году; *a* – проекция на горизонтальную плоскость при расчете программой Galactica [7]; *б* – вид в системе координат xuz на фронтальную плоскость: вектора скорости тел 2 и 994 показаны отрезками.

Представленное на рис. 6 распределение тел по сфере уже сформировалось к 20 обращению. Второе тело вышло за границы первоначальной сферы за первые 5 обращений. Поэтому дальнейшее развитие структуры до 165 обращения можно рассматривать уже как стабильное существование сферически распределенной структуры. Временами происходят столкновения тел, и они объединяются в одно тело. Но чем дольше живет структура, тем меньше таких столкновений. В этой структуре тела с соседними номерами изначально по орбитам обращаются в разные стороны (см. рис. 5). Однако, столкновений на встречных скоростях не происходит. Все столкновения происходят при попутном сближении при пересекающихся орбитах тел. Только у второго тела, по-видимому, сближение произошло при встречных скоростях и, в результате изменения вектора скорости, оно приблизилось к центральному телу. После взаимодействия с ним оно перешло на вытянутую эллиптическую орбиту.

Была рассмотрена динамика и эволюция еще двух структур. Структура St4D999d.dat с 999 периферийными телами была создана по варианту IV с коэффициентом $k_\phi = 1.72$. Она просчитана за $T = 1.9$ столетия с шагом $\Delta T = 1 \cdot 10^{-7}$. При этом коэффициенте k_ϕ расстояния между телами одинаковые, за исключением тел 999 и 1: между ними расстояние в 4 раза больше. К пяти обращениям тела распределились по сфере, и было столкновений $k_{imp} = 158$, которые привели к образованию тел двойной массы $k_{2m1} = 141$, тройной массы $k_{3m1} = 1$ и четверной массы $k_{4m1} = 5$. К 10 обращениям параметры столкновений были $k_{imp} = 160$; $k_{2m1} = 140$; $k_{3m1} = 1$; $k_{4m1} = 6$. К 100 обращениям эти параметры изменились незначительно: $k_{imp} = 171$; $k_{2m1} = 139$; $k_{3m1} = 3$; $k_{4m1} = 7$; $k_{6m1} = 1$. Еще меньшие изменения произошли за последующие 90 обращений до $T = 1.9$ столетия: $k_{imp} = 173$; $k_{2m1} = 139$; $k_{3m1} = 3$; $k_{4m1} = 6$, $k_{6m1} = 2$.

В этой структуре после 70 обращения появилось тело с $6 \cdot m_1$, и не было ни одного столкновения с центральным телом. На рис. 7,2 эта структура показана для сравнения с

предыдущей структурой (рис. 7,1) после 100 обращений. Как уже отмечалось, структура 2 сформировалась за 5 обращений, т.е. значительно раньше, чем предыдущая 1. В ней не было столкновений с центральным телом и не было больших выбросов периферийного тела.

Структура St4D999e.dat была создана по четвертому варианту с дальнейшим уточнением. Коэффициент k_ϕ подобран так, чтобы расстояние между телами 999 и 1 совпало с остальными расстояниями между телами. Такую структуру будем называть регулярной (рис. 7,3). Она более стабильна, чем предыдущие. К 5-и обращениям больше половины тел находились на линии их первоначального образования. Тем не менее, к 10 обращениям все тела равномерно распределились по сфере. Столкновений в этой структуре было на порядок меньше. Например, к 5-ти обращениям $k_{imp} = 14$ и $k_{2m1} = 14$; к 100 обращениям $k_{imp} = 26$, $k_{2m1} = 24$ и $k_{3m1} = 1$. При этом с 95 по 160 обращения новых столкновений не было. Таким образом, первоначальная регулярная форма создания структуры приводит в дальнейшем к более стабильной структуре с равномерным распределением всех тел по сфере.

