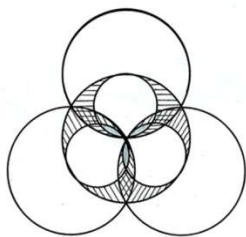


УДК 521.131 + 524.47



## МНОГОСЛОЙНЫЕ МОДЕЛИ ШАРОВЫХ ЗВЕЗДНЫХ СКОПЛЕНИЙ. ЧАСТЬ 1

Смульский И.И. (д.ф.-м.н., проф.)

*Институт криосферы Земли, ТюмНЦ СО РАН, Федеральный  
Исследовательский Центр,  
г. Тюмень, РФ; [jmulsky@mail.ru](mailto:jmulsky@mail.ru)*

**Аннотация.** На основании сферических однослойных структур создаются многослойные модели шаровых звездных скоплений. Представлен алгоритм их построения и описана программа для их создания. В результате решения задачи гравитационного взаимодействия  $N$  тел исследована эволюция 5-и и 10-слойных структур. В процессе взаимодействия тел происходит переход от первоначально организованной структуры к равномерно распределенной в пространстве. Количество столкновений между телами уменьшается, и модель шарового скопления переходит в установившуюся форму существования. Представлены траектории отдельных тел. Исследованы обстоятельства сближения тел. Рассмотрены процессы при столкновении тел и приобретении ими вращательного движения и тепловой энергии.

**Ключевые слова:** задача  $N$  тел, решение, шаровые звездные скопления, свойства

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Шаровые звездные скопления имеют сферическую или несколько сплюснутую форму и содержат от десятков тысяч до миллиона звезд [1]. Средняя плотность в шаровых скоплениях равна 0.4 звезды на кубический парсек (пк) [12]. В центре плотность возрастает до  $100 \div 1000$  зв./пк<sup>3</sup>. Средний диаметр скопления достигает  $20 \div 100$  пак. Шаровые скопления – распространенные объекты Вселенной: только в нашей Галактике их около 150 [13]. Они являются старыми образованиями. Возраст большей части их равен 13.7 млрд. лет и достигает 19.2 млрд. лет [1].

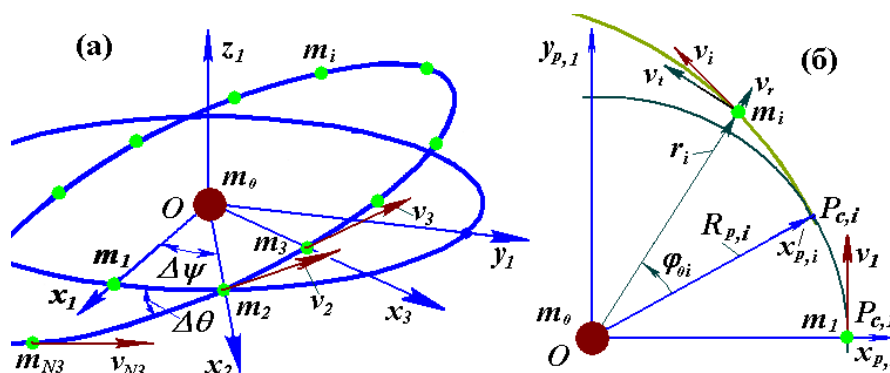
Существуют также карликовые сфероидальные галактики. Преимущественно они являются спутниками других галактик, однако встречаются в виде изолированных объектов [7]. Шаровую форму имеют также ядра галактик и окружающие их гало. Так что шаровая форма звездных ассоциаций является весьма распространенной их организацией.

Используются разные способы моделирования таких звездных ассоциаций как шаровые звездные скопления и галактики [13]. В одних из них вся область скопления рассматривается как сплошная среда, в других – как набор объектов со случайными кинематическими характеристиками. Эти модели не являются детерминированными. В детерминированных моделях каждое тело имеет свой размер, массу, координаты и скорость. Исследуется гравитационное взаимодействие каждого такого тела с каждым другим телом. Поэтому положение и скорость тела известны в любой момент времени. Этим способом были рассмотрены взаимодействия тел в сферической однослойной структуре [4-5]. Обосновано её построение, показано развитие в процессе

взаимодействия тел, и изучена ее эволюция. Такая структура представляет собой модель шарового звездного скопления с разреженной областью внутри. В настоящей работе рассматриваются многослойные структуры, каждый слой которой создается по алгоритму однослойной структуры. Обосновывается алгоритм их построения, обсуждаются исследования по выбору основных параметров этих структур, исследуется эволюция нескольких моделей многослойных структур. В процессе этой работы проявляются различные явления и свойства этих структур, исследованию которых уделено значительное внимание. Эти явления также происходят в шаровых звездных скоплениях.

## 2. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ И СООТНОШЕНИЯ ПОСТРОЕНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУР

Многослойная структура создается из ряда распределённых по сфере структур [4-5]. Однослойная структура основывается на решении задачи о взаимодействии  $N_3$  периферийных тел массой  $m_i = m_1$ , расположенных осесимметрично на плоскости вокруг центрального тела массой  $m_0$  [2-3]. Такая структура разворачивается в пространстве следующим образом. Второе периферийное тело  $m_2$  (рис. 1а) вместе с остальными  $m_3, m_4, \dots, m_i, \dots, m_{N_3}$  телами поворачивается в плоскости  $x_1y_1$  на угол  $\Delta\psi$  от первого тела. Затем через ось  $x_2$ , проходящую через второе тело вся плоскость с телами  $m_2 - m_{N_3}$  поворачивается на угол  $\Delta\theta$  от первоначальной плоскости. В новой плоскости располагаются также вектора скорости этих тел. Такой процесс поворотов на углы  $\Delta\psi$  и  $\Delta\theta$  выполняется последовательно для всех тел от  $m_3$  до  $m_{N_3}$ . В результате образуется распределённая в пространстве структура (рис. 2а), в которой координаты и скорости тел при их взаимодействии позволяют им совершать в пространстве движения с периодами практически такими же, как и на плоскости. Вариацией углов  $\Delta\psi$  и  $\Delta\theta$  можно создавать различные сферические структуры.



**Рис. 1.** Геометрические и кинематические характеристики однослойной осесимметричной структуры  $N_3$  тел с центральным телом массой  $m_0$  и периферийными телами с массой  $m_i = m_1$ : а – повороты тел и их скоростей на углы  $\Delta\psi$  и  $\Delta\theta$ ; б – полярные координаты  $r_i$  и  $\varphi_{0,i}$  периферийного тела  $m_i$  на участке его траектории; полярный угол  $\varphi_{0,i}$  отсчитывается от перигея орбиты  $P_{c,i}$ .

Существует также еще ряд других возможностей, которые позволяют с помощью поворотов на углы  $\Delta\psi$  и  $\Delta\theta$  создавать разные варианты структур. В работах

[4-5] их рассмотрено 4. В четвертом варианте на первоначальной окружности находятся не тела  $m_i$ , а перицентры их орбит  $P_{c,i}$  (рис. 1б). Орбита может быть эллипсом, параболой или гиперболой. Периферийные тела имеют одинаковую орбиту с эксцентриситетом  $e$ , а каждое тело находится на угловом расстоянии  $\varphi_{0,i}$  от своего перицентра  $P_{c,i}$ . В этом случае тела в слое будут расположены в объемной области от радиуса перицентра  $R_p$  до радиуса апоцентра  $R_a$ .

Этот вариант использован для создания многослойных структур. Однако в настоящей статье все приводимые структуры созданы с нулевым эксцентриситетом. Поэтому все слои являются сферическими.

Пусть в многослойной структуре имеется  $N_2$  слоев, номера которых  $j = 1, 2, \dots, N_2$ . Рассмотрим координаты и скорости тела в слое  $j$  при первоначальном плоском его положении. Тела на кольце слоя  $j$  расположены равномерно с интервалом  $\Delta\varphi_j = 2\pi/N_{3,j}$ . Тела движутся по орбитам с эксцентриситетом  $e$ . Они находятся в перицентрах своих орбит (рис. 1б), угловые координаты которых отсчитывается от оси  $x_{p,j,i}$

$$\varphi_{0,j,i} = (i_j - 1) \cdot \Delta\varphi_j, \quad i_j = 1, 2, \dots, N_{3,j}. \quad (1)$$

Отметим, что в отличие от рис. 1б, в формуле (1) и в последующих формулах введен дополнительный индекс номера слоя  $j$ .

Из уравнения траектории периферийного тела [2-3] можно определить расстояние тел  $r_{j,i}$  от центра  $O$ , радиальную скорость  $v_{r,j,i}$ , трансверсальную скорость  $v_{t,j,i}$ . Тогда в системе координат  $x_{p,j,i}, y_{p,j,i}, z_{p,j,i}$ , с осями  $x_{p,j,i}$ , проходящими через перицентр  $P_{c,j,i}$  (рис. 1б), координаты и скорости периферийных тел запишутся:

$$x_{p,j,i} = r_{j,i} \cdot \cos\varphi_{0,j,i}; \quad y_{p,j,i} = r_{j,i} \cdot \sin\varphi_{0,j,i}; \quad z_{p,j,i} = 0; \quad (2)$$

$$v_{x_{p,j,i}} = v_{r,j,i} \cdot \cos\varphi_{0,j,i} - v_{t,j,i} \cdot \sin\varphi_{0,j,i}; \quad v_{y_{p,j,i}} = v_{r,j,i} \cdot \sin\varphi_{0,j,i} + v_{t,j,i} \cdot \cos\varphi_{0,j,i}; \quad v_{z_{p,j,i}} = 0. \quad (3)$$

В результате решения задачи ньютоновского взаимодействия тел в осесимметричной структуре [2-3] уравнение траектории периферийного тела в полярной системе координат  $r_{j,i}(\varphi_{0,j,i})$  получено следующим виде:

$$r_{j,i} = \frac{R_{p,j}}{(\alpha_{1,j} + 1) \cdot \cos\varphi_{0,j,i} - \alpha_{1,j}}, \quad (4)$$

где  $R_{p,j}$  – радиус перицентра, т.е. точки на орбите с наименьшим расстоянием до центра  $O$  на (рис. 1б);

$$\alpha_{1,j} = \mu_{1,j} / (R_{p,j} \cdot v_{p,j}^2); \quad (5)$$

$$\mu_{1,j} = -G(m_{j,0} + m_{j,1} \cdot f_{N_{3,j}}); \quad (6)$$

$$f_{N_{3,j}} = 0.25 \sum_{i_j=2}^{N_{3,j}} \frac{1}{\sin[\pi(i_j - 1)/N_{3,j}]}. \quad (7)$$

В формулах (5) - (7) использованы следующие обозначения:  $\alpha_{1,j}$  – параметр траектории;  $\mu_{1,j}$  – параметр взаимодействия;  $f_{N_{3,j}}$  – вклад воздействия  $N_{3,j} - 1$  периферийных тел на одно из них.

В зависимости от параметра траектории  $\alpha_1$ , орбиты периферийных тел могут быть окружностями ( $\alpha_1 = -1$ ), эллипсами ( $-1 < \alpha_1 < -0.5$ ), параболами ( $\alpha_1 = -0.5$ ) и гиперболами ( $-0.5 < \alpha_1 < 0$ ). Время движения тела по траектории также зависит от  $\alpha_1$  [2-3].

В дальнейшем понадобятся еще четыре параметра орбиты периферийных тел [2]: период обращения по орбите

$$P_j = -\frac{2\pi\alpha_{1,j} \cdot R_{p,j}}{v_{p,j}(-2\alpha_{1,j} - 1)^{3/2}}, \quad (8)$$

скорость в перигеуме

$$v_{p,j} = \sqrt{\mu_{1,j}/(\alpha_{1,j} \cdot R_{p,j})}, \quad (9)$$

эксцентриситет орбиты

$$e_j = -(1 + 1/\alpha_{1,j}) \quad (10)$$

и большая полуось орбиты

$$a_j = R_{p,j}(2\alpha_{1,j} + 1)/\alpha_{1,j}. \quad (11)$$

Радиальная скорость периферийного тела определяется выражением [2]:

$$v_{r,j,i} = \pm v_{p,j} \sqrt{(\alpha_{1,j} + 1)^2 - (\alpha_{1,j} + R_{p,j}/r_{j,i})^2}. \quad (12)$$

Радиальная скорость положительна при движении тела от перигеума до апогеума, и отрицательна – при возвращении к апогеуму. Трансверсальная скорость запишется так [2]:

$$v_{t,i} = v_p \cdot R_p / r_i \quad (13)$$

Выражениями (1) – (13) определяются координаты и скорости периферийных тел во всех  $N_2$  слоях плоской структуры, если заданы массы тел  $m_{j,0}$  и  $m_{j,1}$ , радиусы перигеумов  $R_{p,j}$  и параметры траекторий  $\alpha_{1,j}$ , или их эксцентриситеты  $e_j$ .

