

ТЕОРИЯ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ: ВЫВОД УРАВНЕНИЙ И ИХ ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

© 2009 г. И. И. Смульский, К. С. Иванов, К. Е. Сеченов

Институт криосферы Земли СО РАН, г. Тюмень

Аннотация

С целью изучения эволюции климата рассматривается вращательное движение Земли. Проанализирована теорема моментов и на ее основе приведен вывод дифференциальных уравнений вращательного движения. Обсуждены проблемы с начальными условиями и представлен алгоритм численного решения. Численно проинтегрированы уравнения при воздействии на Землю по отдельности Солнца, Луны и планет в течение 10 тыс. лет. Проанализированы результаты и сопоставлены с решениями других авторов и наблюдениями.

1. Введение

В истории Земли наблюдаются периодические изменения осадочных слоев на материках и океанах, их химического состава и магнитных свойств. Прослеживаются также колебания уровней океанов и повторяющиеся следы деятельности ледников. Климатические изменения определяются разными факторами, в том числе, количеством солнечного тепла, поступающего на Землю. Оно зависит от угла падения солнечных лучей на поверхность, удаленности ее от Солнца и длительности освещения. В 20-х годах XX века югославский ученый Милутин Миланкович (1939) создал астрономическую теорию ледниковых периодов, в которой эти три фактора выражаются наклоном плоскости орбиты к плоскости экватора, эксцентриситетом орбиты и положением перигелия.

В результате взаимодействия тел Солнечной системы происходят изменения орбит планет. Из-за вращения Земля вытягивается в экваториальной плоскости. Поэтому каждое из внешних тел создает момент сил, который приводит к прецессии и нутации земной оси. Эти движения плоскости экватора складываются с движением плоскости орбиты и дают угол наклона между двумя движущимися плоскостями, от которого зависит инсоляция Земли.

Обычно задача орбитального движения решалась приближенно аналитическими методами, в рамках так называемой теории вековых возмущений. Во второй задаче о вращательном движении Земли дифференциальные уравнения вращательного движения второго порядка упрощались до уравнений первого порядка, уравнений Пуассона, которые решались приближенно аналитическими методами и учитывалось воздействие только Луны и Солнца.

Одним из путей дальнейшего совершенствования решения этих проблем является использование современных компьютеров. С помощью численных методов можно избежать упрощений, которые неизбежны при аналитическом решении проблемы. С помощью

численного метода мы проинтегрировали уравнения движения Солнца, планет и Луны за 100 млн. лет [Гребеников, 2007; Мельников, 2009]. И в настоящей работе предлагаются результаты численного метода по интегрированию уравнений вращательного движения Земли.

Во второй половине 20-ого века были введены в действие высокоточные системы наблюдения вращения Земли, которые позволили исследовать динамику Земной оси на малых интервалах времени. С целью ее объяснения были созданы теории прецессии и нутации. Расхождение между этими теориями и наблюдениями вынудило исследователей кроме основного гравитационного воздействия вводить дополнительные эффекты [Zharov, 2005]. Перечислим некоторые из них. Для расчета гравитационного взаимодействия элемента массы Земли с точечным телом вводилась коррекция на распределение геопотенциала по поверхности Земли. Кроме того, рассматривалась неосесимметричная Земля с неравными между собой моментами инерции J_x и J_y , различие которых также определилось по поверхностному геопотенциалу. Вводилась коррекция на торможение вращения Земли за счет приливных сил. К гравитационным силам добавлялись также релятивистские силы в уравнениях вращательного движения путем учета геодезической прецессии [Bretagnon, 1997], а также учетом релятивистской добавки в силовой функции в уравнениях для орбитального движения [Quinn, 1991].

Для объяснения различия между теорией и наблюдениями вводят модели нежесткой Земли, а также структурированную Землю, в которой каждая структура, например, ядро Земли, имеют свое движение [Molodensky, 2004].

Практически все дополнительные эффекты не определены так точно, как гравитационные силы. Влияние ряда из них носит гипотетический характер. Все эти дополнительные слабые воздействия основаны на расхождениях между расчетами основного гравитационного воздействия на вращательное движение Земли и наблюдениями. Однако, этот расчет, как отмечалось ранее, выполнен приближенно. И как будет показано ниже при выводе дифференциальных уравнений вращательного движения Земли, существует целый ряд упрощений этих уравнений, которые могут давать отличия результатов расчетов от наблюдения. Поэтому представляет большой интерес получение как можно более точных решений, чтобы не возникало сомнений, что невязки расчетов с наблюдениями действительно должны объясняться другими факторами.

2. Теорема моментов и ее некоторые результаты

В соответствии с теоремой моментов относительно подвижного центра масс [Тарг, 1998], вращательное движение механической системы описывается теоремой изменения момента количества движения:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k), \quad (1)$$

где \vec{K}_O - момент количества движения (кинетический момент) механической системы относительно центра O в невращающейся системе координат $x_1y_1z_1$ (рис. 1),

$\vec{m}_O(\vec{F}_k)$ - момент относительно этого центра, действующей на тело внешней силы \vec{F}_k в той же системе $x_1y_1z_1$.

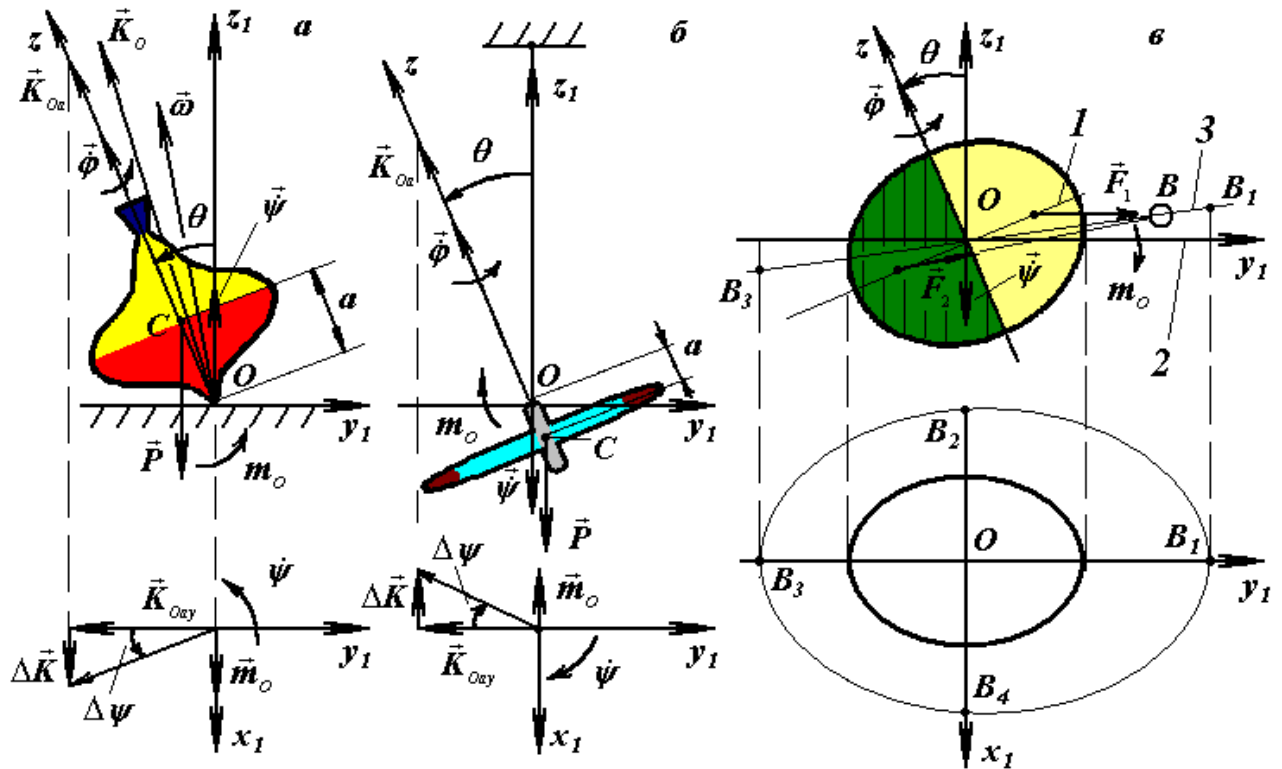


Рис. 1. Прецессия вращающихся тел: *a* – юлы на опорной поверхности x_1Oy_1 ; *б* – подвешенного в т. O колеса; *в* – свободной Земли. 1 и 2 – плоскости экватора Земли и ее орбиты; 3 – плоскость орбиты воздействующего на Землю тела B .

Уравнения вращательного движения мы будем выводить из теоремы моментов (1), однако вначале проанализируем ее на примере вращательного движения трех тел, представленных на рис. 1. Пусть юла (см. рис. 1*a*) имеет угол θ с осью z_1 и вращается вокруг своей оси z с угловой скоростью $\dot{\phi}$. В ее центре масс C приложена сила тяжести \vec{P} . На юлу действует момент сил $m_o = Pa \cdot \sin\theta$, под действием которого ее ось z начнет поворачиваться вокруг точки O с угловыми скоростями $\dot{\theta}$ и $\dot{\psi}$. Вектор абсолютной угловой скорости юлы будет

$$\vec{\omega} = \vec{\dot{\phi}} + \vec{\dot{\theta}} + \vec{\dot{\psi}}. \quad (2)$$

Рассматриваем осесимметричную юлу с моментом инерции J_z , скорость вращения которой $\dot{\phi}$ значительно больше скоростей поворота оси $\dot{\theta}$ и $\dot{\psi}$. Пренебрегаем отклонением

\vec{K}_O от оси z (см. рис. 1 а). Тогда приближенный кинетический момент юлы $\vec{K}_{Oa} \approx \vec{K}_O \approx J_z \cdot \vec{\phi}$ будет направлен вдоль оси z (см. рис. 1а), а теорема моментов (1) запишется $\vec{K}_{Oa} \approx \vec{m}_O$.