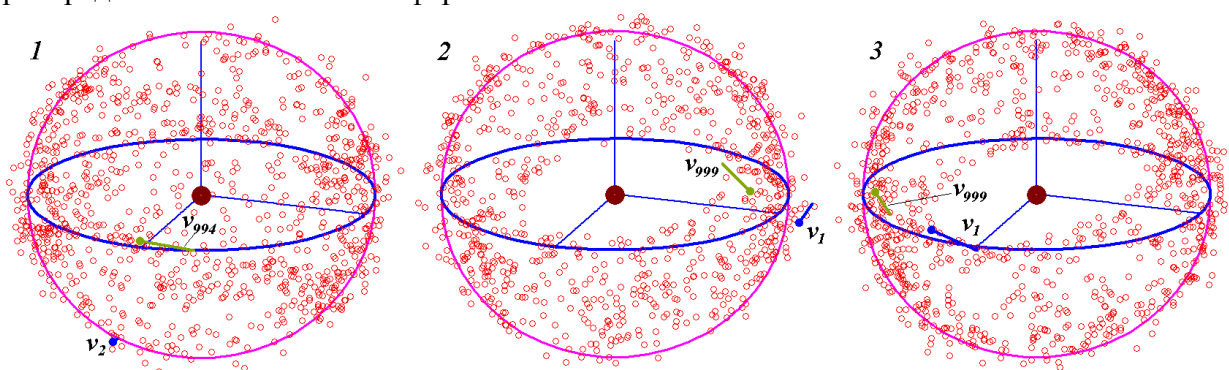


Рис. 7. Сферически-распределенные структуры с $N \approx 1000$, первоначально образованные по разным вариантам, после 100 обращений периферийных тел: 1 – по варианту III (рис. 6); 2 – по варианту IV; 3 – по варианту IV с уточнением расстояния между телами 1 и N_3 .

Следует отметить, что в установившихся структурах все тела совершают периодические движения. Период движений такой же, как и в первоначальной плоской структуре, из которой создана сферическая структура. Даже у тела 2 на рис. 6 с вытянутой эллиптической орбитой период практически не изменился.

Сравнивая вид полученных структур на рис. 7 с видом шарового звездного скопления на рис. 4, можно отметить следующее. Тела в структурах расположены компактнее, нежели в шаровом скоплении. Это объясняется «рукотворным» характером формирования структуры: первоначальная ее организация уменьшает количество тесных сближений, которые приводят в дальнейшем к большему разбросу тел по пространству.

Имеются также отличия структуры и звездного скопления, которые обусловлены самой моделью структуры: это неполная центральная симметрия структуры и ее разреженность в центральной области. При этом в менее регулярной структуре 1 по варианту III (рис. 7) центральная область более заполнена. Увеличить концентрацию тел в центре можно созданием многослойных сферически распределенных структур. В многослойных структурах доля массы центрального тела p_{m0} может быть уменьшена. Например, в плоских структурах из 15 слоев [5] - [6] она равна: $p_{m0} = 0.006$.

Что касается эволюции структуры и звездного скопления, то они подобны. Эти объекты могут существовать длительно без изменения. Временами могут происходить сближения тел, которые будут приводить к изменению радиуса их орбит или их столкновению. И чем дольше существует структура, тем меньше таких сближений. Об этом и свидетельствуют отмеченные вначале свойства шаровых звездных скоплений.

8. Масштабирование структур

Как уже отмечалось, в программе SphDsSt4 файлы структур с начальными условиями, например, St4D999e.dat, с помощью параметров m_{ss} , A_m , и k_t создаются в безразмерном виде [7]. Согласно (17) эти параметры связаны друг с другом, поэтому при известных A_m и m_{ss} коэффициент времени определяется так:

$$k_t = \sqrt{G \cdot m_{ss} / A_m^3}. \quad (23)$$

В структуре St4D999e.dat с $N = 1000$ тел, массой системы $m_{ss0} = 1.99179 \cdot 10^{30}$ кг, долей центрального тела $p_{m0} = 0.99866$, полуосью орбиты $a_0 = 1$ AU, масштабные параметры были $A_{m0} = 1.0973762 \cdot 10^{13}$ м и $k_{t0} = 3.1687536 \cdot 10^{-10}$ 1/сек. А безразмерная полуось была $a_{un} = 0.0136323$ и безразмерный период обращения периферийного тела $P_{un} = 9.9920079 \cdot 10^{-3}$.