Для того чтобы можно было варьировать структуры, введены коэффициенты угла между телами в слое  $k_\varphi$  и угла поворота вектора скорости  $k_{\varphi v}$ , с помощью которых эти углы определяются:

$$\Delta\psi = k_\varphi \cdot \Delta\varphi; \quad \Delta\theta = k_{\varphi v} \cdot \Delta\varphi. \quad (14)$$

По этому алгоритму будет создаваться многослойная структура, состоящая из  $N_2$  слоев. Орбита тел в слое задается эксцентриситетом  $e$  и большой полуосью  $a$ . С помощью выражения (10) параметр траектории  $\alpha_{1,j}$  определяется эксцентриситетом  $e$ , а согласно (11) радиус перигеума  $R_{p,j}$  будем определяться через полуось орбиты  $a_j$  так:

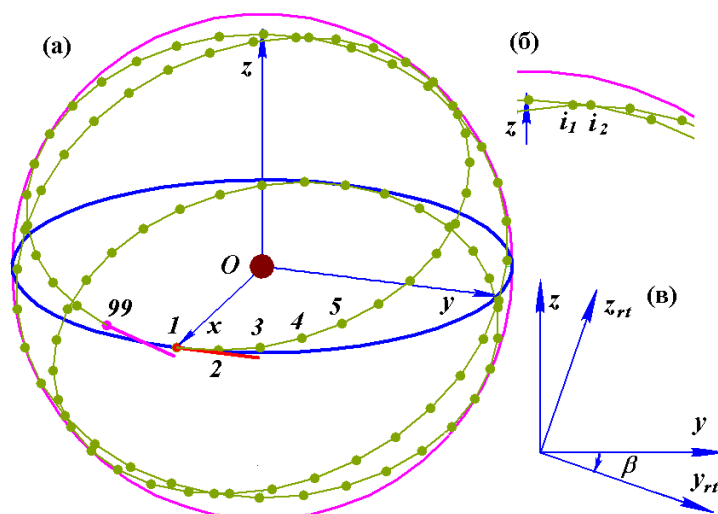
$$R_{p,j} = a_j \cdot \alpha_{1,j} / (2\alpha_{1,j} + 1). \quad (15)$$

Было показано [2], что при центрально-симметричном расположении тел в пространстве сила воздействия наружного слоя на массу, находящуюся внутри, равна нулю. С другой стороны, сила воздействия такой структуры на массу, находящуюся вне её, равна силе воздействия материальной точки, находящегося в центре структуры и имеющий массу, равную массе этой структуры. Поэтому для каждого слоя, начиная с  $j = 2$ , будем считать, что в его центре расположено центральное тело с массой  $m_{j,0}$ , равное массе всех тел, находящихся внутри слоя  $j$ , т.е.

$$m_{j,0} = m_{j-1,0} + N_{3,j-1} m_{j-1,1}. \quad (16)$$

Как уже отмечалось, плоская многослойная структура, описанная выражениями (1) – (16) превращается в пространственную последовательными поворотами на углы  $\Delta\psi$  и  $\Delta\theta$ . Они выполняются для каждого слоя. Алгоритм этих поворотов представлен в работах [4-5] в виде варианта 4. Поэтому здесь его приводить не будем.

Дополнительно к этому алгоритму добавлены ещё три действия. Первое действие связано с уточнением расстояния между телами в одном слое (рис. 2а). Первое периферийное тело 1 расположено на оси  $x$ , затем следуют 2, 3, 4 и т.д. тела на практически одинаковом расстоянии друг от друга. А последнее тело 99 не находится на таком же расстоянии от первого тела. Был разработан алгоритм уточнения коэффициента  $k_\varphi$  в формуле (14). Он позволяет рассчитать угол  $\Delta\psi$  между телами так, чтобы расстояние между первым и последним телами было таким же, как и между остальными телами. С этой целью вычисляются координаты тела с номером  $N_{3,j} + 1$ . Если его координаты совпадут с координатами первого тела, то расстояние между телами  $N_{3,j}$  и 1 будет таким же, как и расстояние между остальными телами. Расчёт выполняется методом последовательных приближений, пока не будет достигнута заданная точность EPS. Как правило, коэффициент  $k_\varphi$  за 6 итераций определяется с относительной точностью  $\text{EPS} = 1 \cdot 10^{-10}$ .



**Рис. 2.** Расположение 99 тел в одном слое при  $k_\varphi = 1.7$  и  $k_{\varphi v} = 1$  в системе координат  $xyz$ : а – в нескорректированном слое расстояние между 99 телом и 1 отличается от расстояний между другими телами; отрезками показаны вектора скорости 1-го и 99-го тел; б – к коррекции расстояний на участках самопересечения слоя; в – к повороту слоя на угол  $\beta$ .

Второе действие связано с коррекцией положения тел в точках самопересечения их линии первоначального расположения (рис. 2б). С этой целью рассчитывается количество тел слоя  $N_3$  так, чтобы тело на линии, пересекающей промежуток между двумя телами, находилась примерно на одинаковом расстоянии от них. Обозначим:  $d_m$  – среднее расстояние между телами,  $d_{mn}$  – минимальное расстояние между телами  $i_1$  и  $i_2$ , где тела  $i_1$  и  $i_2$  находятся на разных участках образующей линии. Тогда длина образующей линии запишется так:

$$l_0 = N_3 d_m, \quad (17)$$

а расстояние от оси  $x$ , на которой находится тело с номером  $i = 1$ , до тела с номером  $i_1$  будет

$$l_1 = (i_1 - 1)d_m. \quad (18)$$

Расстояние до тела с номером  $i_2$  будет больше на величину  $d_{mn}$ :

$$l_2 = (i_1 - 1)d_m + d_{mn}. \quad (19)$$

Пусть при новом количестве тел  $N_3'$  тело  $i_2$  располагается посередине между телами  $i_1$  и  $i_1 + 1$ , то есть расстояние до него будет

$$l_2' = (i_1 - 1)d_m' + 0.5d_m' = d_m'(i_1 - 0.5). \quad (20)$$

Так как длина образующей  $l_0$  неизменна, то  $l_2'$  равняется  $l_2$ , откуда, с учетом (17) для  $d_m'$ , получаем новое количество тел в слое

$$N_3' = \frac{N_3(i_1 - 0.5)}{(i_1 - 1 + d_{mn}/d_m)}. \quad (21)$$

Рассчитанное по формуле (21) новое количество тел  $N_3'$  необходимо округлить до ближайшего целого числа. Как правило, так полученное новое количество тел, позволяет увеличить минимальное расстояние  $d_{mn}$  между телами  $i_1$  и  $i_2$  (рис. 2б) до приемлемых значений.

Третье действие заключается в равномерном повороте слоёв по часовой стрелке, начиная со второго, вокруг оси  $x$  на угол  $\beta_j$  (рис. 2в). Оси координат повернутого слоя обозначены как  $y_{rt}z_{rt}$ . Их проекции на оси координат  $yz$  будут:

$$y = y_{rt} \cos \beta + z_{rt} \sin \beta; \quad z = -y_{rt} \sin \beta + z_{rt} \cos \beta. \quad (22)$$

Угол поворота  $j$ -того слоя определяется выражением

$$\beta_j = (j - 1) \cdot \Delta\beta, \quad (23)$$

где  $\Delta\beta = 2\pi / N_2$ .

### 3. ПРОГРАММА СОЗДАНИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЫ

Для выполнения множественных вычислений при создании многослойной сферической структуры разработана программа MLSpStr2.for. Она состоит из трех частей, в которых осуществляются такие действия: 1) считывание исходных параметров; 2) построение многослойной структуры; 3) создание файла начальных условий для системы Galactica.

В статье используется размерно-безразмерный способ операций с данными. При задании параметров структуры аналогом соотношений параметров является Солнечная система. После создания структуры ее динамика и эволюция рассматривается в безразмерном виде. Обсуждение результатов проводится в размерном виде с параметрами для шарового звездного скопления.

Основные исходные параметры считываются из файла данных MLSpStr2.dat. В этом файле задаются параметры структуры:  $N_2$  – количество слоёв;  $N_{30}$  – начальное количество периферийных тел в первом слое;  $mi$  – исходная масса центрального тела и всех тел первого слоя;  $p_{m0}$  – часть массы  $mi$ , занимаемая центральным телом;  $A_{Sm}$  – полуось орбит периферийных тел первого слоя в астрономических единицах (AU);  $e$  – эксцентриситет орбит периферийных тел;  $k_a$  – коэффициент полуосей слоёв, начиная со второго;  $k_{N3}$  – коэффициент количества тел на этих слоях;  $k_{\varphi 0}$  и  $k_{\varphi v}$  – коэффициенты

исходных углов тел и скоростей при построении структуры; EPS – допускаемая ошибка расчета угла расположения тел  $k_\phi$ ;  $I_{nx}$  – ключ задания равномерного поворота слоев вокруг оси  $x$ ;  $I_{cm}$  – ключ выдачи координат и скоростей периферийных тел в информационном файле MlSpStr2Err;  $\rho_b$  – абсолютная плотность тел. Следует отметить, что плотность тел  $\rho_b$  в  $\text{кг/м}^3$  необходима для расчета их радиусов. Радиусы тел используются в программе Galactica при расчете их столкновений. В файле MlSpStr2.dat задается также ряд других параметров, необходимых для системы Galactica.

Этими данными полностью определены параметры центрального тела и тел первого слоя. Полуось орбит остальных слоев рассчитывается так:

$$a_j = A_{sm} \cdot AU \cdot (1 + k_a(j-1)), \quad (24)$$

где AU – астрономическая единица, а количество тел в слое определяется пропорционально полуоси орбиты:

$$N_{3,j} = N_{3,1} \cdot k_{N3} \cdot (a_j / a_1). \quad (25)$$

Масса периферийного тела во всех слоях одинакова. Она рассчитывается по массе  $m_i$ , за вычетом массы центрального тела, и по количеству тел  $N_{3,1}$ .

После считывания исходных параметров структуры по представленному выше алгоритму осуществляется расчет координат и скоростей всех ее тел. Результаты расчетов выдаются в виде трех файлов: fN3fvout.dat, MlSpStr2Err и, например, MS15c49b.dat. В файле fN3fvout.dat приведены номера слоев  $j$ , количество тел  $N_{3,j}$ , коэффициенты  $k_{\phi,j}$  и  $k_{\phi v,j}$ , полуоси  $a_j$  в м и масса одного периферийного тела  $m_j$  в кг.

В файле MlSpStr2Err для каждого слоя выведены период  $P_j$  в сидерических годах, количество тел  $N_{3,j}$ ,  $d_m$  – среднее расстояние между телами в м, минимальное расстояние  $d_{mn}$  между телами  $i_1$  и  $i_2$  в точке пересечения их линии расположения с указанием их номеров  $i_1$  и  $i_2$ . В качестве  $d_m$  выдается расстояние между 2 и 3 телами. Кроме того, выдается количество итераций при расчете коэффициенты  $k_{\phi,j}$  и два его последних значения.

Затем выдается итоговая информация по всем слоям: минимальное расстояние между телами во всей структуре с указанием слоя и номеров тел; безразмерные координаты и скорости центра масс всей системы и первого тела первого слоя. Для центра масс эти величины должны быть равны нулю, а не нулевые их значения свидетельствуют об уровне погрешности создания системы. Например, для пятнадцатислойной структуры MS15c49b.dat с количеством тел  $N = 5866$  они находятся на уровне  $2 \cdot 10^{-17}$  при компиляции программы с двойной точностью, т.е. с длиной числа в 16 значащих цифр. Этот уровень погрешности свидетельствует, что он находится на предельно низком значении.

В конце этого файла выдаются исходные данные, заданные в файле MlSpStr2.dat. Таким образом, файл MlSpStr2Err как бы является паспортом созданной структуры: в нем содержится необходимая информация о ней.