Такой подход применяется в элементарной теории гироскопа. Как видно из рис. 1а, вектор момента сил \vec{m}_O перпендикулярен \vec{K}_{Oa} . Поэтому по величине кинетический момент изменяться не будет: $K_{Oa} = J_z \cdot \dot{\phi} = \text{const}$, а его изменение $\Delta \vec{K}$ по направлению в плоскости $x_1 O y_1$ определится вектором \vec{m}_O . Тогда за время Δt кинетический момент получит приращение $\Delta K = \dot{K}_{Oa} \cdot \Delta t = m_O \cdot \Delta t$, что приведет к его повороту вокруг оси z_1 на угол $\Delta \psi$. Выразив приращение кинетического момента ΔK через приращение угла $\Delta \psi$: $\Delta K = K_{Oay} \cdot \Delta \psi = K_{Oa} \cdot \sin \theta \cdot \Delta \psi$, получаем скорость поворота кинетического момента:

$$\dot{\psi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \psi / \Delta t = m_O / (K_{Oa} \cdot \sin \theta). \quad (3)$$

Так как ось юлы в рассматриваемой постановке совпадает с кинетическим моментом, то она будет прецессировать со скоростью $\dot{\psi}$ против часовой стрелки. После подстановки в (3) значения момента M_O скорость прецессии будет: $\dot{\psi} = Pa / (J_z \cdot \dot{\phi})$.

В рассмотренном приближении скорость прецессии не зависит от угла наклона оси юлы θ . Кроме того, в этом случае мы не получаем нутационных колебаний, обусловленных изменением θ .

Как видно из рис. 1б, в случае подвешенного колеса момент сил m_O направлен за стрелкой часов. Поэтому прецессия оси колеса будет происходить за стрелкой часов, а ее скорость будет также определяться выражением (3).

На рис. 1в представлена схема воздействия тела B на вращающуюся Землю. В случае центрально-симметричной Земли действие тела B на ближнюю и дальнюю от тела части Земли выразится в виде сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , равнодействующая которых пройдет через центр O . Для сплюснутой к экватору Земли точки приложения сил отдалятся от центра O . Поэтому сила \vec{F}_1 увеличится, а сила \vec{F}_2 уменьшится, в результате чего возникнет момент сил m_O , направленный, как и на рис. 1б, по стрелке часов. В связи с этим, ось Земли будет прецессировать за стрелкой часов, а скорость прецессии будет описываться формулой (3).

Нами были выполнены эксперименты с юлой и велосипедным колесом, которые подтвердили эти выводы. Выше мы рассмотрели вращение тел с угловой скоростью $\dot{\phi} > 0$, т.е. против стрелки часов. При смене ее направления, меняется также направление прецессии, т.е. знак $\dot{\psi}$.

Из анализа воздействия тела на Землю (см. рис. 1б) можно установить периоды колебаний прецессии Земной оси. Максимальные моменты сил $m_{O_{\max 1}}$ тело B создает в точках B_1 и B_3 , причем одного и того же направления. При нахождении тела в плоскости экватора (точки B_2 и B_4) моменты сил равны нулю, т.е. за один оборот тела по орбите момент силы дважды изменяется от 0 до $m_{O_{\max 1}}$. Поэтому ось Земли будет подвержена прецессионным и нутационным колебаниям с полупериодами обращения планет, Солнца и Луны относительно подвижной плоскости экватора.

В своем орбитальном движении Земля и планеты сближаются. Если сближение произойдет в точке B_1 или B_3 , то максимальный момент возрастет до значения $m_{O_{\max 2}}$. Поэтому ось Земли будет испытывать колебания с периодами сближений Земли с планетами, особенно близкими к Земле, в точках B_1 и B_3 . Следует отметить, что орбиты Земли и планет не лежат в одной плоскости и не круговые, а эллиптические. Эти два обстоятельства приведут к модуляции отмеченных выше периодов.

Момент силы, который создает тело B , зависит также от параметров его орбиты, в частности от угла наклона между плоскостью подвижного экватора I (рис. 1б) и плоскостью орбиты 3 . Поэтому ось Земли будет испытывать колебания с периодом прецессии орбиты тела относительно подвижной плоскости экватора Земли. Например, период прецессии орбиты Луны равен 18.6 лет относительно плоскости орбиты Земли. С этим периодом будет испытывать ось Земли колебания при воздействии Луны. Период этих колебаний существенно не будет отличаться от периода прецессии Луны, т. к. период прецессии плоскости экватора превышает его более чем в 1000 раз.

3. Дифференциальные уравнения вращательного движения

3.1. Момент количества движения Земли. Рассматриваем Землю, как нетвердое тело, которое принимает равновесную осесимметричную форму под действием двух систем сил: гравитационных и центробежных. Она образует сплюснутый у полюсов геоид с осью симметрии, расположенной по вектору угловой скорости $\vec{\omega}$ собственного вращения. Этот вектор совершает сложное движение в пространстве, которое представляет абсолютная скорость вращения Земли $\vec{\omega}$ в невращающейся системе координат.

При выводе уравнений вращательного движения возникает проблема: при повороте тела в зависимости от системы координат изменяются или его моменты инерции или проекции угловой скорости. Поэтому вначале будем рассматривать в тех координатах, в которых моменты инерции не изменяются. Затем перейдем к координатам, в которых угловые скорости не зависят от поворота тела. Движение тел Солнечной системы можно исследовать в неускоренной эклиптической барицентрической системе координат x_{10}, y_{10}, z_{10}

(см. рис. 2), связанной с застабилизированной на эпоху T_0 плоскостью орбиты Земли. Ось x_{10} направлена на точку весеннего равноденствия. Пусть невращающаяся система $x_1y_1z_1$ с началом O в центре масс Земли, поступательно движется относительно системы $x_{10}y_{10}z_{10}$. Ось z вращающейся экваториальной системы xuz , связанная с вращающейся Землей, направлена вдоль вектора скорости $\vec{\phi}$ собственного вращения Земли, а ось x в начальный момент $t=0$ находится в плоскости нулевого меридиана, т.е. проходящего через г. Гринвич. Абсолютная угловая скорость $\vec{\omega}$ вращения Земли в системе $x_1y_1z_1$ с проекциями $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ на оси вращающейся системы xuz будет $\vec{\omega} = \vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z$.

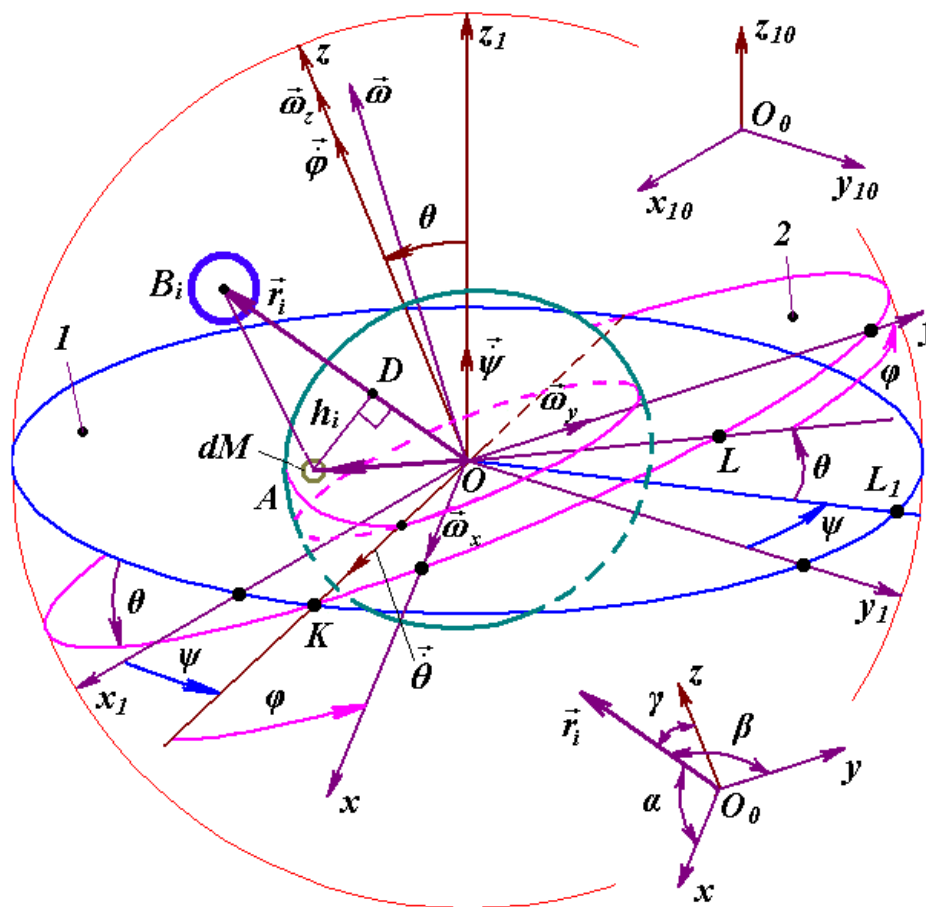


Рис. 2. Системы координат и воздействие тела B_i на элемент Земли dM : $x_{10}y_{10}z_{10}$ – неподвижная барицентрическая эклиптическая. $x_1y_1z_1$ – невращающаяся эклиптическая и xuz – вращающаяся с Землей экваториальная – геоцентрические. Эйлеровы углы ψ, θ и ϕ положения системы xuz относительно $x_1y_1z_1$. 1 – неподвижная плоскость эклиптики; 2 – подвижная плоскость экватора Земли; $r=OA$ – расстояние элемента массы dM от ее центра.