Рассмотрим другую структуру с параметрами близкими к шаровому звездному скоплению: $m_{ss} = 10^5 \cdot M_s = 1.989118 \cdot 10^{35}$ кг, где M_s – масса Солнца; полуось орбиты $a = 1$ пк = $206264.8 \cdot \text{AU} = 3.0856775 \cdot 10^{16}$ м. Найдем параметры, при которых начальные условия в файле St4D999e.dat с безразмерными полуосью a_{un} и периодом P_{un} будут соответствовать этой структуре. Новый масштабный параметр будет $A_m = a/a_{un} = 2.263501 \cdot 10^{18}$ м. А коэффициент времени $k_t = 1.06980958 \cdot 10^{-15}$ 1/сек определяется в зависимости от новых m_{ss} и A_m из выражения (23).

Все полученные результаты, в том числе рис. 7, при интегрировании дифференциальных уравнений движения системой Galactica с начальными условиями файла St4D999e.dat соответствуют новой структуре с полученными параметрами A_m и k_t . Например, период обращения периферийных тел в ней

$$P = P_{un}/k_t = 9.34 \cdot 10^{12} \text{ сек} = 296.198 \text{ тыс. лет}. \quad (24)$$

То есть, если в предыдущей структуре периферийные тела обращались вокруг центрального тела за 1 год, то в новой структуре – почти за 300 тыс. лет.

В примере мы рассмотрели структуру с новой массой и новым размером, равным $2 \cdot a = 2$ пк. Полученные результаты можно также использовать для изучения влияния массы структуры или ее размера на ее характеристики, если изменять только массу или только размер системы. Поэтому приведенный здесь алгоритм масштабирования может быть использован для разнообразных исследований гравитационных взаимодействий в структурах на основе уже полученных решений.

9. Дальнейшие работы

Полученные в этой задаче шаровые звездные скопления имеют массивное ядро и основную часть звезд, находящиеся в периферийной области. Во Вселенной наблюдаются самые разнообразные звездные скопления. Их систематизируют по разным свойствам, например, по степени концентрации звезд к центру шаровые звездные скопления разбиты на 12 классов: I, II, ... XII, где I – наиболее концентрированная к центру скопление [1]. По-видимому, полученные шаровые скопления можно отнести к последним классам.

Полученные результаты требуют осмысления и дальнейшего развития. Например, период обращения тел в плоской осесимметричной структуре и в сферически распределенной структуре совпадает. Это свидетельствует, что силы воздействия всех тел на одно из периферийных тел совпадают в этих двух структурах. Этот результат получен на основе численных расчетов. Необходимо доказать его теоретически.

Используя полученные алгоритмы, представляется интересным развернуть в пространстве многослойную вращающуюся структуру [5] - [6]. Такая структура будет моделировать шаровое звездное скопление, заполненное телами не только по сфере, но и внутри нее, т.е. более близкое к классу I. В этом случае тела на всех слоях имеют одинаковый период обращения. Сохранится ли он? Можно ли создать регулярные движения тел в слоях?

Более концентрированное к центру скопление шаровые звездные скопления, т.е. более близких к классу I, можно создать последовательным объединением сферически распределенных структур по типу «матрешки»: первая структура является центральным телом второй структуры, вторая с первой – центральным телом – третьей структуры и т.д.

При равномерном распределении тел на сфере их воздействие на находящуюся в центре структуру стремится к нулю. Поэтому эволюция центральной структуры не будет нарушаться воздействием тел наружной оболочки. Это положение указывает путь создания такой объемно-наполненной сферической структуры.

Разработанный алгоритм применим для создания сферически-распределенных кулоновских структур [11]-[13]. Возможно, создание и исследование их приблизит нас к пониманию устройства атома.

При статистическом подходе к эволюции звездных ассоциаций для создания функции фазовой плотности необходимо создавать набор орбит (библиотеку орбит), чтобы сочетанием их добиться необходимого потенциала Φ . Такую библиотеку орбит можно наполнить рассмотренным в статье способом разворота орбит в пространстве.