Дополнительно в файле MlSpStr2Err выдаются координаты и скорости всех тел в слоях в размерном виде при задании в файле исходных данных MlSpStr2.dat ключа  $I_{cm} = 1$ . Файл MlSpStr2Err также предназначен для выдачи сообщений об ошибках при

работе программы MLSpStr2.for. При появлении ошибки, ее расшифровка записывается в этот файл.

На основании исходных данных, заданных в файле MLSpStr2.dat, создается структура с размерами слоев и количеством тел на них, согласно алгоритму (24) – (25). Для создания структур с другим алгоритмом используется дополнительный файл исходных данных fN3fvinp.dat. В нем задаются номера слоев  $j$ , количество тел  $N_{3,j}$ , коэффициенты  $k_{\varphi,j}$  и  $k_{\varphi v,j}$ , полуоси  $a_j$  в м и масса одного периферийного тела  $m_j$  в кг. На основании этих данных создается многослойная структура. При этом масса центрального тела рассчитывается на основании файла исходных данных MLSpStr2.dat. Программа MLSpStr2 при наличии файла исходных данных fN3fvinp.dat создает структуру из данных этого файла, а при его отсутствии – по алгоритму (24) – (25).

В файле начальных условий для программы Galactica, например, MS15c49b.dat записываются массы, координаты, скорости и радиусы тел, а также ряд других параметров, необходимых для расчета их динамики и эволюции. Система Galactica [8] – [10] позволяет рассчитать динамику многослойной структуры и исследовать ее эволюцию. Кроме того, она используется для завершения создания структуры. По представленному выше алгоритму создается структура, в которой тела в слоях организованы по определенному порядку. После их взаимодействия в течение некоторого времени тела равномерно распределяются по пространству. Для этого распределения и используется система Galactica.

В файле начальных условий, например, MS15c49b.dat используются безразмерные величины [9]. Все массы тел отнесены к общей массе системы  $m_{ss}$ . Время  $T$  выражается в сотнях периодов  $P_l$  обращения тел первого слоя, где  $P_l$  определяется по начальным данным согласно (8). Для этого введен коэффициент времени

$$k_t = 1/(100 \cdot P_l). \quad (26)$$

Геометрические размеры в программе Galactica отнесены к величине

$$A_m = (G \cdot m_{ss} / k_t^2)^{1/3}, \quad (27)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная.

В программе Galactica интегрируются дифференциальные уравнения взаимодействия тел по закону тяготения Ньютона. Они в безразмерном виде, например, для проекции  $x$  выглядит так:

$$\frac{d^2 x_j}{dT^2} = - \sum_{k \neq j}^N \frac{m_{o,k} (x_j - x_k)}{r_{jk}^3}, \quad j = k = 1, 2, \dots, N, \quad (28)$$

где  $x_j = x_{C,j}/A_m$  – безразмерная координата  $j$ -того тела;

$x_{C,j}$  – размерная координата  $j$ -того тела относительно центра масс всей структуры;

$m_{o,k} = m_k / m_{ss}$  – безразмерная масса  $k$ -того тела;

В программе Galactica используется метод интегрирования высокой точности [10]. Применительно к динамике Солнечной системы точность программы Galactica на порядки превышает точность программ NASA [6, 11]. Система Galactica, с набором необходимых средств для решения задач, свободно доступна на сайте <http://www.ikz.ru/~smulski/GalactcW/>. Ее описание представлено в файле GalDiscrp.pdf на русском языке, а в файле GalDiscrpE.pdf – на английском. Программа MLSpStr2,



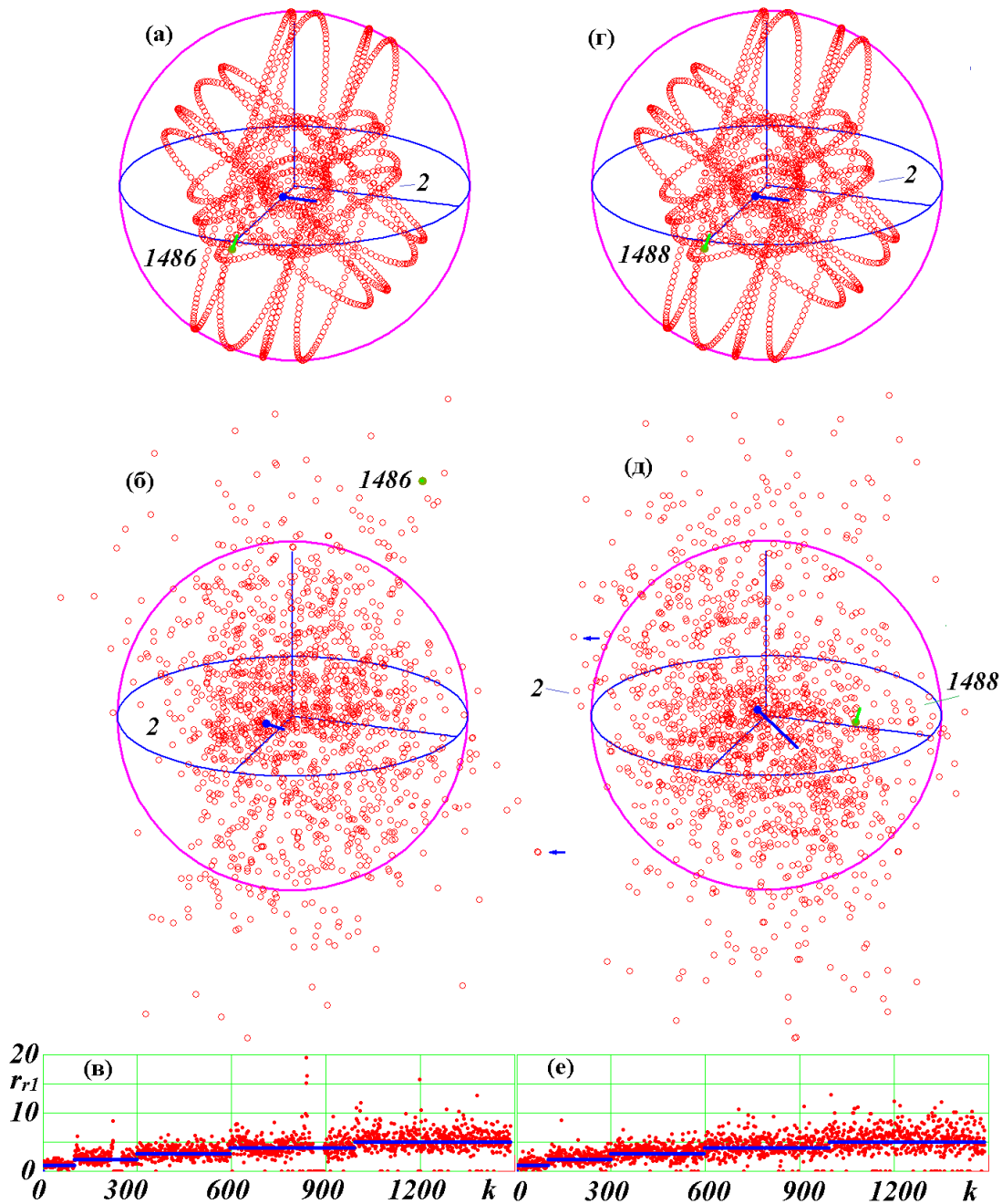
файл данных MLSpStr2.dat и упоминаемые здесь файлы структур представлены на сайте <http://www.ikz.ru/~smulski/Data/MLSpStr/>.

#### 4. ПЕРВЫЕ ВАРИАНТЫ ПЯТИСЛОЙНЫХ СТРУКТУР

Для создания структуры необходимо определиться с выбором параметров, задаваемых в файле MLSpStr2.dat. Ряд этих параметров определился при создании и исследовании сферических однослойных структур [4-5]. Рассматриваемые далее структуры имели следующие размерные параметры: исходная масса центрального тела и первого слоя равняется массе Солнечной системы  $m_i = 1.99179 \cdot 10^{30}$  кг, доля в этой массе центрального тела  $p_{m0} = 0.99$ ; длина полуоси первого слоя равняется 1 астрономической единице, т.е.  $a_1 = 149.595$  млн. км. В этом случае период обращения первого слоя  $P_1 = 1$  сидерический год. Остальные параметры были следующие:  $A_{sm} = 1$ ;  $e = 0$ ;  $k_a = 1$ ;  $k_{N3} = 1$ ;  $k\varphi = 2.83$ ;  $k_{\varphi v} = 1$ ;  $EPS = 1 \cdot 10^{-10}$ ;  $\rho_b = 5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Отметим, что массы тел находятся в таком соответствии с телами Солнечной системы:  $m_0 = 0.991m_S$  а  $m_1 = 0.354m_{Sa}$ , где  $m_S$  – масса Солнца, а  $m_{Sa}$  – масса Сатурна. Пятислойные структуры с этими параметрами, представленные на рис. 3, созданы с равномерным поворотом слоев вокруг оси  $x$ , то есть с ключом  $I_{nx} = 1$ .

В пятислойной структуре MS05c99d.dat размеры слоев  $a_j$ , согласно (24), увеличиваются с каждым слоем на полуось орбиты первого слоя, а в соответствии с (8) их периоды  $P_j$  равны 2.80; 5.07; 7.66 и 10.46 периодов первого слоя. Количество тел в слоях: 99, 198, 297, 396, 495, также согласно (25) увеличивается на количество тел первого слоя. Общее количество тел  $N = 1486$ . На рис. 3а отрезками показаны вектора скорости 2-ого и 1486-ого тел. В отличие от рис. 1 и рис. 2, нумерация тел начинается с центрального тела ( $m_1$ ), первое тело первого слоя обозначено как  $m_2$ . В месте самопересечения линии образования слоев 2 и 4 расстояние между телами было в 66 и 14 раз, соответственно, меньше среднего расстояния между телами. Поэтому при расчете движения тел структуры с помощью системы Galactica в этих местах начались интенсивные столкновения тел и их слияние. На рис. 3б показана структура в момент  $T = 1.01$ , то есть через 101 обращение тел первого слоя. В ней произошло 91 столкновение, при этом 88 тел стали с двойными массами, одно – с тройной массой и одно тело столкнулось с центральным телом.

На рис. 3в представлено распределение относительных расстояний тел  $r_{r1}$  от центра масс в зависимости от их номеров  $k = 1, 2, \dots, N$  в момент времени  $T = 1.01$ . Линиями приведены расстояния тел  $r_{r1}$  при  $T = 0$ . Расстояния отнесены к полуоси орбиты первого слоя  $a_1$ , т.е.  $r_{r1} = r/a_1$ . Как видно, наибольшее расстояние одного из тел достигает величины  $20a_1$ . На горизонтальной оси точками нанесены номера тел, которые слились с другими телами. Видно, что в областях 2-ого и 4-ого слоев имеются пустые участки, т.е.  $r_{r1} = 0$ . В этих местах были малые расстояния между телами в пересечениях их линии расположения. Поэтому в этих местах происходили интенсивные столкновения тел в процессе их взаимодействия. Чтобы исключить эти столкновения была создана структура MS05c99c.dat, в которой количество тел  $N_{3,2}$  и  $N_{3,4}$  в слоях 2 и 4 корректировались согласно (21), в результате чего они увеличились на 1 тело. Поэтому общее количество тел в этой структуре (рис. 3г) стало  $N = 1488$ . Внешне эта структура не отличается от предыдущей (см. рис. 3а).



**Рис. 3.** Два варианта пятислойных структур вначале (а, г) и в результате взаимодействия (б, д) составляющих их тел: а, б, в – MS05c99d.dat; г, д, е – MS05c99c.dat; первое тело первого слоя  $m_2$  находится на оси  $x$ ; вектора скорости тел  $m_2$  и  $m_N$  показаны отрезками; на видах в и е линиями показаны расстояния тел  $r_{r,1}$  от центра масс в момент  $T = 0$ .

Следует отметить, что алгоритм (21) коррекции количества тел  $N_{3,j}$  в слое не внесен в программу MLSpStr2.for. Поэтому новые количества тел в слоях вводятся с помощью дополнительного файла fn3fvinp.dat.