В теореме моментов (1) кинетический момент \vec{K}_O создается всеми массами вращающейся Земли в системе координат $x_1y_1z_1$. Так как в этой системе Земля вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$, то любой ее элемент dM с радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ (см. рис. 2) движется со скоростью $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ и относительно центра O имеет момент количества движения $\vec{m}_O(dM\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{v}dM$. Здесь вектора $\vec{r}, \vec{v}, \vec{m}_O$ рассматриваются в проекциях на оси

вращающейся системы координат. После интегрирования по всей массе Земли M кинетический момент будет: $\vec{K}_O = \int_M m_O(dM\vec{v}) = \int_M \vec{r} \times \vec{v}dM$. Продифференцировав \vec{K}_O по времени и подставив векторы \vec{r} , $\vec{\omega}$ и \vec{v} , после преобразования получаем производные от проекций кинетического момента на оси вращающейся системы xuz :

$$\dot{K}_{Ox} = J_x \varepsilon_x - (J_y - J_z) \omega_y \omega_z, \quad \dot{K}_{Oy} = J_y \varepsilon_y - (J_z - J_x) \omega_z \omega_x, \quad \dot{K}_{Oz} = J_z \varepsilon_z, \quad (4)$$

где J_x , J_y и J_z – моменты инерции Земли на оси вращающейся системы координат xuz .

Из наблюдаемой скорости прецессии можно определить только отношение между двумя моментами J_z и J_x , но не их абсолютные значения. В последние годы рассматриваются модели трехосной Земли, в которой третий момент инерции J_y оценивается по распределению потенциала силы тяжести на поверхности Земли. Однако этот метод также не позволяет определить точное значение моментов инерции. Здесь же отметим, что в случае трехосной Земли из-за несимметричности распределения потенциала необходимо вводить в уравнения слагаемые с центробежными моментами инерции J_{xy} , J_{xz} , J_{xy} . Традиционно в выводах слагаемые с этими моментами опускают, а слагаемые с третьим моментом J_y оставляют. Однако, в конечных выражениях J_y приравнивают J_x . Поэтому выражения (4) записаны для осесимметричной Земли: $J_y=J_x$, и $J_{xy}=J_{xz}=J_{yz}=0$. Для неосесимметричной Земли производные от кинетического момента даны в нашей работе [Смульский, 2007а].

3.2. Кинетический момент и теорема моментов в эйлеровых переменных.

Положение вращающейся системы координат xuz (см. рис. 2) относительно невращающейся системе координат $x_1y_1z_1$ определяется углами Эйлера φ , ψ , θ . Компоненты угловой скорости ω_x , ω_y и ω_z , как это следует из рис. 2, записываются через эти углы в виде выражений: $\omega_x = \dot{\psi} \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi + \dot{\theta} \cdot \cos \varphi$, $\omega_y = \dot{\psi} \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi - \dot{\theta} \cdot \sin \varphi$, $\omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cdot \cos \theta$, которые называются уравнениями Эйлера.

После их дифференцирования получаем угловые ускорения ε_x , ε_y и ε_z в эйлеровых переменных. После подстановки угловых скоростей и ускорений в (4) проекции производных кинетического момента в зависимости от эйлеровых углов будут:

$$\dot{K}_{Ox} = J_x \ddot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + J_x \ddot{\theta} \cos \varphi + (2J_x - J_z) \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + J_z \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi - J_z \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi + (J_z - J_x) \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi; \quad (5)$$

$$\dot{K}_{Oy} = J_y \ddot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - J_y \ddot{\theta} \sin \varphi + (2J_x - J_z) \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi - J_z \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi - J_z \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \varphi - (J_z - J_x) \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi; \quad (6)$$

$$\dot{K}_{Oz} = J_z \ddot{\varphi} + J_z \ddot{\psi} \cos \theta - J_z \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta. \quad (7)$$

Производные кинетического момента в проекциях на направление векторов $\vec{\theta}$ и $\vec{\psi}$, как это видно из рис. 2, запишутся так:

$$\dot{K}_{O\dot{\theta}} = \dot{K}_{Ox} \cos \varphi - \dot{K}_{Oy} \sin \varphi; \quad (8)$$

$$\dot{K}_{O\dot{\psi}} = \dot{K}_{Ox} \sin \varphi \cdot \sin \theta + \dot{K}_{Oy} \cos \varphi \cdot \sin \theta + \dot{K}_{Oz} \cos \theta. \quad (9)$$

Согласно рис. 2, в системе координат OKz_1z с осями, расположенными по угловым скоростям $\vec{\psi}$, $\vec{\theta}$ и $\vec{\phi}$ моменты сил запишутся через производные силовой функции U : $m_{O\dot{\psi}} = m_{Oz_1} = \partial U / \partial \psi$, $m_{O\dot{\theta}} = m_{OK} = \partial U / \partial \theta$, $m_{O\dot{\phi}} = m_{Oz} = \partial U / \partial \varphi$. С учетом этих моментов спроектируем правую и левую часть теоремы моментов (1) на оси системы координат OKz_1z : $\dot{K}_{O\dot{\psi}} = \partial U / \partial \psi$, $\dot{K}_{O\dot{\theta}} = \partial U / \partial \theta$, $\dot{K}_{Oz} = \partial U / \partial \varphi$.

Далее декартовые проекции (5) – (7) подставляются в выражения (8) – (9), а последние – в теорему моментов в системе координат OKz_1z . Затем, выразив вторые производные, получаем два дифференциальных уравнения вращения Земли для эйлеровых переменных ψ и θ :

$$\ddot{\psi} = \left(\frac{\partial U}{\partial \psi} - (2J_x - J_z) \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + J_z \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta \right) \cdot \frac{1}{J_x \sin^2 \theta} - \frac{\dot{K}_{Oz}}{J_x} \cos \theta; \quad (10)$$

$$\ddot{\theta} = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} + (J_x - J_z) \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - J_z \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \right) \cdot \frac{1}{J_x}. \quad (11)$$

В уравнение (10) входит величина \dot{K}_{Oz} , которая определяется производной от силовой функции $\dot{K}_{Oz} = \bullet \dot{\Psi} / \bullet \dot{\Phi}$. Как будет показано далее, силовая функция не зависит от угла φ , поэтому $\dot{K}_{Oz} = 0$ и согласно (4) $\varepsilon_z = 0$, а $\omega_z = \text{const}$. Поэтому для осесимметричной Земли, как это следует из приведенного в п. 3.2 уравнения Эйлера для ω_z , скорость собственного вращения

$$\dot{\phi} = \omega_E - \dot{\psi} \cdot \cos \theta, \quad (12)$$

где $\omega_E = \omega_z = \text{const}$ – проекция абсолютной угловой скорости вращения Земли на ось z . Согласно (12), ω_E может быть определена усреднением угловой скорости собственного вращения Земли $\dot{\phi}$ за периоды времени большие периодов изменения $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$.

Силовая функция воздействия тела B_i с массой M_i (см. рис. 2) на элемент Земли массой dM и координатами x, y, z будет $dU = \frac{GM_i dM}{r_{di}}$, где G – гравитационная постоянная, а

$r_{di} = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}$ – расстояние от тела M_i до элемента dM .

Проинтегрировав по всей массе Земли M и просуммировав по всем n телам, получим:

$$U = \sum_{i=1}^n GM_i \left(\frac{M}{r_i} + \frac{J_y + J_z - 2J_x}{2r_i^3} + 3 \cdot \frac{(J_x - J_y)y_i^2 - (J_z - J_x)z_i^2}{2r_i^5} \right). \quad (13)$$

где y_i и z_i – координаты тела M_i во вращающейся системе координат xuz .

При выводе выражения (13) используются многочисленные упрощения и приближения, которые мы применяли, следуя традиционному выводу, приведенному в ряде книг по небесной механике, например [Смарт, 1965]. Вывод этот громоздкий, поэтому полностью он не приводится также в нашей работе [Смульский, 2007]. Одним из упрощений является принятие осей x , y , z как главных осей инерции Земли, вследствие чего пренебрегаются центробежными моментами Земли. Однако, главными осями тела являются оси, лежащие в плоскостях его симметрии. Ни одна из осей x , y , z строго не лежит в плоскостях симметрии Земли. Поэтому для модели неосесимметричной Земли в выражение для силовой функции необходимо вводить центробежные моменты.

Следуя традициям, в выражении (13) мы оставили слагаемое с $(J_x - J_y) \cdot y_i^2$, которое в осесимметричном случае ($J_x = J_y$) равно нулю. Учитывая вышесказанное, отметим, что выражение (13) в случае неосесимметричной Земли, например, трехосной, использовать нельзя. А для осесимметричной Земли силовая функция U , согласно (13), зависит только от расстояния z_i массы M_i от экваториальной плоскости. То есть от угла поворота φ в экваториальной плоскости U не зависит, т.е. $m_{Oz} = \partial U / \partial \varphi = 0$, что и было использовано при выводе (12).

После нахождения производных от силовой функции и подстановки их в соотношения (10)-(11), а также после выражения экваториальной координаты z_i тела M_i через эклиптические координаты $z_i = x_{li} \sin \theta \sin \psi$ $y_{li} \sin \theta \cos \psi + z_{li} \cos \theta$ итоговые уравнения вращательного движения Земли запишем в следующем виде:

$$\ddot{\psi} = -2\dot{\psi}\dot{\theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \dot{\theta} \frac{J_z \omega_E}{J_x \sin \theta} - \sum_{i=1}^n \frac{3GM_i E_d J_z}{r_i^5 J_x} \left\{ 0.5 \sin(2\psi)(x_{li}^2 - y_{li}^2) - \right. \\ \left. - x_{li} y_{li} \cdot \cos(2\psi) + z_{li} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (x_{li} \cos \psi + y_{li} \sin \psi) \right\}; \quad (14)$$

$$\ddot{\theta} = 0.5\dot{\psi}^2 \sin(2\theta) - \frac{J_z \omega_E \dot{\psi} \sin \theta}{J_x} - \sum_{i=1}^n \frac{3GM_i \cdot E_d J_z}{2r_i^5 J_x} \left\{ \sin(2\theta) [x_{li}^2 \sin^2 \psi + \right. \\ \left. + y_{li}^2 \cos^2 \psi - z_{li}^2 - x_{li} y_{li} \sin(2\psi)] + 2z_{li} (x_{li} \sin \psi - y_{li} \cos \psi) \cos(2\theta) \right\}, \quad (15)$$

где $E_d = (J_z - J_x) / J_z$ - динамическая эллиптичность Земли; ω_E - проекция абсолютной скорости вращения Земли на ее ось z , а угловая скорость собственного вращения Земли определяется выражением (12).