Заключение

В результате множественных взаимодействий могут создаваться сферически организованные структуры с периодическими движениями тел. Несмотря на то, что орбиты тел находятся в разных плоскостях, такие структуры могут существовать вечно. В процессе формирования структур в них происходят сближения, при которых возможны выбросы тел из структуры. При столкновении тел происходит их укрупнение. Но чем дольше существует структура, тем меньше этих явлений в ней происходит. Со временем в таком скоплении остаются тела с орбитами, при которых не происходит опасных сближений и столкновений тел, а если и случаются, то очень редко.

Благодарности

Настоящая работа выполнялась в рамках проекта IX.135.2.4. Для исследования динамики сферически-распределенных структур вычисления выполнялись на суперкомпьютерах ЦКП Сибирский Суперкомпьютерный Центр ИВМиМГ СО РАН, г. Новосибирск.

Литература

1. Локтин А.В., Марсаков В.А. Лекции по звёздной астрономии. Учебно-научная монография. г. Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009, 280 с.
2. Кинг А.Р. Введение в классическую звёздную динамику, М.: УРСС, 2002.
3. Смутьский И.И. Теория взаимодействия. – Новосибирск: Из-во Новосиб. ун-та, НИЦ ОИГГМ СО РАН, 1999 г. – 294 с. http://www.ikz.ru/~smulski/TVfulA5_2.pdf.
4. Смутьский И.И. Осесимметричная задача гравитационного взаимодействия N-тел // Математическое моделирование, 2003, т. 15, № 5, с. 27-36. <http://www.smul1.newmail.ru/Russian1/IntSunSyst/Osvnb4.doc>.
5. Смутьский И.И. Осесимметричные многослойные вращающиеся структуры / Институт криосферы Земли СО РАН. - Тюмень, 2013. - 27 с. - Илл.: 7.- Библиогр.: 16 назв. - Рус. Деп. в ВИНТИ 28.10.2013, № 303-B2013. <http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/OsMVStr.pdf>.
6. Smulsky J.J. Exact solution to the problem of N bodies forming a multi-layer rotating structure // SpringerPlus. 2015, 4:361, pp. 1-16, DOI: 10.1186/s40064-015-1141-1, URL: <http://www.springerplus.com/content/4/1/361>.
7. Smulsky J.J. The System of Free Access Galactica to Compute Interactions of N -Bodies. I. J. Modern Education and Computer Science, 2012, 11, 1-20. DOI: 10.5815/ijmecs.2012.11.01. <http://www.mecs-press.org/>.
8. Смутьский И.И. Система Galactica. Институт криосферы Земли СО РАН. – Тюмень, 2012. <http://www.ikz.ru/~smulski/GalactW/>.
9. Смутьский И.И., Кротов О.И. Изменение кинетического момента в динамике Солнечной системы // Космические исследования, 2015, том 53, № 3, с. 253–262. DOI: 10.7868/S0023420615020090. http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/IzmMom5_1J.pdf.
10. Смутьский И.И. Сферически распределенные структуры / Институт криосферы Земли СО РАН. - Тюмень, 2016. - 43 с. - Илл.: 14- Библиогр.: 16 назв. - Рус. Деп. в ВИНТИ 22.08.2016, № 112-B2016. <http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/SphDsSt2.pdf>.

11. *Смульский И.И.* Плоские многослойные кулоновские структуры / Институт криосферы Земли СО РАН. – Тюмень, 2015. – 54 с. – Илл.: 35.- Библиогр.: 24 назв. - Рус. Деп. в ВИНТИ 27.02.2015, № 38-В2015. <http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/PMKStr.pdf>.
12. *Smulsky J.J.* Multilayer Coulomb Structures: Mathematical Principia of Microcosm Mechanics // Open Access Library Journal, 2015, 2: e1661, 46 p. <http://dx.doi.org/10.4236/oalib.1101661>.
13. *Smulsky J.J.* Module of System Galactica with Coulomb's Interaction // I. J. Modern Education and Computer Science, 2014, Vol. 6, No. 12, p. 1-13. <http://dx.doi.org/10.5815/ijmecs.2014.12.01>.
14. Шаровое скопление М 53. https://ru.wikipedia.org/wiki/M_53.
14. *The globular cluster M 53.* https://en.wikipedia.org/wiki/Globular_cluster.