При расчете движения тел этой структуры за время  $T = 1.05$ , то есть почти такое, как и предыдущей структуры, количество столкновений было 38. Таким образом, устранение минимальных расстояний во втором и четвертом слоях привело к уменьшению столкновений в 2.4 раза. За время  $T = 1.95$  (рис. 3д) всего было 44 столкновения. При этом образовалось 40 тел с двойной массой, одно тело с четверной

массой. Кроме того, было одно столкновение с центральным телом. Таким образом, за второй отрезок времени  $\Delta T = 0.9$  всего было 6 столкновений. В этой структуре (рис. 3д) тела более равномерно распределены по пространству, чем в предыдущей структуре на рис. 3б.

На рис. 3е показано распределение относительных расстояний тел второй структуры. Разброс расстояний в ней значительно меньше, чем в предыдущей структуре (рис. 3в). Наибольшее расстояние одного из тел равно  $13a_1$ . Также отсутствуют пустые участки в области 2-ого и 4-ого слоев.

Для рассмотренных выше двух структур задачи взаимодействия тел считались в системе Galactica с шагом  $dT = 1 \cdot 10^{-7}$ . Файлы с кинематическими параметрами структур выдавались через  $K13 = 1 \cdot 10^5$  шагов. Это соответствовало интервалу времени  $\Delta T = 0.01$ , который равен периоду обращения тел в первом слое. Для структуры MS05c99d.dat было выдано 101 файл, а для структуры MS05c99c.dat – 195.

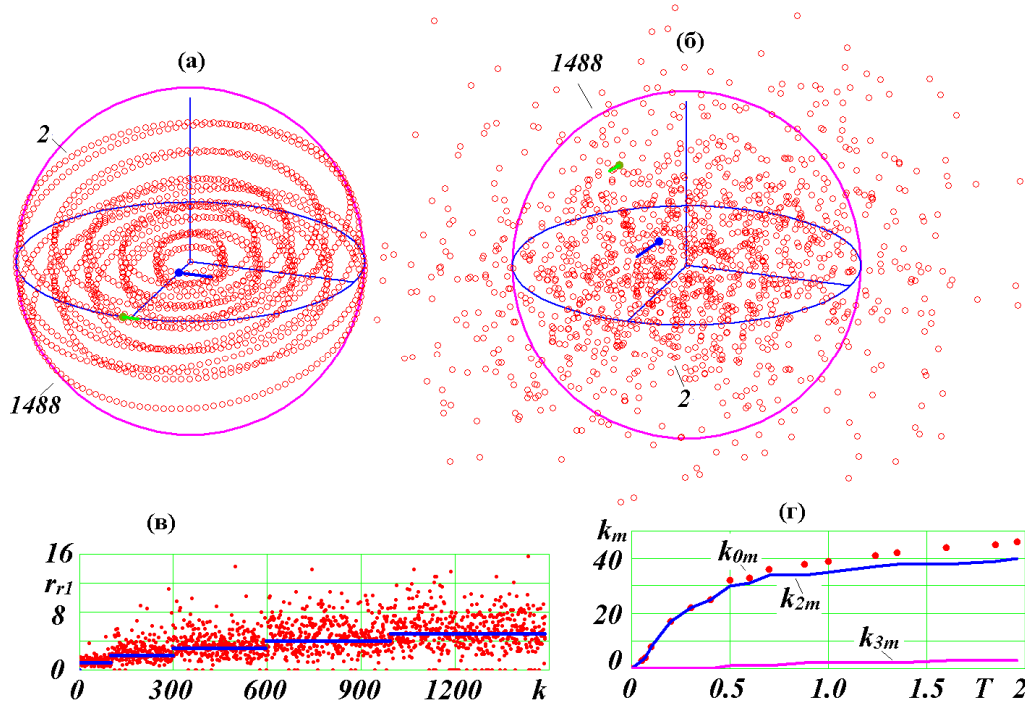
## **5. ЭВОЛЮЦИЯ ПЯТИСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЫ**

### **5.1. Общие изменения**

В структурах на рис. 3 слои последовательно поворачивались вокруг оси  $x$ , поэтому эти структуры стали несимметричными. В связи с этим была создана структура MS05c99e.dat с теми же параметрами, что и структура MS05c99c.dat, но без поворота слоев, то есть с параметром  $I_{nx} = 0$ . Как видно из рис. 4а, она более симметрична. Она имеет  $N = 1488$  тел, а параметры слоев такие же как у структуры MS05c99c.dat. После 196 обращений тел первого слоя, то есть при  $T = 1.96$  рассматриваемая структура (см. рис. 4б) также более симметрична, чем предыдущая (рис. 3д). Однако разброс расстояний тел  $r_{r1}$  (рис. 4в) немного больше, чем в предыдущей (рис. 3е). Наибольшее удаление тела от центра масс  $r_{r1max} = 15.7$  по сравнению с  $r_{r1max} = 13.1$  в предыдущей структуре. В ней также немного больше столкновений, а именно, 46, по сравнению с предыдущей – 44. Отметим, что наибольшее удаление от центра масс  $r_{r1max} = 15.7$  имеет тело 1434.

Динамика столкновений рассматриваемой структуры показана на рис. 4г. К моменту  $T = 1.96$  в ней образовалось 40 тел с двойной массой и 3 тела с тройной массой. Как видно из рис. 4г, в начальный отрезок времени до  $T < 0.5$  столкновения происходят чаще, а на участке  $T > 0.7$  – реже. Вначале скорость количества столкновений равна  $v_{imp} = 64$  столкновения на 100 обращений тел первого слоя, а затем  $v_{imp} = 8$ . То есть скорость количества столкновений уменьшилась в восемь раз. Если отнести скорость к количеству тел, то на последнем участке она будет  $v_{imp1} = v_{imp}/N = 5.4 \cdot 10^{-3}$ .

Из визуального анализа структур следует, что остатки первоначальной организации структуры, представленной на рис. 4а, еще сохраняются к моменту  $T = 0.1$ , а к моменту  $T = 0.2$  их уже нет. Поэтому с последнего момента можно считать, что структура с неупорядоченным движением создана, и вид ее в дальнейшем мало изменяется. А по достижению скорости  $v_{imp}$  второго участка ее изменения, можно считать, что динамика структуры перешла в стабильную фазу ее существования.



**Рис. 4.** Пятислойная структура MS05c99e.dat без поворотов слоев. а – в момент  $T = 0$ ; б – в момент  $T = 1.96$ ; в – динамика столкновений;  $k_{0m}$  – количество столкновений;  $k_{2m}$  и  $k_{3m}$  – количество образовавшихся тел с массой  $2m_1$  и  $3m_1$ , соответственно. Остальные обозначения см. рис. 3.

### 5.2. Траектории отдельных тел

Были исследованы траектории движения тел разных слоев: тела 2 первого слоя, тела 401 третьего слоя и тел 1434 и 1488 последнего слоя. Исследования выполнялись для двух интервалов времени: начального  $T = 0 \div 0.15$  (рис. 5а, б) и конечного  $T = 1.81 - 2.11$  (рис. 5в, г, д).

На начальном интервале времени тело 2 вначале движется по окружности (см. рис. 5а) с периодом равным  $P_1 = 0.01$ . Его орбита находится в плоскости  $xu$ . Со временем орбита приобретает эллиптичность, и период обращения немного увеличивается. На конечном интервале времени (рис. 3в) эксцентриситет орбиты тела 2 увеличивается до  $e = 0.385$ , но размеры ее уменьшаются, период также уменьшается и становится меньше 0.01. На трехмерном графике рис. 5д видно, что орбита тела 2 поворачивается в пространстве и с каждым обращением тела 2 вокруг центра масс она все дальше отклоняется от плоскости  $xu$ .

Орбита тела 401 на начальном участке (рис. 5а) при первом обращении тела практически является окружностью с периодом  $P_2 = 0.028$ . Затем у нее появляется эллиптичность, и период обращения немного увеличивается. На конечном интервале времени (рис. 5в) эксцентриситет достигает значения  $e = 0.373$ , размер орбиты увеличивается, а период достигает значения  $1.25P_2$ . Как видно из рис. 5д, орбита с каждым обращением поворачивается в пространстве.

Орбита тела 1488, последнего тела пятого слоя, на начальном участке (рис. 5б) является окружностью с периодом обращения  $P_5 = 0.1046$ . На конечном участке (рис. 5г) она уже эллиптическая с эксцентриситетом  $e = 0.349$ , а период увеличился в 1.6

раза. Из рис. 5д видно, что орбита тела 1488 за это время мало изменяется в пространстве

Орбита наиболее удаленного тела 1434, как видно из рис. 5б, начинает значительно изменяться в течение первого обращения. На конечном участке (рис. 5г) она уже является эллипсом с эксцентриситетом  $e = 0.491$  и периодом 0.30, при первоначальном периоде обращения тел 5-ого слоя 0.1046. То есть, период возрос в три раза.

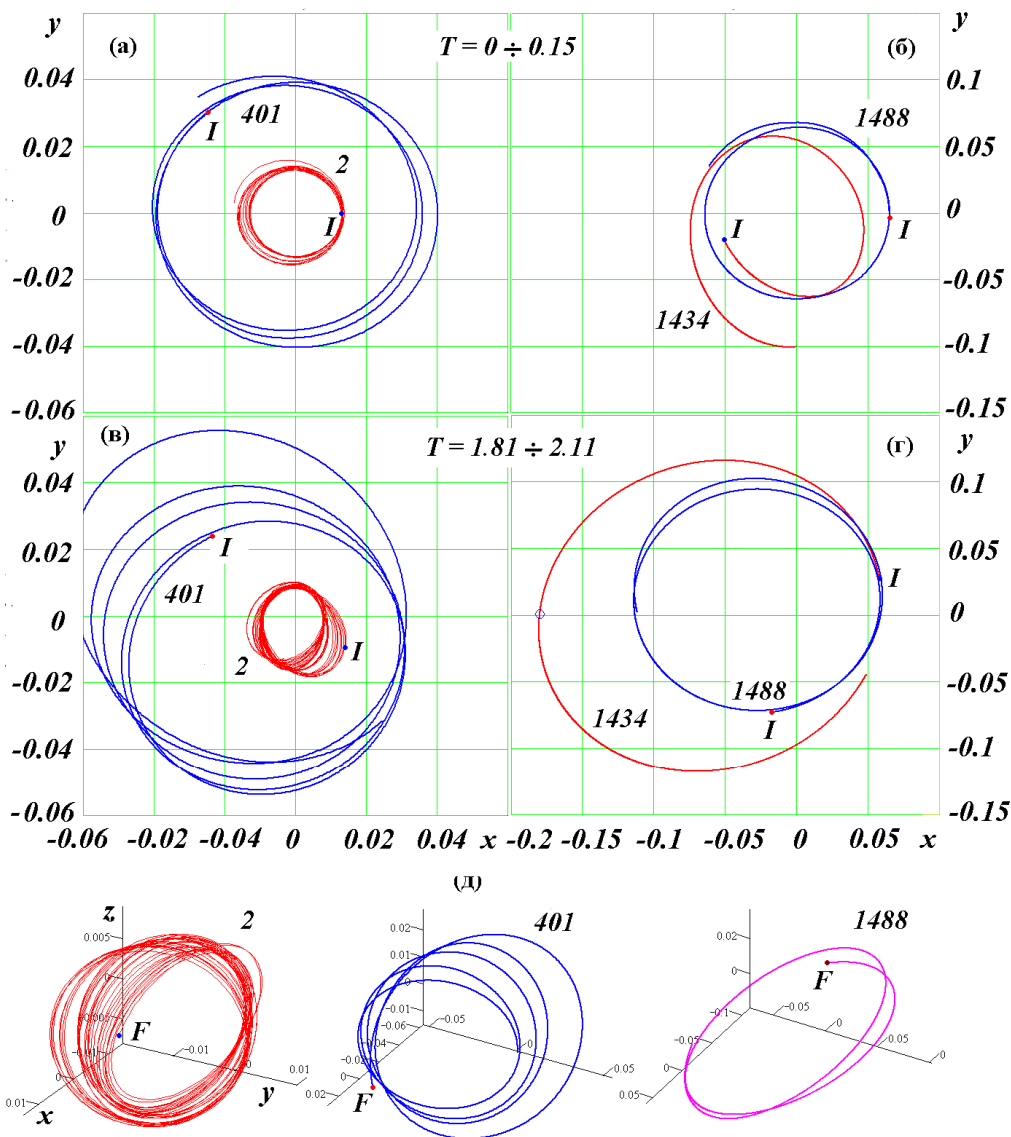


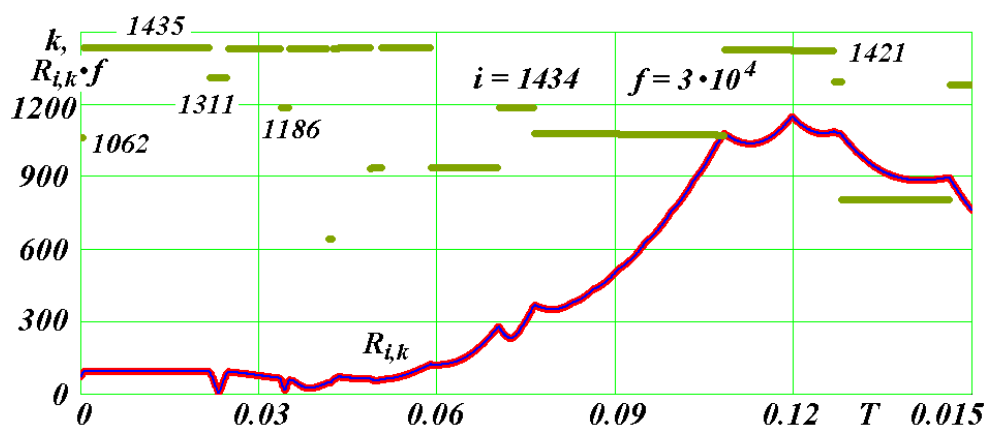
Рис. 5. Траектории тел 2, 401, 1434 и 1488 в начальный (а, б) и в конечный (в, г и д) периоды эволюции структуры MS05c99e.dat: I и F – начальная и конечная точки траекторий; на виде д – трехмерные изображения траекторий; кружком на виде г показано положение тела 1434 в момент  $T = 1.96$ .