4. Начальные условия и динамическая эллиптичность Земли

Далее мы исследуем воздействие отдельных тел на Землю, поэтому при интегрировании уравнений (14) – (15) необходимо задавать начальные скорости изменения ψ и θ , которые обусловлены воздействием каждого тела. При произвольном задании начальных скоростей $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$ начнется переходный процесс, который может перейти в установившийся режим через длительное время, либо совсем не установиться. Нас интересует поведение оси Земли в установившемся режиме. Будем считать, что вторые производные $\ddot{\psi}$ и $\ddot{\theta}$ в уравнениях (14) и (15) по сравнению с другими слагаемыми в установившемся режиме малы, т.е. $\ddot{\psi} \approx \ddot{\theta} \approx 0$. Так как ω_E на 6 порядков превышает производные $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$, то, пренебрегая слагаемыми с $\dot{\psi} \cdot \dot{\theta}$ и $\dot{\psi}^2$ в уравнениях (14) – (15), получаем:

$$\dot{\theta} \approx - \sum_{i=1}^n \frac{3GM_i E_d \sin \theta}{2\omega_E r_i^5} [\sin(2\psi)(x_{li}^2 - y_{li}^2) - 2x_{li}y_{li} \cos(2\psi) + 2z_{li} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (x_{li} \cos \psi + y_{li} \sin \psi)]; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi} \approx - \sum_{i=1}^n \frac{3GM_i E_d}{2\omega_E r_i^5 \sin \theta} \{ \sin(2\theta) [x_{li}^2 \sin^2 \psi + y_{li}^2 \cos^2 \psi - z_{li}^2 - x_{li}y_{li} \sin(2\psi)] + \\ + 2z_{li} (x_{li} \sin \psi - y_{li} \cos \psi) \cdot \cos(2\theta) \}. \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнения (16) – (17) идентичны уравнениям Пуассона, приближенные аналитические решения которых применяются в астрономических теориях изменения климата. Из этих уравнений мы определяем начальные значения производных $\dot{\theta}_0$ и $\dot{\psi}_0$, задавая координаты x_{li} , y_{li} и z_{li} воздействующих на Землю тел в начальную эпоху $t=0$.

5. Алгоритм решения

В уравнениях (14) – (15) координаты x_{li} , y_{li} , z_{li} тел M_i , воздействующих на Землю, приведены в невращающейся геоцентрической эклиптической системе координат (см. рис. 2). В результате численного решения задачи взаимодействия планет, Солнца и Луны мы получили изменения параметров их орбит на интервале до 100 млн. лет [Гребенников, 2007; Мельников, 2009]. По этим решениям сохранены данные о положениях тел с интервалом 10 тыс. лет. Для интегрирования уравнений вращательного движения (15) – (16) нужны положения тел в произвольный момент времени.

Для расчета законов движения тел $x_{li}(t)$, $y_{li}(t)$, $z_{li}(t)$ нами был разработан новый алгоритм, координаты тел по которому, используя параметры орбит, мы определяем в неподвижной гелиоцентрической экваториальной системе координат [Смульский, 2007]. Этот алгоритм отличается от традиционного тем, что в нем не используются промежуточные параметры: средняя долгота M и эксцентрическая аномалия E . Затем экваториальные координаты пересчитываются в эклиптические геоцентрические.

Следует отметить, что Луна по сравнению с планетами имеет очень короткие периоды колебаний, поэтому алгоритм в работе [Смульский, 2007] для нее был доработан с учетом их.

Динамическая эллиптичность Земли E_d определяется на основе (17) по наблюдаемой скорости прецессии оси Земли. Уравнения (14) - (15) численно интегрируются методом Рунге-Кутты [Крутько, 1989] с шагом $\Delta T=10^{-6}$ года.

6. Результаты численного интегрирования

6.1 Воздействие Солнца. На рис. 3а представлены результаты интегрирования уравнений (14) – (15) за 0.1 года при воздействии Солнца на вращательное движение Земли. Угол прецессии ψ , начиная с нулевого значения, уменьшается, совершая колебания с амплитудой $\psi_{a1} = 6.53 \cdot 10^{-8} \text{ рад} = 13.47 \text{ mas}$ и периодом $T_1=0.99348 \text{ d}$, где mas – 10^{-3} угловых секунд, d – длительность дня в сек. Угол нутации θ представлен в виде разности $\Delta\theta = \theta - \theta_0$, где $\theta_0=0.4093197563 \text{ рад}$. Из графика $\Delta\theta(T)$ видно, что угол наклона подвижной плоскости экватора к неподвижной эклиптике увеличивается, совершая колебания с амплитудой $\Delta\theta_{a1} = 2.60 \cdot 10^{-8} \text{ рад} = 5.27 \text{ mas}$ и тем же периодом T_1 . Угловая скорость прецессии $\dot{\psi}$ с периодом T_1 и амплитудой $\dot{\psi}_{a1} = 1.57 \cdot 10^{-2} \text{ рад/ст}$ колеблется вокруг некоторого среднего значения. С таким же периодом T_1 и амплитудой $\dot{\theta}_{a1} = 6.17 \cdot 10^{-3} \text{ рад/ст}$ колеблется угловая скорость нутации вокруг значения, близкого к нулю.

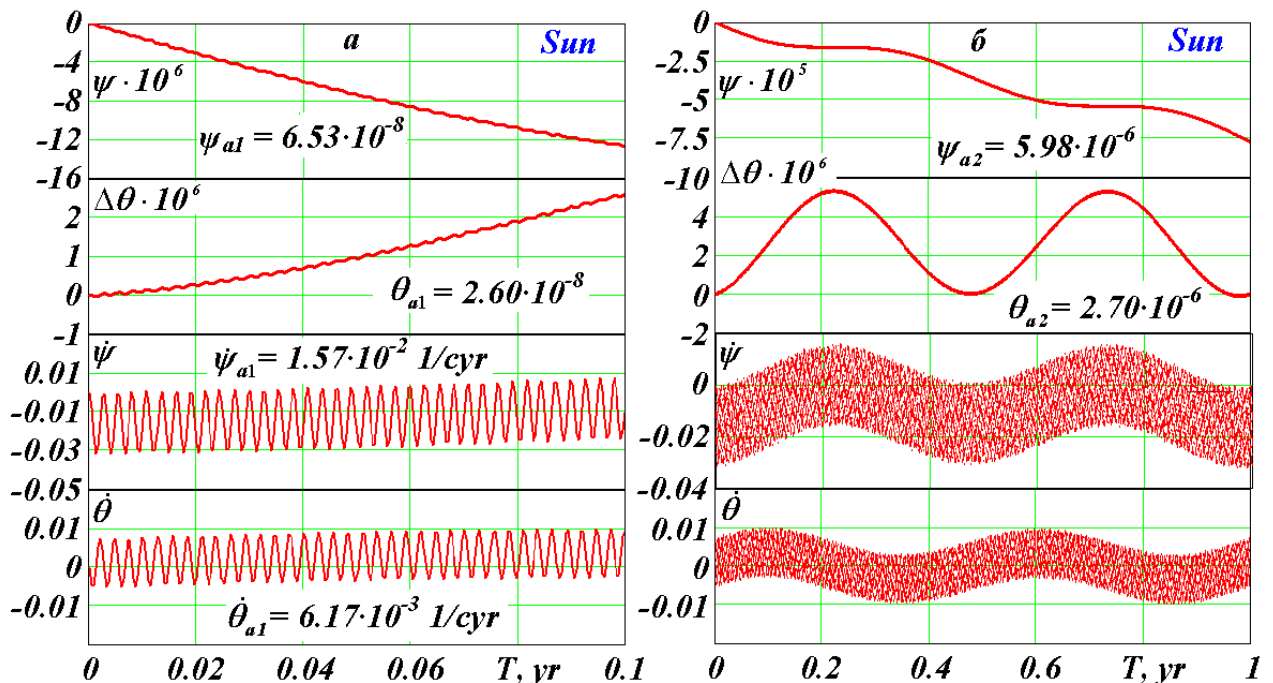


Рис. 3. Воздействие Солнца на вращательное движение Земли: а – за 0.1 года, б – за 1 год. Угол прецессии ψ и разность угла нутации $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ даны в радианах, а скорости $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$ - в радианах в столетие; T отсчитывается от начальной эпохи 30.12.49 г.

Как видно из графиков на рис. 3а, начальные значения скоростей $\dot{\theta}_0$ и $\dot{\psi}_0$ не превышают их крайних значений. Поэтому ошибка в определении $\dot{\theta}_0$ и $\dot{\psi}_0$ приведет только к изменению начальной фазы колебаний. Следовательно, в этом случае динамика скоростей $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$ и углов ψ и θ не изменится при погрешности начальных условий в указанных пределах. Аналогичные свойства решений наблюдаются и при воздействии других тел, поэтому это свойство будет сохраняться и при воздействии всех тел. Следовательно, в этом случае начальные условия, рассчитанные согласно (16) – (17), могут быть уточнены по фазе наблюдаемых суточных колебаний $\dot{\theta}$ и $\dot{\psi}$.

На рис. 3б представлена динамика оси Земли за 1 год. Угол прецессии увеличивается по часовой стрелке, совершая колебания с периодом $T_2=0.5$ года и амплитудой $\psi_{a2} = 5.98 \cdot 10^{-6}$ рад = 1232 mas. С таким же периодом T_2 и амплитудой $\theta_{a2} = 2.70 \cdot 10^{-6}$ рад = 556.9 mas колеблется угол нутации вокруг некоторого среднего значения. В начальную эпоху (30.12.49 г.) приходится минимум отклонения оси Земли. Это объясняется тем, что Солнце имеет наибольшее отклонение от плоскости экватора и создает наибольший момент сил, который приводит к θ_{\min} .

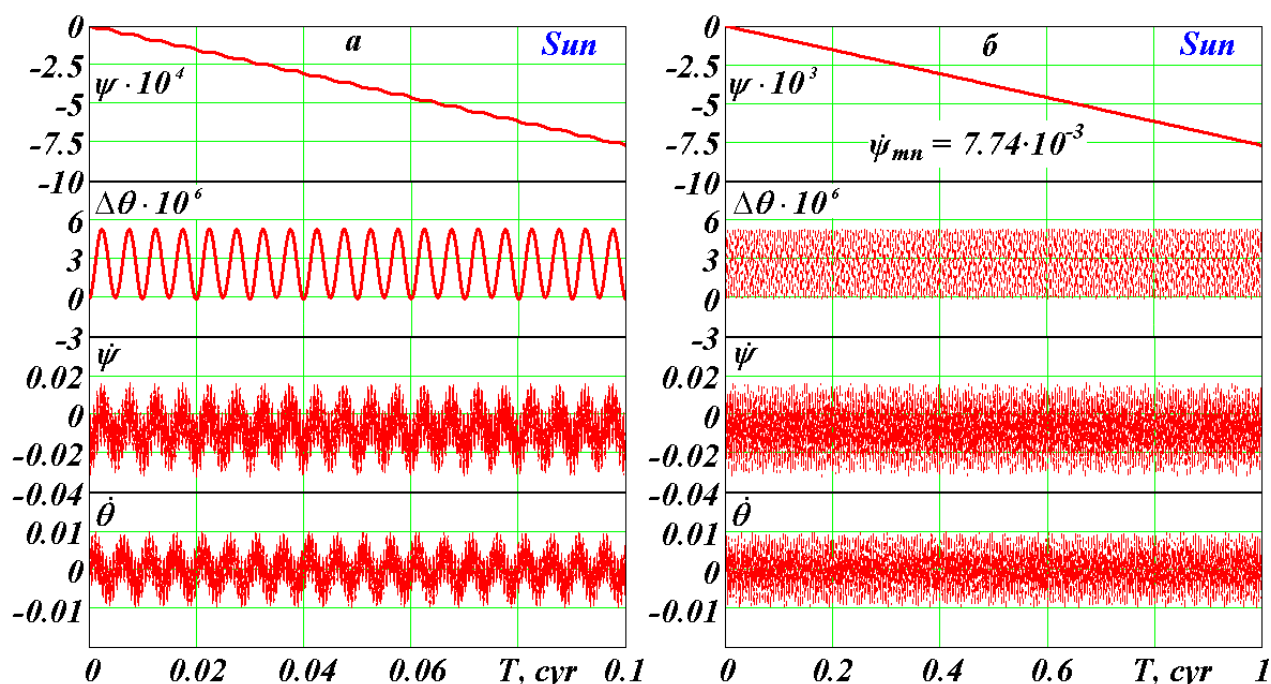


Рис. 4. Воздействие Солнца на вращательное движение Земли: а – за 10 лет, б – за 100 лет. Обозначения см. на рис. 3.

На рис. 4а представлена динамика оси за 10 лет. Угол прецессии ψ с отмеченными ранее полугодовыми колебаниями изменяется практически линейно, а угол нутации θ с полугодовым периодом T_2 колеблется вокруг среднего значения. Скорости $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$ с

периодами T_1 и T_2 изменяются в тех же пределах, что и на рис. 3б. Динамика оси Земли за 100 лет показана на рис. 4б. Угол прецессии ψ изменяется линейно со средней за 1000 и 10000 лет скоростью $\dot{\psi}_{mn} = 7.74 \cdot 10^{-3} \text{ рад/ст.}$ Угол нутации в виде $\Delta\theta$ изменяется с суточными и полугодовыми периодами в неизменных пределах. В неизменных пределах колеблются также скорости $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$: $\dot{\psi}$ вокруг среднего значения $\dot{\psi}_{mn}$, а $\dot{\theta}$ - вокруг близкого к нулю значения. Аналогичным образом ведут себя параметры за 1000 лет и 10 тыс. лет, поэтому эти результаты здесь не приводим.

Полученное в результате интегрирования уравнений (14) – (15) среднее значение скорости прецессии $\dot{\psi}_{mn} = -7.73671 \cdot 10^{-3} \text{ рад/ст.}$ Мгновенная скорость прецессии (см. рис. 3б) изменяется в пределах $\dot{\psi}_{\min} \leq \dot{\psi} \leq \dot{\psi}_{\max}$, где $\dot{\psi}_{\max} = 0.016 \text{ рад/ст.}$, а $\dot{\psi}_{\min} = -0.032 \text{ рад/ст.}$, т.е. $\dot{\psi}$ изменяется больше чем в 20 раз по отношению к среднему $\dot{\psi}_{mn}$. Еще в больших относительных пределах по отношению к среднему его значению $\dot{\theta}_m \approx 0$ изменяется $\dot{\theta}$. Однако, при таких значительных изменениях мгновенных скоростей $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$ средние значения остаются постоянными на протяжении всего времени интегрирования. Это свидетельствует об устойчивости метода интегрирования. А так как средние значения $\dot{\psi}_{mn}$, как потом будет показано, согласуются с наблюдениями, то это свидетельствует о достоверности решения всей задачи.

6.2. Воздействие Луны. Луна оказывает наиболее сильное воздействие на динамику Земной оси. На рис. 5а отмечаются суточные колебания параметров с периодом $T_1 = 0.99348 \text{ д}$ и амплитудами $\psi_{a1} = 7.29 \cdot 10^{-8} \text{ рад} = 15.04 \text{ мас}$, $\Delta\theta_{a1} = 2.83 \cdot 10^{-8} \text{ рад} = 5.83 \text{ мас}$, $\dot{\psi}_{a1} = 1.66 \cdot 10^{-2} \text{ рад/ст}$ и $\dot{\theta}_{a1} = 6.63 \cdot 10^{-3} \text{ рад/ст}$. На фоне суточных колебаний намечаются полумесячные колебания с периодом $T_2 = 13.5143 \text{ д}$, которые хорошо видны на интервале в 1 год (см. рис. 5б). Угол прецессии изменяется линейно с амплитудой $\psi_{a2} = 1.16 \cdot 10^{-6} \text{ рад} = 240.10 \text{ мас}$, значение угла нутации колеблется с периодом T_2 и амплитудой $\theta_{a2} = 4.22 \cdot 10^{-7} \text{ рад} = 87.13 \text{ мас}$. На интервале в 10 лет параметры ведут себя аналогичным образом, поэтому графики не приводим.

Дальнейшие изменения параметров рассмотрим на интервале в 100 лет (см. рис. 5в). Здесь появляются новые колебания с периодом $T_3 = 18.6 \text{ лет}$. Наряду с линейным изменением угла прецессии он имеет колебания с периодом T_3 и амплитудой $\psi_{a3} = 0.98 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 20286.33 \text{ мас}$. С этим периодом колеблется угол нутации при амплитуде колебаний $\theta_{a3} = 5.23 \cdot 10^{-5} \text{ рад} = 10797.80 \text{ мас}$. Значения $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$ колеблются в тех же пределах вокруг средних значений.

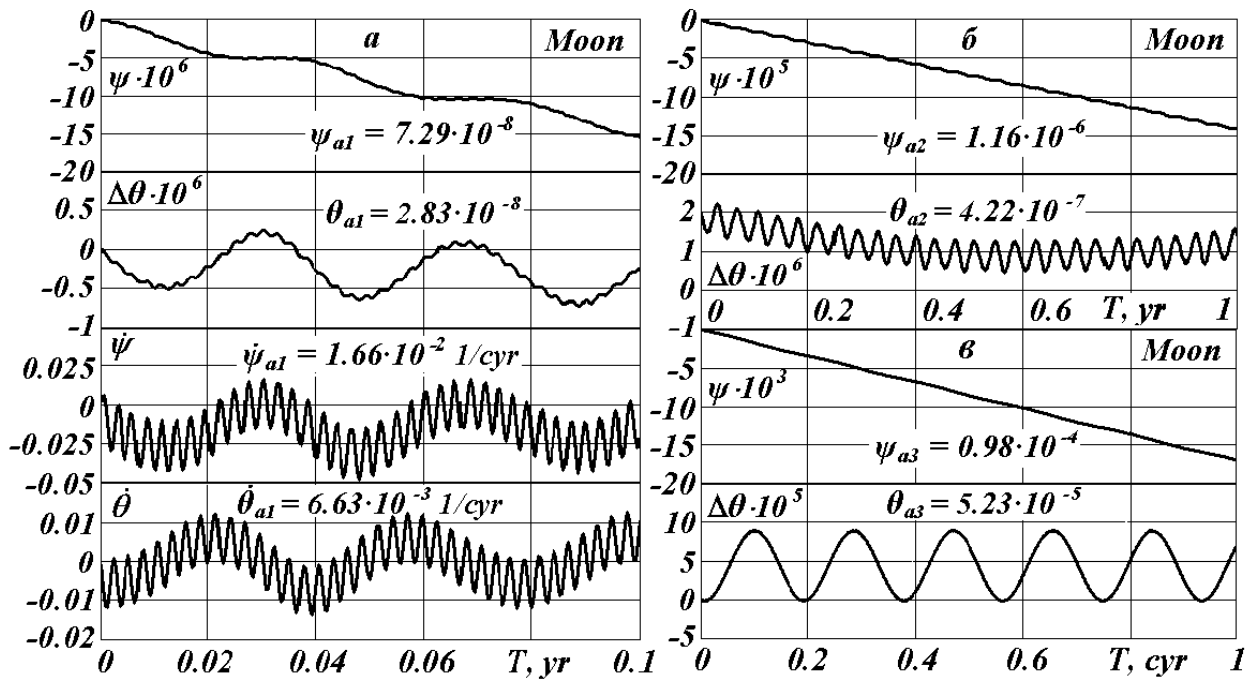


Рис. 5. Воздействие Луны на вращательное движение Земли: *a* – за 0.1 года, *б* – за 1 год, *в* – за 100 лет. Обозначения см. на рис. 3.