### 5.3. Динамика сближений отдельного тела с другими телами

Следует отметить, что орбиты являются точно эллипсами, параболами и гиперболами только в двух случаях взаимодействий: 1) двух тел и 2)  $N$  тел, осесимметрично расположенных на плоскости [3]. Поэтому здесь под эллиптической орбитой подразумевается ограниченная в пространстве траектория, а под гиперболической и параболической – неограниченные траектории. При этом у тела на

параболической траектории скорость в бесконечности стремится к нулю.

Изменение орбиты тела 1434 происходит за счет его сближений с другими телами. График сближений тела 1434 на начальном участке показан на рис. 6. По вертикальной оси отложены номера тел  $k$ , с которыми сближается тело  $i = 1434$ . Они отмечены точками или горизонтальными отрезками, если точки накладываются друг на друга. По вертикальной оси также отмечено расстояние  $R_{ik}$  в момент сближения тела 1434 с телом  $k$ . Расстояние  $R_{ik}$  увеличено на множитель  $f$ . Величина  $R_{ik}$  определена как минимальное расстояние тела  $i$  с другими телами за количество шагов интегрирования  $K13$ , где  $K13$  – параметр системы Galactica. В данном случае интегрирование выполнялось с шагом  $dT = 1 \cdot 10^{-7}$ .



**Рис. 6.** График сближения тела  $i = 1434$  с телами  $k$  на расстояние  $R_{ik}$  за количество шагов интегрирования  $K13 = 3000$  с шагом  $dT = 1 \cdot 10^{-7}$  на начальном интервале времени  $T = 0 \div 0.15$ . Безразмерное расстояние  $R_{ik}$  на графике увеличено в  $f = 3 \cdot 10^4$  раз.

Как следует из рис. 6, в начальный момент  $T = 0$  тело 1434 проходило на расстоянии  $2.40 \cdot 10^{-3}$  от тела 1062, находящегося в пересечении линии образования. При этом расстояние между телами на этой линии равно  $3.17 \cdot 10^{-3}$ , то есть такого же порядка. Затем тело 1434 движется практически с неизменным расстоянием до соседнего тела 1435 до момента  $T = 2.16 \cdot 10^{-2}$ , затем в момент  $T = 2.32 \cdot 10^{-2}$  происходит его сближение с телом 1311 на расстояние  $R_{ik} = 1.66 \cdot 10^{-4}$ . Это расстояние соответствует 90 радиусам тела. Затем в момент  $T = 3.44 \cdot 10^{-2}$  происходит сближение с телом 1186 на расстоянии  $R_{ik} = 5.84 \cdot 10^{-4}$ . Эти два сближения приводят к существенному изменению траектории тела, его орбита становится эллиптической. Оно отдаляется от всех тел на расстояние  $R_{ik} = 3.83 \cdot 10^{-2}$  до ближайшего тела 1421 в момент  $T = 0.12$ . Это наиболее удаленная точка его орбиты, после которой тело 1434 начинает снова приближаться к центру структуры. В этой точке расстояние тела 1434 от центра было  $r = 0.109$ .

В результате дальнейших взаимодействий эксцентриситет орбиты увеличился, и в апоцентрии к моменту  $T = 1.96$  (рис. 5г) оно удаляется от центра на расстояние  $r = 0.205$ , что в 3.14 раза больше первоначального размера структуры.

#### 5.4. Определение параметров траектории отдаленного тела

При рассмотрении результатов расчетов движения тел структуры на рис. 3б, 3д и

рис. 4б возникает необходимость в определении вида движения отдаленных тел. То есть, необходимо определить является ли такое тело телом этой структуры, или оно выброшено из нее. Чтобы не проводить специальных исследований траектории такого тела для решения этого вопроса, рассмотрим метод, основанный на результатах задачи двух тел.

Для отдаленного от структуры тела можно считать, что на него действует вся структура с массой  $m_{ss}$ , которая находится в её центре масс. Тогда параметр траектории движения тела, аналогично (5), будет

$$\alpha_1 = \mu_1 / (R_p \cdot v_p), \quad (29)$$

где  $R_p$  и  $v_p$  ее радиус перицентра и скорость тела в нем, а параметр взаимодействия  $\mu_1 = -G \cdot m_{ss}$ . В результате расчетов взаимодействия по программе Galactica мы имеем координаты  $x, y, z$  и скорости  $v_x, v_y, v_z$  тела в системе центра масс. Из определения скалярного произведения радиус-вектора тела  $\vec{r}$  и вектора скорости  $\vec{v}$  можно записать

$$xv_x + yv_y + zv_z = r \cdot v \cdot \cos \beta_1, \quad (30)$$

где  $\beta_1$  - угол между  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$ ;

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Тогда из (30) получаем выражение для угла  $\beta_1$

$$\cos \beta_1 = \frac{xv_x + yv_y + zv_z}{r \cdot v} \quad (31)$$

Вдоль радиус-вектора  $\vec{r}$  направлена радиальная скорость  $v_r$ , а перпендикулярно ему – трансверсальная  $v_t$ , то есть

$$v_r = v \cdot \cos \beta_1; \quad v_t = v \cdot \sin \beta_1. \quad (32)$$

С другой стороны, согласно задачи 2-х тел [2], радиальная и трансверсальная скорости аналогично (12) и (13) запишутся так:

$$v_r = \pm v_p \sqrt{(\alpha_1 + 1)^2 - (\alpha_1 + R_p / r)^2}; \quad v_t = v_p \cdot R_p / r. \quad (33)$$

Исключая  $v_t$  из (32) и (33) получаем скорость в перицентрии

$$v_p = \frac{v \cdot r \cdot \sin \beta_1}{R_p}, \quad (34)$$

а исключая  $v_r$ , из (32) – (33) с учетом (34) получаем выражение

$$R_p \cos \beta_1 = r \sin \beta_1 \sqrt{(\alpha_1 + 1)^2 - (\alpha_1 + R_p / r)^2}. \quad (35)$$

В три уравнения (29), (34) и (35) входят три параметра  $\alpha_1, R_p$  и  $v_p$ . В результате последовательных подстановок и решений квадратных уравнений радиус перицентра получаем в следующем виде:

$$R_p = \frac{\mu_v \pm \sqrt{\mu_v^2 + r^2 \sin^2 \beta_1 (1 + 2\mu_v / r)}}{1 + 2\mu_v / r} \quad (36)$$

где введено обозначение  $\mu_v = \mu_1 / v^2$ . Величина  $\mu_v$  измеряется в м и отрицательная, то есть  $\mu_v < 0$ . Выражение (36) дает два значения  $R_p$ : при знаке «-» в случае эллиптической орбиты получаем радиус апоцентра  $R_a$ , а в случае «+» получаем радиус перицентра  $R_p$ .

При известном радиусе перицентра  $R_p$  скорость в перицентре  $v_p$  определяется выражением (34). При  $v_p > 0$  обращение по орбите происходит против часовой стрелки.

Затем по формуле (29) определяется параметр траектории  $\alpha_1$ , а по формуле (10) – эксцентриситет орбиты  $e$ . Эти параметры в соответствии с (4) позволяют определить траекторию движения тела, а также время движения по ней [2].

В случае параболической или гиперболической орбиты скорость на бесконечности определяется так

$$v_\infty = v_p \sqrt{2\alpha_1 + 1} \quad (37)$$

Для гиперболической орбиты радиус апоцентра  $R_a$  из выражения (36) при знаке «-» получается отрицательным.

Для тела 1434 рассчитанные по этому алгоритму параметры для момента  $T = 1.96$  имеют следующие значения:  $R_p = 0.0694$ ,  $v_p = 4.638$ ,  $\alpha_1 = -0.669$ ,  $e = 0.494$ ,  $R_a = 0.2049$ ,  $v_a = 1.572$ . Так как для эллиптической орбиты  $-0.5 > \alpha_1 > -1$ , то траекторией тела 1434 является эллипс. В момент  $T = 1.96$  тело находится на расстоянии  $r = 0.2049$ , имеет скорость  $v = 1.572$ . Эти параметры совпадают с параметрами апоцентра. Как видно из рис. 5г, тело 1434 действительно находится в наиболее удаленной от центра точке траектории, то есть в ее апоцентре. Поэтому представленный выше алгоритм (29) - (37) можно использовать для оценки траектории отдаленного тела по его координатам и скорости в какой-то момент времени.

## 6. ЭВОЛЮЦИЯ ДЕСЯТИСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЫ

### 6.1. Общие изменения

В связи с тем, что в структуре с повернутыми слоями вокруг оси  $x$  (рис. 3г) столкновений было немного меньше, чем в структуре без поворотов (рис. 4а), было принято решение создать 10-и и 15-слойные структуры с повернутыми слоями. Такая десятислойная структура представлена на рис. 7а. Ее начальные параметры в файле MLSpStr2.dat такие же, как и структуры на рис. 3г, за исключением количества слоев, которое задано  $N_2 = 10$ . Все близкие сближения в самопересечениях линии образования устранены. Количество тел в слоях изменяется от 99 в 1-м слое до 991 – в 10-ом, полуоси от  $a_1 = 0.0118$  – до  $a_{10} = 0.1179$ , периоды от  $P_1 = 0.0100$  – до  $P_{10} = 0.2536$ . Общее количество тел  $N = 5451$ .

Счет движения тел по программе Galactica в предыдущих случаях осуществлялся с шагом  $dT = 1 \cdot 10^{-7}$ . При этом шаге время счета интервала  $\Delta T = 0.01$ , эквивалентного одному обращению тела первого слоя, длилось 7 часов. Для десятислойной структуры с  $N = 5451$  счет этого интервала времени занимал 97 часов. Чтобы решить задачу за необходимый интервал времени, длительности ее счета превышала один год. Поэтому решение задач с таким количеством тел выполнялось с шагом  $dT = 10^{-6}$  в режиме автоматического подбора шага, который запускается в системе Galactica ключом K14 = 3. Так как результаты выдаются через определенное число шагов интегрирования, то в этом случае интервал времени между этими результатами может быть разным.

Следует отметить, что в системе Galactica также происходит автоматическое изменение шага при сближении тел до расстояний порядком их диаметров. Эти обстоятельства необходимо учитывать при анализе точек на графиках изменения параметров по времени.