Как отмечалось в п. 2, в результате анализа теоремы моментов было установлено наличие колебаний, обусловленных прецессией орбиты воздействующего тела *B*. При интегрировании уравнений (14) – (15) с воздействием Луны на Землю, мы получили колебания с периодом $T_3 = 18.6$ лет, которые обусловлены прецессией оси орбиты Луны.

На интервале в 1000 лет поведение углов прецессии ψ и нутации θ идентично рис. 5в. Кроме колебаний с периодом $T_3 = 18.6$ лет других нет. Средняя скорость прецессии составляет $\dot{\psi}_{mn} = 1.70 \cdot 10^{-2} \text{ рад/ст}$. На интервале в 10 тыс. лет также продолжают колебания с периодом $T_3 = 18.6$ лет. Кроме того наметился тренд по изменению угла нутации θ по закону косинуса.

6.3. Воздействие Венеры и других планет. Уравнения (14) – (15) были также проинтегрированы за 10000 лет при воздействии по отдельности всех планет. Наибольшее воздействие на ось Земли оказывает Венера. Из рис. 6а по графику $\Delta\theta$ видны колебания с периодом $T_3 = 8.12$ года и амплитудами $\psi_{a3} = 1.65 \cdot 10^{-9} \text{ рад} = 0.341 \text{ mas}$ и $\theta_{a3} = 6.16 \cdot 10^{-10} \text{ рад} = 0.127 \text{ mas}$. Эти колебания обусловлены периодичностью сближений Венеры с Землей в наибольшем удалении от плоскости экватора (т. B_1 и B_3 на рис. 1).

На рис. 6б показана динамика углов ψ и θ за 10 тыс. лет. Углы линейно изменяются со средними за 10 тыс. лет скоростями $\dot{\psi}_{mn} = -9.53 \cdot 10^{-8} \text{ рад/ст}$ и $\dot{\theta}_{mn} = 8.05 \cdot 10^{-9} \text{ рад/ст}$, при этом скорость нутации в 12 раз меньше скорости прецессии. Отличие средней скорости нутации от нуля на интервале 10 тыс. лет обусловлено тем, что на этом интервале начинает

оказывать влияние прецессия плоскости орбиты Венеры относительно плоскости экватора Земли. По-видимому, в дальнейшем это приведет к колебаниям с новым периодом.

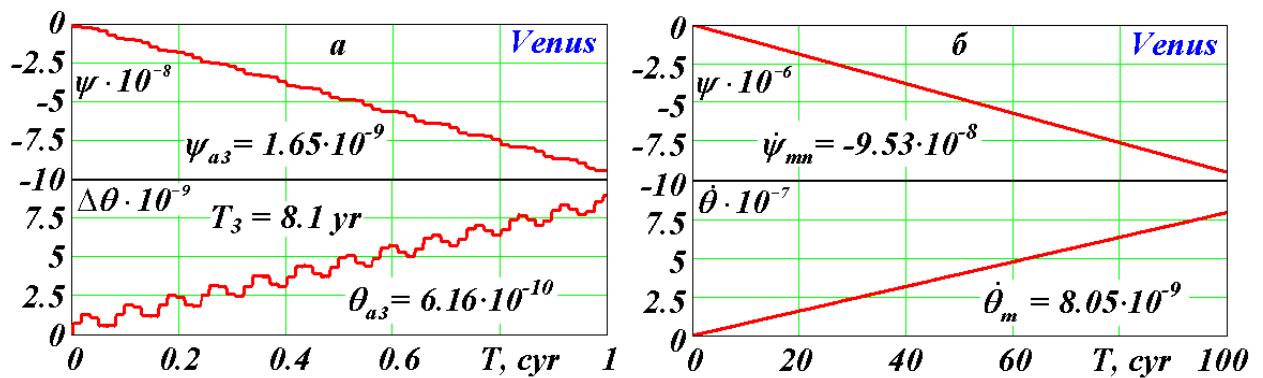


Рис. 6. Воздействие Венеры на вращательное движение Земли: *a* – за 100 лет, *б* – за 10000 лет. Обозначения см. на рис. 3.

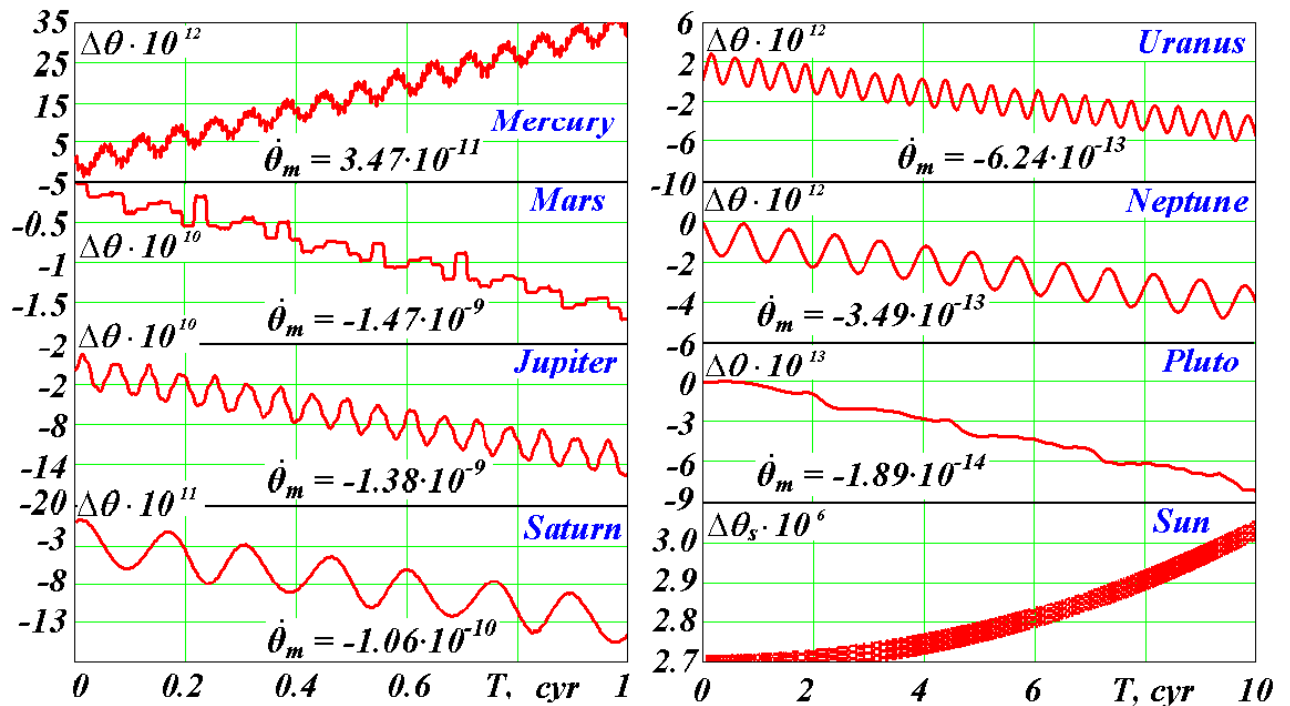


Рис. 7. Нутационные колебания и тренды оси Земли при одиночном воздействии планет и Солнца: по оси ординат для планет – разность $\Delta\theta = \theta - \theta_0$, а для Солнца – скользящее среднее этой разности $\Delta\theta_s$.

Графики воздействия других планет на вращательное движение Земли выглядят аналогично графикам для Солнца, Луны и Венеры. Наибольшее отличие проявляется для угла нутации θ . На рис. 7 представлено сравнение воздействия Солнца и планет на угол нутации. Под воздействием Солнца, Меркурия и Венеры (рис. 6) угол нутации θ увеличивается. Воздействие других планет приводит к его уменьшению. Эти изменения угла θ происходят, по всей видимости, за счет прецессии орбит вращающихся тел. Вначале они изменяются линейно для всех тел (по закону синуса), за исключением Солнца. Полугодичные нутационные колебания при воздействии Солнца (см. рис. 4) достаточно

велики и затегают тренд θ . Поэтому на рис. 7 представлено изменение скользящего среднего $\Delta\theta_s$ по 100 соседним точкам. Из графика следует, что $\Delta\theta_s$ изменяется, по видимому, по закону косинуса со средней скоростью за 1000 лет $\dot{\theta}_{m10} = 3.3 \cdot 10^{-8} \text{ рад/ст.}$

Прослеживаются разные типы нутационных колебаний. Для всех тел имеются суточные колебания с периодом T_1 . Колебания с полупериодом T_2 обращения планеты вокруг Солнца ярко выражены для Солнца (полупериод обращения Земли) и внешних планет, за исключением Плутона. Для Плутона выражено колебание θ с периодом $2T_2$. Для ближних планет от Меркурия до Марса имеются колебания с горизонтальными площадками максимумов (см. рис. 7а) с периодами T_{BE} обращения тел (В) относительно Земли (Е), например, 1.6 г. для Венеры и 2.14 г. – для Марса. Горизонтальные площадки изменения угла θ обусловлены длительным контактом планеты и Земли во время сближений. Для Венеры (см. рис 6а) ярко выражены колебания с $T_3 = T_{BC} = 1.6$ г., обусловленным сближением с Землей в точках B_1 и B_3 (см. рис. 1). Для Марса наблюдаются удвоенные периоды с $T_3 = 2T_{BC} = 2 \cdot 7.9 = 15.8$ лет. Удвоение периодов происходит по причине того, что воздействие тел в диаметрально противоположных точках по отношению к Земле отличаются вследствие эллиптичности орбит и их наклона к плоскости экватора.

В табл. 1 приведены периоды и амплитуды колебаний оси Земли, а также скорости прецессии $\dot{\psi}_{mn}$, обусловленные воздействием Солнца, Луны и планет. Наибольшее воздействие на амплитуды и скорость прецессии оказывает Луна. Из планет наибольшее воздействие оказывает Венера. В табл. 1 представлены колебания нескольких типов. Первый, с суточным периодом $T_1 = 0.99348$ дня, обусловлен вращательным движением Земли. При этом виде колебаний наибольшие амплитуды имеют скорости $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$. Другие виды колебаний обусловлены периодичностью пересечения телами плоскости экватора Земли, периодичностью сближений планет с Землей и периодичностью сближения в точках наибольшего удаления от плоскости экватора (т. B_1 и B_3 на рис. 1). В этих случаях наибольших амплитуд достигают углы ψ и θ . При воздействии Луны наибольшие амплитуды колебаний обусловлены прецессией ее плоскости орбиты.