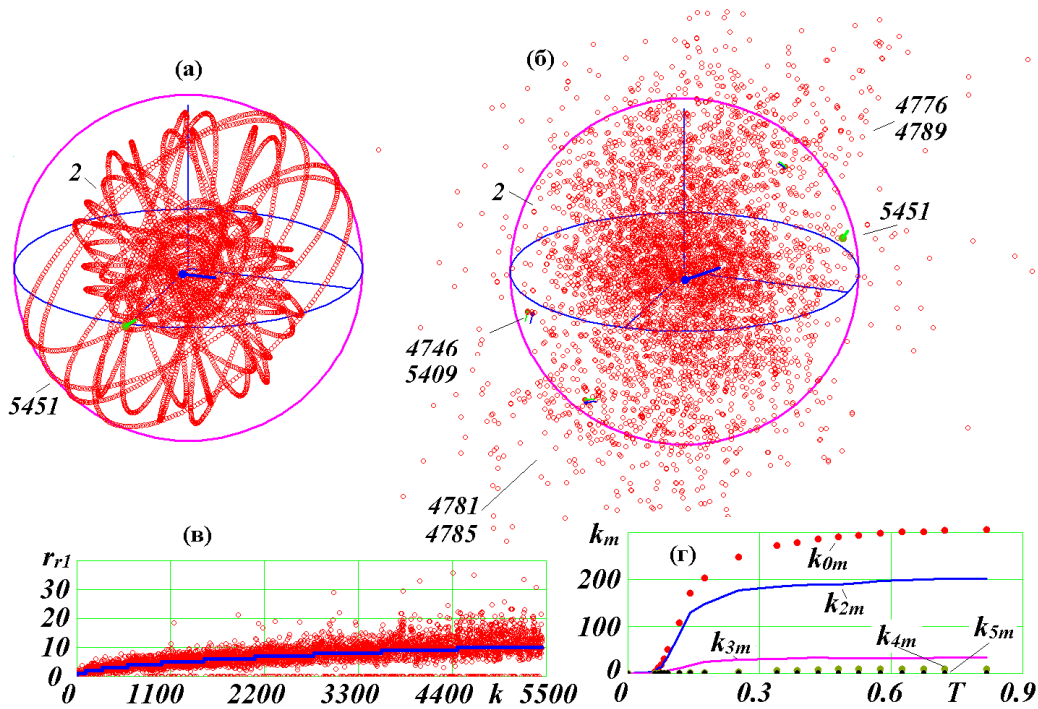


Рис. 7. Десятислойная структура MS10c99b.dat и ее эволюция. Вид (б) – в момент  $T = 0.815$ . На виде (г) показана динамика столкновений:  $k_{0m}$  – количество столкновений;  $k_{4m}$  – количество образовавшихся тел с массой равной  $4m_1$ ;  $k_{5m}$  – количество образовавшихся тел с массой равной  $5m_1$ . Остальные обозначения см. на рис. 3 и рис. 4.

После 81.5 обращений тел первого слоя, то есть при  $T = 0.815$ , вид структуры представлен на рис. 7б. К моменту  $T = 0.1$  еще сохраняются элементы первоначальной организации структуры, а моменту  $T = 0.2$  они полностью исчезают. К моменту  $T = 0.4$  структура приобретает вид, который дальше практически не изменяется. Разброс расстояний тел на рис. 7в ограничен  $40a_1$ . Около 30 тел выброшено на большее расстояние, наибольшее из которых равно  $r_{r1} = 600$  для тела 1575.

К моменту  $T = 0.815$  было 306 столкновений, одно из которых с центральным телом. При этом образовалось 202 тела двойной массы, 34 тела тройной, 9 – четверной и 2 тела с массой  $5m_1$ . Динамика столкновений представлена на рис. 7г. До  $T = 0.061$  столкновений не было. Затем начались частые столкновения, скорость количества которых также рассмотрим на двух участках. На первом интервале  $\Delta T = 0.0688 \div 0.142$  скорость количества столкновений  $v_{imp} = 2158$  соударений на 100 обращений тел первого слоя, а на втором участке  $\Delta T = 0.339 \div 0.815$  средняя скорость была  $v_{imp} = 69.3$ . При этом на данном участке наблюдается тенденция дальнейшего снижения скорости, возможно, в бесконечности – до нуля. В этой структуре скорость на втором участке по сравнению с первым участком уменьшилась в 31 раз. При этом скорость, приходящаяся на одно тело  $v_{imp1} = 1.27 \cdot 10^{-2}$ , что в 2.4 раза больше, чем у пятислойной структуры.

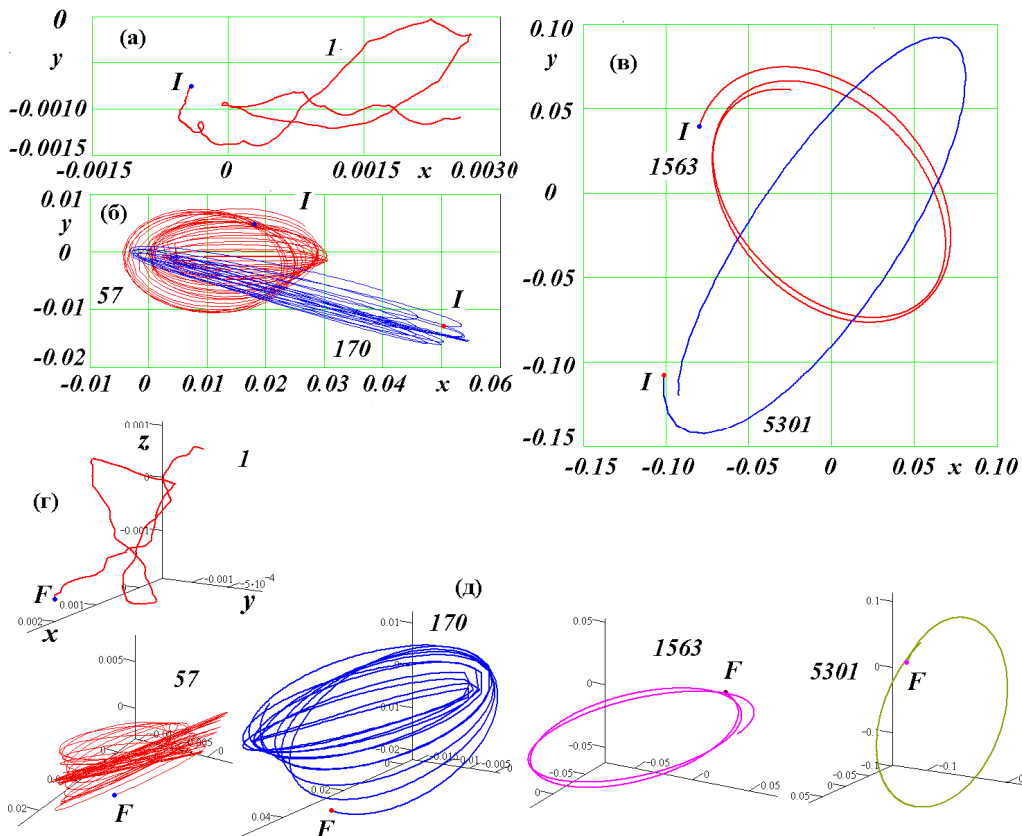
## 6.2. Траектории отдельных тел

На рис. 8 представлены траектории центрального тела 1, тела первого слоя 57, тела второго слоя 170, тела 6-того слоя 1563 и тела десятого слоя 5301. Эти расчеты выполнялись на интервале  $T = 0.663 \div 1.021$  с шагом  $dT = 1 \cdot 10^{-7}$ . Траектория центрального тела 1 вокруг центра масс является нерегулярной (рис. 8а). Ее

трехмерный вид представлен на рис. 8г. Тело 1 не удаляется от центра масс на расстояние больше 0.003, что составляет 0.23 радиуса внутреннего слоя.

Орбита тела 57 (рис. 8б) непрерывно поворачивается в пространстве (рис. 8д). Период обращения тела 57 колеблется в небольших пределах относительно периода  $1.34 P_1$ , где  $P_1$  – исходный период. Полуось орбиты так же, колеблется вокруг значения 0.015. Эксцентриситет орбиты достигает значения 0.7.

Орбита тела 170 является эллипсом с большим эксцентриситетом, достигающим величины 0.9 (рис. 8б). Она также изменяется в пространстве (рис. 8д). Период орбиты колеблется вблизи значения  $1.16P_2$ , где  $P_2 = 0.028$  – исходный период.



**Рис. 8.** Траектории центрального тела 1 и периферийных тел 57, 170, 1563 и 5301 в конечный период ( $T = 0.663 \div 1.021$ ) эволюции структуры MS10c99b.dat (а, б, в): на виде г и д – трехмерные изображения траекторий; I и F – начальная и конечная точки траекторий.

Следует отметить, что в перицентрах орбит на рис. 8б и рис. 8д имеются участки траекторий с прямыми отрезками. Это обусловлено тем, что за интервалы выдачи координат траектории (при параметре системы Galactica  $Kli = 2000$ ) орбиты более существенно изменяются, чем на других участках.

Траектория тела 1563 является почти окружностью, её эксцентриситет  $e = 0.01$  (рис. 8в). Она незначительно изменяется в пространстве (рис.8д). Период орбиты  $1.2P_6$ , где  $P_6 = 0.134$ . Полуось орбиты также мало изменялась по сравнению с исходной и равняется  $1.06a_6$ .

Траектория тела 5301 является эллипсом с эксцентриситетом  $e = 0.23$  (рис. 8в). Её плоскость почти перпендикулярна к плоскости  $xu$  (рис. 8д). Поэтому на плоскости  $xu$

она изображается в виде сплющенного эллипса (рис. 8в).

Как уже отмечалось, расстояния  $r_{r1}$  около 30 тел были вне пределов графика на рис. 7в. Для части этих тел по алгоритму (29) - (36) были определены виды траекторий и их параметры. Наиболее удаленное тело 1575 в момент  $T = 0.815$  имело расстояние  $r = 7.076$  и скорость  $v = 9.735$ . Расчеты по алгоритму (29) – (36) дали следующие результаты:  $R_p = 0.0560$ ,  $v_p = 11.41$ ;  $\alpha_1 = -0.1371$ ;  $e = 6.293$ ;  $v_{\infty} = 9.720$ . То есть тело по гиперболической орбите было выброшено из структуры. Его скорость в этот момент уже приближается к скорости на бесконечности.

Для тела 1575 расчеты были повторены для момента  $T = 0.385$ , когда расстояние и скорость были:  $r = 2.883$ ;  $v = 9.766$ . Параметры гиперболической траектории подтвердились до 7 знака. Эти расчеты были также выполнены для момента  $T = 0.1035$ , когда параметры тела были  $r = 0.1907$  и  $v = 10.450$ . Параметры гиперболической орбиты подтвердились с точностью до 4-х знаков. В этот момент расстояние  $r$  находится вблизи радиуса наружного слоя. Отсюда следует, что алгоритм (29) – (36) можно использовать для определения траектории всех тел, которые находятся вне основного их скопления.

Эти исследования были проведены для всех удаленных тел. Было установлено, что из структуры выбрасывается 14 тел с массой  $m_1$  и 3 тела с массой  $2m_1$ . Два тела имеют сильно вытянутые эллиптические орбиты, радиусы апоцентров  $R_a$  которых равны: 0.5646 для тела 4601 и 3.024 для тела 3032.

### 6.3. Сближение, столкновение и слияние тел

Как уже отмечалось, в этой структуре имеется 2 тела массой  $5m_1$ . На рис. 9 представлены сближения одного из таких тел, а именно тела 1951 на интервале  $0.069 < T < 0.075$ . Расчеты выполнялись в режиме коррекции шага с ключом K14 = 3 и ключом выдачи результатов K13 = 300 шагов. С момента  $T = 0.069$  происходит сближение тела 1951 с телом 1952 и в момент  $T = 7.065 \cdot 10^{-2}$  они сливаются. Затем начинается сближение с телом 1950 и в момент  $T = 7.153 \cdot 10^{-2}$  они сливаются. Далее тело 1951 сближается с телом 1953 и в момент  $T = 7.172 \cdot 10^{-2}$  они сливаются. Затем начинается сближение с телом 1954 и в момент  $T = 7.321 \cdot 10^{-2}$  они сливаются.