7. Сопоставления с работами других исследователей

Сопоставление полученных дифференциальных уравнений (14) – (15) с дифференциальными уравнениями других исследователей осложняется тем, что большинство авторов эти уравнения в окончательном виде не приводит. С целью

Таблица 1. Периоды колебаний оси Земли, их амплитуды и средние скорости прецессии при одиночном воздействии Солнца, Луны и планет:
 1)* отмечены периоды и амплитуды, обусловленные сближением в плоскости экватора; после “/” даны полупериоды ($T_B \cdot 0.5$) сидерических обращений Земли, Луны и планет вокруг Солнца; 2)** период и амплитуда, обусловленные прецессией плоскости орбиты Луны.

Тела	T_1 , дн.	ψ_{a1}	θ_{a1}	T_2 (T_3^*), лет	$\psi_{a2, a3}$, рад	$\theta_{a2, a3}$, рад	$\dot{\psi}_{mn}$, рад/ст
Солнце	0.99348	$6.52987 \cdot 10^{-8}$	$2.60203 \cdot 10^{-8}$	0.5/0.5	$5.97569 \cdot 10^{-6}$	$2.69668 \cdot 10^{-6}$	$-7.73671 \cdot 10^{-3}$
Меркурий	0.99348	$1.03196 \cdot 10^{-14}$	$3.92567 \cdot 10^{-15}$	6.55*/0.12	$7.48482 \cdot 10^{-12}$	$2.74472 \cdot 10^{-13}$	$-1.97555 \cdot 10^{-9}$
Венера	0.99348	$2.15159 \cdot 10^{-12}$	$8.54552 \cdot 10^{-13}$	8.12*/0.31	$1.65282 \cdot 10^{-9}$	$6.15801 \cdot 10^{-10}$	$-9.52699 \cdot 10^{-8}$
Марс	0.99348	$2.78597 \cdot 10^{-15}$	$1.33595 \cdot 10^{-15}$	15.8*/0.94	$7.34044 \cdot 10^{-11}$	$2.23168 \cdot 10^{-11}$	$-2.42254 \cdot 10^{-9}$
Юпитер	0.99348	$2.32699 \cdot 10^{-13}$	$9.30588 \cdot 10^{-14}$	5.93/5.93	$6.69998 \cdot 10^{-10}$	$2.55712 \cdot 10^{-10}$	$-5.76500 \cdot 10^{-8}$
Сатурн	0.99348	$1.01170 \cdot 10^{-15}$	$4.16323 \cdot 10^{-16}$	14.711/14.72	$8.27493 \cdot 10^{-11}$	$3.21961 \cdot 10^{-11}$	$-2.70110 \cdot 10^{-9}$
Уран	0.99348	$4.65987 \cdot 10^{-16}$	$1.85499 \cdot 10^{-16}$	42.05/42.01	$3.68679 \cdot 10^{-12}$	$1.44699 \cdot 10^{-12}$	$-4.74205 \cdot 10^{-11}$
Нептун	0.99348	$5.34857 \cdot 10^{-17}$	$2.12967 \cdot 10^{-17}$	82.42/82.40	$2.04549 \cdot 10^{-12}$	$9.59090 \cdot 10^{-13}$	$-1.51833 \cdot 10^{-11}$
Плутон	0.99348	$5.18906 \cdot 10^{-19}$	$2.06426 \cdot 10^{-19}$	248/124	$1.9394 \cdot 10^{-14}$	$1.0980 \cdot 10^{-16}$	$-8.19926 \cdot 10^{-14}$
Луна	0.99348	$7.28690 \cdot 10^{-8}$	$2.28844 \cdot 10^{-8}$	18.6**/3.7 $\cdot 10^{-2}$	$0.98351 \cdot 10^{-4}$	$5.23492 \cdot 10^{-5}$	$-1.69661 \cdot 10^{-2}$

приближенного их решения дифференциальные уравнения 2-ого порядка еще на стадии вывода упрощают до уравнений первого порядка (уравнений Пуассона). Кроме того, используются разные системы отсчета, разные переменные и разные обозначения, и в конечном виде, подобном (14) – (15), ни в одной из известных нам работ уравнения не приводятся. Из последних работ в наиболее полном виде дифференциальные уравнения приведены в статье [Bretagnon, 1997]. При подстановке в них момента инерции $J_y = J_x$ и угловой скорости согласно (12) слагаемые, обусловленные кинетическим моментом, совпадают с соответствующими слагаемыми наших уравнений (14) – (15). Слагаемые, обусловленные моментами сил, у этих авторов выражены полиномами Лежандра, поэтому их нельзя сопоставить с нашими.

Наше решение для угловой скорости Земли $\dot{\phi}$ и кинематические слагаемые уравнений (14) – (15) с учетом обратных знаков для ψ и θ совпадают с уравнениями (9.1.04) и кинематическими слагаемыми уравнений (9.1.05) работы [Справочное..., 1976], если учесть имеющиеся в уравнениях (9.1.05) две опечатки. Эти опечатки в последующих уравнениях Пуассона (9.1.06) устранены.

Наш вывод моментов сил совпадает с традиционным выводом [Смарт, 1965] включительно до выражения (13) для силовой функции U . После этого обычно величины r_i^3 и (z_i/r_i) разлагают в ряды по элементам эллиптического движения на основании теории вековых возмущений. Так что эти результаты также несопоставимы с нашими.

В результате можно сделать следующий вывод. Члены уравнений (14) – (15), обусловленные кинетическим моментом, совпадают с уравнениями других исследователей. Члены уравнения, обусловленные моментами сил, на одинаковых стадиях вывода, также совпадают. В окончательном виде уравнения (14) – (15) не повторяют уравнений, известных нам в литературе. Не повторяет также принятый способ вывода уравнений, подход к их решению, задание начальных условий и метод решения. Несмотря на оригинальность этих приемов для уравнений вращательного движения Земли, они являются типичными в механике и традиционно используются в разных ее областях.

В наших решениях получены суточные колебания углов прецессии ψ и нутации θ . Бретаньон П. и др. [Bretagnon, 1997] для проверки своих аналитических решений выполняли численные интегрирования. Разности между численными и аналитическими результатами, приведенные в их работе, имеют суточные колебания, т.е. численные решения этих авторов также дают суточные колебания. Суточные частоты колебаний ψ и θ существуют также в представлении данных наблюдения в виде рядов [Mathews, 2003].

В табл. 2 сопоставлены амплитуды и периоды колебаний второго и третьего типов оси Земли с результатами аналитических решений [Bretagnon, 1997]. Здесь также сопоставлены и

средние скорости прецессии и нутации, обусловленные воздействием Солнца, Луны и планет. Для Солнца амплитуды колебаний $\dot{\psi}_a$ и $\dot{\theta}_a$ и их период T , а также средняя скорость прецессии $\dot{\psi}_{mn}$ хорошо совпадают. Следует отметить, что скорость $\dot{\theta}_m$ согласно рис. 7, изменяется нелинейно, и на фоне значительных полугодовых колебаний ее близкое к нулю среднее значение в начальный момент нельзя точно определить.

Периоды колебаний T углов, как видно из табл. 2, хорошо совпадают для всех планет. Амплитуды колебаний $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$ хорошо согласуются для планет от Юпитера до Нептуна. Меньшее соответствие для ближних планет объясняются сложной структурой колебаний $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$. В работе [Bretagnon, 1997] амплитуды определяются разложением решений в гармонические ряды, из которых в табл. 2 приведены главные гармоники. В нашей работе определяются фактические амплитуды методом скользящей средней. При сложной структуре колебаний эти методы дают разные результаты.

Средние скорости изменения углов $\dot{\psi}_m$ и $\dot{\theta}_m$ при воздействии планет, как видно из табл. 2, хорошо согласуются между собой. Следует отметить, что точное совпадение результатов наших и Бретаньона П. и др. [Bretagnon, 1997] невозможно, т.к. отличаются способы определения параметров, а также исходные и начальные данные. Например, при одинаковой динамической эллиптичности E_d средняя скорость прецессии $\dot{\psi}_{mn}$ при воздействии Луны у нас – (-3445.90) практически совпадает с таковой – (-3445.50) у Бретаньона П. и др. [Bretagnon, 1997] (см. табл. 2). Так как решения Бретаньона П. и др. [Bretagnon, 1997] отнормированны на данных наблюдения, то совпадение наших результатов с результатами этих авторов свидетельствует и о подтверждении их данными наблюдениями. Представленные в табл. 2 совпадения наших результатов свидетельствуют о достоверности полученных дифференциальных уравнений и их решений. Эти совпадения свидетельствуют также о справедливости исходных и начальных данных. Подтверждается также математическая модель движения планет и Луны, на основе которой определяются их положения в процессе численного интегрирования уравнений (14) – (15). Следует также отметить, что в работе Бретаньона П. и др. [Bretagnon, 1997] рассматривается неосесимметричная Земля, силовая функция уточнена по поверхностному распределению потенциала силы тяжести и учтена геодезическая прецессия. Все эти дополнительные воздействия дают добавки, которые находятся в пределах отличий наших решений от Бретаньона П. и др. [Bretagnon, 1997].

Таблица 2. Сопоставление рассчитанных (SS) колебаний оси Земли и средних скоростей ее перемещения с аналитическими результатами Бретаньона П. и др. [Bretagnon, 1997].