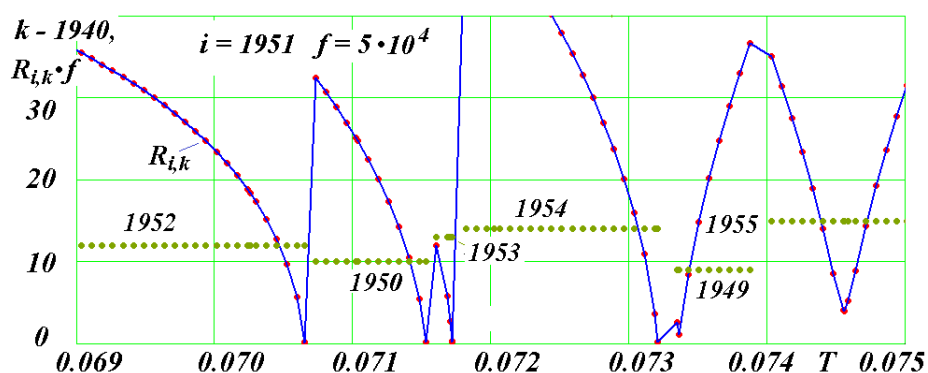


Рис. 9. График сближения тела  $i = 1951$  с телами  $k$  на расстояние  $R_{i,k}$  за количество шагов интегрирования  $K13 = 300$  с шагом  $dT = 0.5 \cdot 10^{-6}$  на начальном интервале  $T = 0.0690 \div 0.0750$ .

Безразмерное расстояние  $R_{i,k}$  на графике увеличено в  $f = 5 \cdot 10^4$  раз, а количество тел  $k$  уменьшено на 1940.

В результате этих 4-х слияний масса 1951 стала равной  $5m_1$ . Далее тело 1951 в момент  $T = 7.321 \cdot 10^{-2}$  сближается с телом 1949 на расстояние 14 радиусов периферийного тела  $R_1 = 1.676 \cdot 10^{-6}$ , и они расходятся. Затем еще имеется сближение в момент  $T = 7.456 \cdot 10^{-2}$  с телом 1955 на расстояние  $48R_1$ .

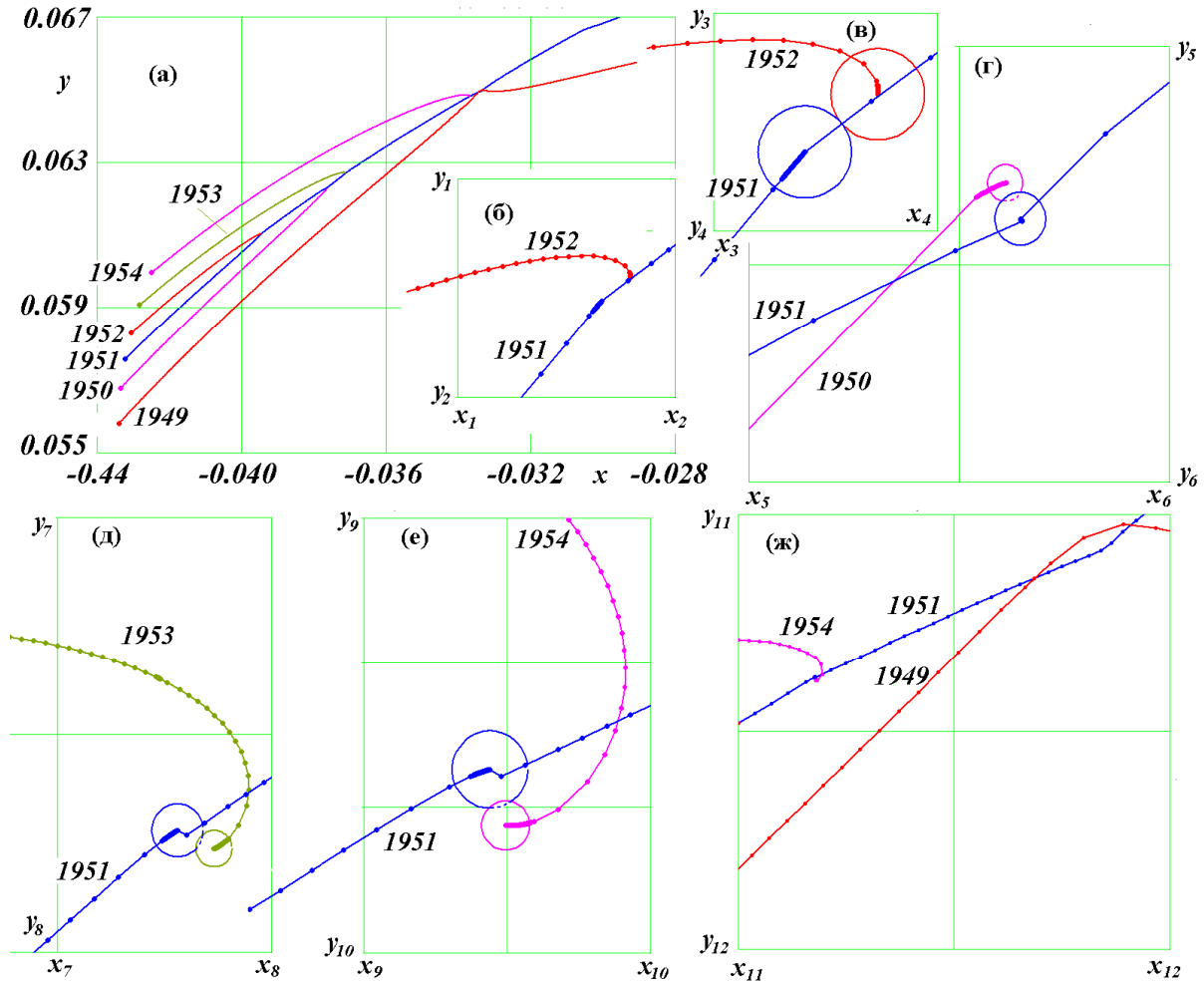


Рис. 10. Траектории при сближении и столкновении тела 1951 с телами 1949, 1950, 1952, 1953 и 1954.

Таблица 1. Значения пределов графиков на видах б, в, г, д, е, ж рис. 10

	б	в	г	д	е	ж					
$y_1$	0.06106	$y_3$	0.061054	$y_5$	0.06236	$y_7$	0.06274	$y_9$	0.06483	$y_{11}$	0.0650
$y_2$	0.06104	$y_4$	0.061046	$y_6$	0.06232	$y_8$	0.06270	$y_{10}$	0.066480	$y_{12}$	0.0645
$x_1$	-0.03948	$x_3$	-0.039470	$x_5$	-0.03762	$x_7$	-0.03715	$x_9$	-0.03372	$x_{11}$	-0.0338
$x_2$	-0.03946	$x_4$	-0.039462	$x_6$	-0.03758	$x_8$	-0.03713	$x_{10}$	-0.03370	$x_{12}$	-0.0333

На рис. 10а представлены траектории всех сближающихся и сталкивающихся тел с телом 1951. Эти расчеты выполнены в режиме  $K_{l4} = 3$  с начальным шагом  $dT = 0.5 \cdot 10^{-6}$  и с интервалом шагов выдачи  $K_{li} = 300$ . Первое сближение тела 1951 происходит с телом 1952. На участке сближения (рис. 10б) расчеты были выполнены с интервалом шагов выдачи  $K_{li} = 3$ . Тело 1952 движется впереди тела 1951 и при

приближении последнего начинает огибать его. В более крупном масштабе (рис. 10в) окружностями нанесены диаметры тел. Тела находятся практически на одном расстоянии от плоскости  $xу$ . Их слияние происходит при соприкосновении их поверхностей. Сгущение точек на траектории свидетельствует о включении режима коррекции шага перед столкновением тел. Длина участка сгущения пропорциональна скорости. Видно, что скорость тела 1951 больше скорости тела 1952. Это различие может быть обусловлено взаимодействием этих тел. В данном случае тело 1951 ускоряется, а тело 1952 – замедляется.

Следует отметить, что все изображения на графиках выполнены в масштабе, а значения пределов  $y_1, y_2, x_1, x_2$  и т.д. представлены в Табл. 1 подрисуночной подписи.

Второе сближение тела 1951 происходит с телом 1950 (рис. 10а). На рис. 10г видно, что тело 1950 догоняет тело 1951, пересекает его траекторию, и за счет притяжения этого тела происходит искривление траектории тела 1950. Их слияние происходит в момент соприкосновения. В данном случае координата  $z$  тела 1951 больше, поэтому соприкосновение происходит ниже видимого контура тела 1951. В результате слияния с телом 1952 радиус тела 1951 увеличивается до  $1.26R_1$ . По длине участка со сгущенными точками тела 1950 видно, что скорость его меньше, чем тела 1951. В результате взаимодействия оно замедлялось, а тело 1951 – ускорялось.

Третье сближение тела 1951 происходит с телом 1953 (рис. 10а). На рис. 10д видно, что тело 1953 опережало тело 1951. Поэтому оно огибает его и сталкивается с ним на стороне, противоположной от стороны приближения. В этом случае радиус тела 1951 уже был  $1.44R_1$ .

Четвертое сближение с телом 1954, как видно из рис. 10е, происходит аналогично, только огибающее движение тела 1954 больше чем тела 1953. Это обусловлено большей массой тела 1951. Она равняется  $4m_1$ , а радиус тела равен  $1.59R_1$ . А после слияния тела 1951 с телом 1954 его масса стала  $5m_1$ , а радиус –  $1.71R_1$ . В этих двух случаях (рис. 10д и рис. 10е) тело 1951 находится ближе к плоскости  $xу$ , поэтому оно частично затеняется сталкивающимся телом.

В рассмотренных 4-х столкновениях три тела приближаются с левой стороны, а сталкиваются с правой стороны (рис. 10в, г, е). А тело, приближающееся с правой стороны, сталкивается с левой стороны (рис 10г). При этом, чем больше масса тела 1951, тем на больший угол огибает его приближающееся тело.

Сближение тела 1949 с телом 1951 показано на рис. 10ж. Эти вычисления выполнены с интервалом выдачи  $Kli = 30$ . Как уже отмечалось, в этом случае тело 1949 приблизилось на расстояние  $14R_1$ . В момент сближения его скорость почти в 3 раза больше скорости тела 1951. Поэтому оно догнало тело 1951 с дальнейшим увеличением скорости и почти на  $90^\circ$  обогнуло его. После сближения скорость тела 1949 начала уменьшаться.

Несмотря на эти столкновения, тело 1951 продолжало совершать движение внутри структуры. К концу исследованного времени  $T = 0.815$  его удаление от центра масс было  $r_{r1} = 7.17$ . Тело 1949 также находилось внутри структуры с расстоянием  $r_{r1} = 4.28$ .

### 6.4. Спин и тепловая энергия тела после столкновения

При столкновении тел образовавшееся из них тело приобретает собственный момент количества движения, который назовем спином  $S_p$ , и тепловую энергию  $E_t$ . Алгоритм их расчета приведен в [2], а его программная реализация – в [10]. На рис. 11а представлены изменения проекции спина  $S_{px}$ ,  $S_{py}$ ,  $S_{pz}$  и тепловой энергией  $E_t$  тела 1951 при его столкновении с четырьмя телами. В результате каждого столкновения происходит изменения этих величин. Наименьшее изменение спинов происходит при первом соударении (точка  $2m_1$ ) с телом 1952 (рис. 10 в). Это столкновение близко к лобовому удару. Как видно из рис. 11а, тепловая энергия  $E_t$  в этом случае изменяется существенно. При втором столкновении (точка  $3m_1$ ) с телом 1950 проекция спина  $S_p$  увеличилась более существенно, а тепловая энергия  $E_t$  изменяется в три раза меньше чем при первом столкновении. Как видно из рис.10г, это столкновение происходило по касательной. Остальные столкновения с телами 1953 и 1954 также происходили по направлениям близким к касательным. Но тело 1951 становилось массивней, и скорость приближающихся тел увеличивалась. Поэтому приращение спинов и тепловой энергии были существенны. В итоге, тело 1951 приобрело тепловую энергию  $E_t = 2.87 \cdot 10^{-3}$  и модуль спина  $S_p = 6.385 \cdot 10^{-9}$ . Вектор спина составляет угол  $\beta_2 = -23.8^\circ$  с осью  $z$ . Так как угол отрицательный, то тело 1951 вращается по часовой стрелке.

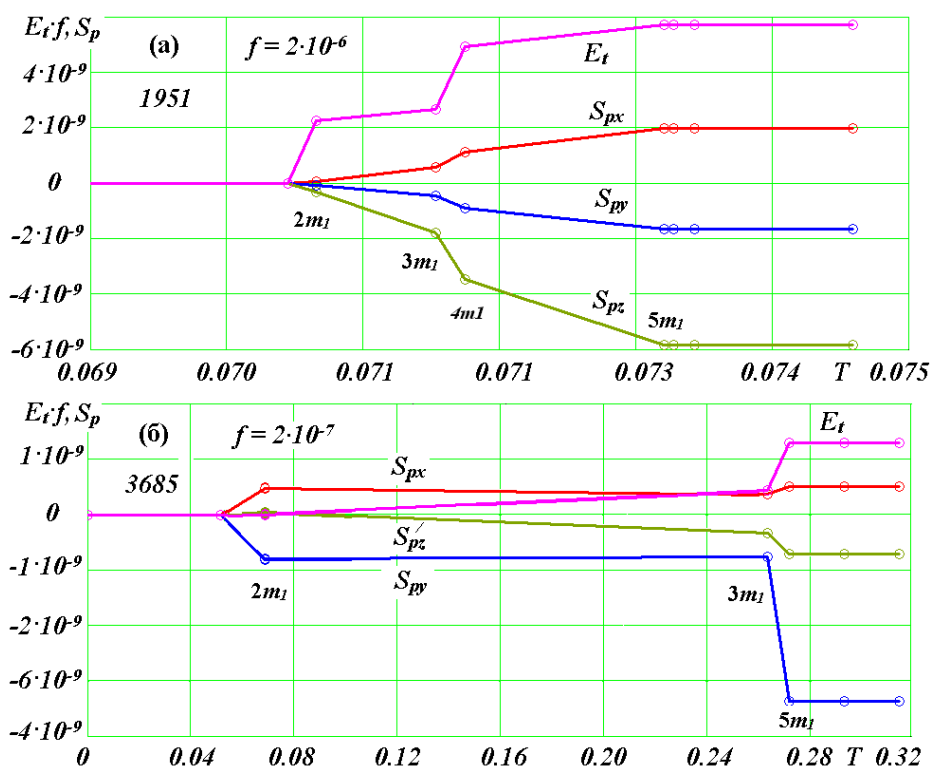


Рис. 11. Изменение тепловой энергией  $E_t$  и проекций спина  $S_{px}$ ,  $S_{py}$ ,  $S_{pz}$  при слиянии тела 1951 (а) и тела 3685 (б). Величина  $E_t$  умножена на коэффициент:  $f = 2 \cdot 10^{-6}$  (а) и  $f = 2 \cdot 10^{-7}$  (б).

Для сравнения на рис. 11б приведены вращательные и тепловые характеристики тела 3685, также имеющего массу  $5m_1$ . При первом столкновении в точке  $2m_1$  оно приобрело небольшую тепловую энергию  $E_t$ . При втором столкновении ( $3m_1$ ) проекции

спинов  $S_{px}$  и  $S_{py}$  немного уменьшились, а тепловая энергия  $E_t$  существенно возросла. Третье столкновение в т.  $5t_1$  произошло с телом двойной массы. В этом случае преобладает проекция спина  $S_{py}$ . Величина спина  $S_p = 3.48 \cdot 10^{-9}$ , а его вектор составляет с осью  $z$  угол  $\beta_2 = -78.1^\circ$ , т.е. ось вращения тела 3685 находится близко от плоскости  $xy$ . Его тепловая энергия  $E_t = 6.45 \cdot 10^{-3}$ . Таким образом, при одинаковых массах этих тел тело 1951 имеет в 1.8 раза больший спин и в 2.2 раза меньшую тепловую энергию.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан метод построения моделей шаровых звездных скоплений в виде многослойных сферических структур. При этом центральное тело структуры и окружающий его слой принимается за новое центральное тело, вокруг которого располагаются следующий слой.

В результате взаимодействия звезд происходит их столкновение и укрупнение, а некоторые звезды выбрасываются из структуры. На первом этапе скорость количества столкновений держится на некотором уровне, затем она снижается в несколько раз, иногда в несколько десятков раз, и наступает этап установившейся динамики скопления. Звезды движутся по квазиэллиптическим орбитам вокруг центра масс скопления. Периоды обращения звезд на орбитах растут с увеличением размеров орбит. При близких прохождениях звезд орбиты изменяются и изменяется их положение в пространстве. Иногда звезды сталкиваются между собой или с центральным телом. Отдельные звезды при очень близких прохождениях у других звезд могут приобрести большую скорость и покинуть скопление.

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Исследования эволюции многослойных структур выполнялись на суперкомпьютерах ЦКП Сибирский Суперкомпьютерный Центр ИВМиМГ СО РАН, г. Новосибирск.

Настоящая работа выполнялась в рамках темы 121041600047-2.

---

### ЛИТЕРАТУРА

1. Локтин А.В., Марсаков В.А. Лекции по звёздной астрономии. Учебно-научная монография. Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет. 2009. 280 с.
2. Смутьский И.И. Теория взаимодействия. Новосибирск: Из-во Новосиб. ун-та, НИЦ ОИГМ СО РАН, 1999 г. – 294 с. – [http://www.ikz.ru/~smulski/TVfulA5\\_2.pdf](http://www.ikz.ru/~smulski/TVfulA5_2.pdf).
3. Смутьский И.И. Осесимметричная задача гравитационного взаимодействия N-тел // Математическое моделирование. – 2003. – № 5. – т. 15. – С. 27-36. – <http://www.smul1.newmail.ru/Russian1/IntSunSyst/Osvnb4.doc>.
4. Смутьский И.И. Сферически распределенные структуры. Институт криосферы Земли СО РАН. – Тюмень, 2016. – 43 с. – Рус. Деп. в ВИНТИ 22.08.2016. – № 112-B2016. – <http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/SphDsSt2.pdf>.
5. Смутьский И.И. Периодические орбиты N тел на сфере // Космические исследования. – 2020. – № 1. – т. 58. – С. 49-60. – DOI: 10.31857/S0023420620010070. <http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/PrdOrNBS3f.pdf>.
6. Смутьский И.И., Кротов О.И. Изменение кинетического момента в динамике Солнечной системы // Космические исследования. – 2015. – № 3. – т. 53.т – С. 253-262. – DOI: 10.7868/S0023420615020090. [http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/IzmMom5\\_1J.pdf](http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/IzmMom5_1J.pdf).

7. Brent Tully R., Rizzi L., Dolphin A.E., Karachentsev I.D., Karachentseva V.E., Makarov D.I., Makarova L., Sakai S., and Shaya E.J. Associations of Dwarf Galaxies // *The Astronomical Journal*. – 2006. – No. 2. – Vol. 132. – P. 729-748.
8. Smulsky J.J. Galactica Software for Solving Gravitational Interaction Problems // *Applied Physics Research*, 2012, Vol. 4, No. 2, pp. 110-123. <http://dx.doi.org/10.5539/apr.v4n2p110>.
9. Smulsky J.J. The System of Free Access Galactica to Compute Interactions of N-Bodies // *I. J. Modern Education and Computer Science*. – 2012. – No. 11. – P. 1-20. – DOI: 10.5815/ijmecs.2012.11.01. <http://www.mecs-press.org/>.
10. Smulsky J.J. *Future Space Problems and Their Solutions*. Nova Science Publishers, New York, 2018. – 269 p. – ISBN: 978-1-53613-739-2. <http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/InfFSPS.pdf>.
11. Smulsky J.J. Angular Momentum due to Solar System Interactions. In: Gordon O. (Editor) *A Comprehensive Guide to Angular Momentum*. Nova Science Publishers. – New York, 2019. – P. 1-40. – ISBN: 978-1-53615-707-9. [http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/CGAngMom1\\_2Cv.pdf](http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/CGAngMom1_2Cv.pdf).
12. Talpur J. *A Guide to Globular Clusters*. Keele University, 1997. – P. 18. – <https://www.astro.keele.ac.uk/workx/globulars/globulars.html>.
13. Globular cluster. – URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Globular\\_cluster](https://en.wikipedia.org/wiki/Globular_cluster).

## MULTILAYER MODELS OF GLOBULAR STAR CLUSTERS. Part 1

**Smulsky J.J.** (Dr. Sci. (Physics and Mathematics), prof.)

Institute of Earth's Cryosphere, Tyumen, *Russian Federation*; [jmulsky@mail.ru](mailto:jmulsky@mail.ru)

**Abstract.** Spherical single-layer structures are used to create multilayer models of globular star clusters. An algorithm for their construction is presented and a program for their developing is described. As a result of solving the problem of gravitational interaction of  $N$  bodies, the evolution of 5- and 10-layer structures is studied. In the process of interaction of bodies, there is a transition from an initially organized structure to a uniformly distributed in space structure. The number of bodies' collisions decreases and the globular cluster model passes into a steady-state form of existence. The trajectories of individual bodies are presented. The circumstances of the approaching bodies are being investigated. Processes at collision of bodies and acquisition of rotational motion and thermal energy by them are considered.

**Key words:**  $N$ -body problem, solution, globular star clusters, properties

## REFERENCES

1. Loktin A.V., Marsakov V. A. *Lekcii po zvezdnoj astronomii. Uchebno-nauchnaja monografija* [Lectures on stellar astronomy. Educational and scientific monograph]. – Rostov-na-Donu: Juzhnyj federal'nyj universitet, 2009. 280 p.
2. Smul'skij I.I. *Teorija vzaimodejstvija* [The theory of interaction]. – Novosibirsk: Iz-vo Novosib. un-ta, NIC OIGGM SO RAN, 1999. 294 p. URL: [http://www.ikz.ru/~smulski/TVfulA5\\_2.pdf](http://www.ikz.ru/~smulski/TVfulA5_2.pdf).
3. Smul'skij I.I. *Osesimmetrichnaja zadacha gravitacionnogo vzaimodejstvija N-tel* [The axisymmetric problem of gravitational interaction of  $N$ -bodies] // *Matematicheskoe modelirovanie* [*Math Modeling*] – 2003. – Vol. 15. 5. – P. 27-36. URL: <http://www.smull.newmail.ru/Russian1/IntSunSyst/Osvnb4.doc>.
4. Smul'skij I.I. *Sfericheski raspredelemnnye struktury* [Distributed structures on the sphere]. – Tjumen': Institut kriofery Zemli SO RAN. Dep. v VINITI, No. 112-V2016. 2016. – 43 p. URL: <http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/SphDsSt2.pdf>.



5. Smulsky J.J. Periodic Orbits of N Bodies on a Sphere // Cosmic Research. – 2019. – Vol. 57, No. 6. – P. 459-470. DOI: 10.1134/S001095251906008X. URL: <http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/PrdOrNBS3Ej.pdf>.
6. Smul'skii I.I. and Krotov O.I. Change of Angular Momentum in the Dynamics of the Solar System // Cosmic Research. – 2015. – Vol. 53, No. 3. – P. 237-245. URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S0010952515020094>.
7. Brent Tully R., Rizzi L., Dolphin A.E., Karachentsev I.D., Karachentseva V.E., Makarov D.I., Makarova L., Sakai S., and Shaya E.J. Associations of Dwarf Galaxies // The Astronomical Journal. – 2006. Vol. 132, No. 2. – P. 729-748.
8. Smulsky J.J. Galactica Software for Solving Gravitational Interaction Problems // Applied Physics Research. – 2012. – Vol. 4, No. 2. – P. 110-123. URL: <http://dx.doi.org/10.5539/apr.v4n2p110>.
9. Smulsky J.J. The System of Free Access Galactica to Compute Interactions of N-Bodies // I. J. Modern Education and Computer Science. – 2012, 11. – P. 1-20. DOI: 10.5815/ijmecs.2012.11.01. URL: <http://www.mecs-press.org/>.
10. Smulsky J.J. Future Space Problems and Their Solutions. Nova Science Publishers, New York, 2018, 269 p. ISBN: 978-1-53613-739-2. URL: <http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/InffSPS.pdf>.
11. Smulsky J.J. Angular Momentum due to Solar System Interactions. In: Gordon O. (Editor) / In: A Comprehensive Guide to Angular Momentum. – New York: Nova Science Publishers, 2019, p. 1-40. ISBN: 978-1-53615-707-9. URL: [http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/CGAngMom1\\_2Cv.pdf](http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/CGAngMom1_2Cv.pdf).
12. Talpur J.A. Guide to Globular Clusters. Keele University. – 1997. 18 p. URL: <https://www.astro.keele.ac.uk/workx/globulars/globulars.html>.
3. Globular cluster. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Globular\\_cluster](https://en.wikipedia.org/wiki/Globular_cluster).