Тела	Колебания						Скорости			
	Амплитуды, mas				Периоды, лет		"/ст.			
	ψ_a		θ_a		T		$\dot{\psi}_{mn}$		$\dot{\theta}_m$	
	SS	Br	SS	Br	SS	Br	SS	Br	SS	Br
Солнце	1232.57	1276.71	556.23	552.39	0.5	0.500	-1595.811	-1594.870	–	$2.923 \cdot 10^{-4}$
Меркурий	0.00154	0.00103	0.00057	0.00043	6.552	6.659	$-4.075 \cdot 10^{-4}$	$-3.698 \cdot 10^{-4}$	$7.167 \cdot 10^{-6}$	$8.800 \cdot 10^{-6}$
Венера	0.34092	0.21671	0.12701	0.09076	8.12	8.102	$-1.965 \cdot 10^{-2}$	$-1.815 \cdot 10^{-2}$	$1.660 \cdot 10^{-3}$	$1.681 \cdot 10^{-3}$
Марс	0.01514	0.01155	0.00460	0.00095	15.8	15.78	$-4.997 \cdot 10^{-4}$	$-5.999 \cdot 10^{-4}$	$-3.027 \cdot 10^{-5}$	$-3.570 \cdot 10^{-5}$
Юпитер	0.13820	0.10441	0.05274	0.04569	5.928	5.931	$-1.189 \cdot 10^{-2}$	$-1.171 \cdot 10^{-2}$	$-2.844 \cdot 10^{-4}$	$-2.804 \cdot 10^{-4}$
Сатурн	0.01707	0.01215	0.00664	0.00516	14.71	14.73	$-5.571 \cdot 10^{-4}$	$-5.208 \cdot 10^{-4}$	$-2.193 \cdot 10^{-5}$	$-2.200 \cdot 10^{-5}$
Уран	0.00076	0.00065	0.00030	0.00029	42.05	42.01	$-9.781 \cdot 10^{-6}$	$-1.000 \cdot 10^{-5}$	$-1.288 \cdot 10^{-7}$	$-1.000 \cdot 10^{-7}$
Нептун	0.00042	0.0004	0.00019	0.00016	82.42	82.39	$-3.132 \cdot 10^{-6}$	$-2.900 \cdot 10^{-6}$	$-7.196 \cdot 10^{-8}$	$-1.000 \cdot 10^{-7}$
Плутон	$4.0 \cdot 10^{-6}$	–	$2.3 \cdot 10^{-8}$	–	248	–	$-1.691 \cdot 10^{-8}$	–	$-3.890 \cdot 10^{-9}$	–
Луна	20286.33	17292.17	10797.80	9227.88	18.60	18.60	-3499.51	-3445.50	–	$2.544 \cdot 10^{-2}$

Выводы

1. Проанализирована теорема моментов и на ее основе выведены дифференциальные уравнения вращения Земли при гравитационном воздействии тел Солнечной системы.
2. Разработан алгоритм и программа численного интегрирования полученных уравнений.
3. Проинтегрированы уравнения за период 10 тыс. лет при воздействии на Землю по отдельности Солнца, Луны и планет и проанализированы результаты.
 - 3.1. Наибольшее воздействие на вращение Земли оказывает Луна, затем Солнце, а из планет – Венера.
 - 3.2. Углы прецессии ψ , нутации θ и собственного вращения φ Земли испытывают колебания с одинаковыми периодами. Величина периодов обусловлена периодичностью пересечения воздействующими телами плоскости экватора Земли, периодичностью сближения планет с Землей и прецессией плоскости орбиты относительно плоскости экватора.
 - 3.3. Прецессия оси Земли под воздействием Солнца, Луны и планет на интервале до 10 тыс. лет происходит за стрелкой часов с практически неизменной средней скоростью.
 - 3.4. Угол нутации оси Земли на этом интервале под воздействием Солнца, Луны и внутренних планет увеличивается, а от воздействия внешних – уменьшается.
4. Полученные результаты подтверждаются результатами других исследователей и наблюдениями.

Работа выполнялась при поддержке грантов губернатора Тюменской области 2003 и 2004 г.г. и интеграционной программы Президиума РАН № 13 в 2004 – 2009 гг.

Список литературы

Гребеников Е.А., Смутьский И.И. Эволюция орбиты Марса на интервале времени в сто миллионов лет / Сообщения по прикладной математике. Российская Академия Наук: ВЦ им. А.А. Дородницына.– М.: ВЦ РАН А.А. Дородницына. – 2007. 63 с.

Крутько П.Д., Максимов А.И., Скворцов Л.М. Алгоритмы и программы проектирования автоматических систем. – М.: Радио и связь. – 1989. – 306 с.

Мельников В.П., Смутьский И.И. Астрономическая теория ледниковых периодов: Новые приближения. Решенные и нерешенные проблемы. - Новосибирск: Академическое изд-во "Гео", 2009. - 98 с. Книга на двух языках. С обратной стороны: Melnikov V.P., Smulsky J.J. Astronomical theory of ice ages: New approximations. Solutions and challenges. - Novosibirsk: Academic Publishing House "GEO", 2009. - 84 p.

Миланкович М. Математическая климатология и астрономическая теория колебаний климата. – М.-Л. –ГОНТИ. – 1939. –207 с.

Смарт У.М. Небесная механика.–М.: Мир.–1965, 502 с.

Смутьский И.И., Сеченов К.Е. Уравнения вращательного движения Земли и их решения при воздействии Солнца и планет / Институт криосферы Земли СО РАН. – Тюмень, 2007а. – 35 с. – ил. : 7. Библиогр.: 19 назв. – Рус. – Деп. в ВИНТИ 02.05.07 г. № 492-В2007.

Смутьский И.И. Математическая модель Солнечной системы / В сб. Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа. Российская Академия Наук: ВЦ им. А.А. Дородницына. М.: ВЦ РАН А.А. Дородницына. – 2007б. С. 119-138.

Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Под ред. Г. Н. Дубошина. Изд. 2-е, доп. и перераб. М., Наука, 1976, 862 с.

Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 2002 г. – 416 с.

Bretagnon P., Rocher P. and Simon J.L. Theory of the rotation of the rigid Earth // *Astron. Astrophys.* 1997. V. 319. P. 305–317.

Mathews P.M., Bretagnon P. Polar motions equivalent to high frequency nutations for a nonrigid Earth with anelastic mantle // *Astronomy & Astrophysics*, 2003. V. 400. P. 1113–1128.

Molodensky S.M. Tides and nutation of the earth: I. Models of an earth with an inelastic mantle and homogeneous, inviscid, liquid core // *Astronomicheskii vestnik*, 2004, V. 38. No. 6. P. 476.

Quinn T. R., Tremaine S., Duncan M. A three million year integration of the Earth's orbit // *Astronomical Journal*, 1991. V. 101. P. 2287–2305.

Zharov V.E. Model of the Free Core Nutation for improvement of the Earth nutation series. *Observatoire de Paris*, ISBN 2-901057-51-9, 2005. P. 106–109.

Авторы:

Смутьский Иосиф Иосифович _____

Иванов Константин Сергеевич _____

Сеченов Константин Евгеньевич _____

Редактировано 12.04.2010 г.

Настоящая статья с двумя авторами: Смутьский И.И. и Сеченов К.Е. "Прецессия и нутация оси вращения Земли под воздействием Солнца и планет" в марте 2006 г. была направлена на журнал «Астрономический вестник». В июле редколлегия отклонила статью на основании отрицательного отзыва рецензента [1]. В своем ответе (см. в конце [1]) я сообщил редакции, что рецензент написал отзыв, не читая статью, и просил направить ее другому рецензенту. По телефону я узнал, что Решение редколлегии осталось прежним. Я повторно объяснил редакции [2], что статья отклонена необоснованно. Несмотря на мои

разъяснения, редакция отклонила эту статью с дополнительным комментарием того же рецензента [3]. В своем Ответе [4] я объяснил редакции, что и этот Комментарий рецензента к статье не относится. Тем не менее, редакция отклонила статью (см. в конце [4]).

Материал этой статьи, но с другим названием «Теория вращения Земли: вывод уравнений и их численное решение» в ноябре 2007 г. мы направляли в журнал «Физика Земли». В первом Отзыве д.ф.-м.н. С.М. Молоденского от 14.01.08 г. [5] было сказано, что мы не учитываем вековые изменения орбит тел и воздействие Луны на ось вращения Земли. В своем ответе от 11.04.08 г. (повторно 26.05.08 г.) [5] мы разъяснили, что эволюцию орбит тел мы учитываем. Во втором Отзыве д.ф.-м.н. С.М. Молоденского от 8.09.08 г. было сказано, что без учета воздействия Луны статья не может быть опубликована.

В статье был добавлен материал по воздействию Луны на Землю и получены те эффекты, которые отмечал С.М. Молоденский вторым Отзыве. Работа над этим материалом потребовала много времени, в связи с тем, что описание эволюции орбитального движения Луны отличается от такового для планет. Непосредственное участие в работе по воздействию Луны, а также в корректировке всего содержания статьи принимал участие К.С. Иванов. Статья, содержащая этот материал, с тремя авторами: Смутьский И.И., Иванов К.С. и Сеченов К.Е. «Теория вращения Земли: вывод уравнений и их численное решение» 6 ноября 2009 г. была повторно направлена [6] в журнал «Физика Земли».

5-ого апреля 2010 г. мы получили Решение редколлегии об отклонении статьи на основании третьего отзыва рецензента [7]. Наше несогласие с этим отзывом представлено в письме [8].

Ссылки

1. 1-ое Решение редакции об отклонении статьи "Прец. и нут. оси" и письмо Смутьского И.И.
2. 2-е письмо Смутьского И.И. по статье "Прец. и нут. оси".
3. 2-ое Решение редакции об отклонении статьи "Прец. и нут. оси".
4. 3-е письмо Смутьского И.И. по статье "Прец. и нут. оси" и 3-е Решение редакции об отклонении статьи "Прец. и нут. оси".
5. Ответ авторов на 1-й ОТЗЫВ и сам Отзыв.
6. Сопроводительное письмо к последнему варианту статьи с добавлением материала по Луне.
7. Отзыв № 3 рецензента.
8. Возражение авторов на отзыв № 3 рецензента.