

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ КРИОСФЕРЫ ЗЕМЛИ

УДК 521.1 + 529

И.И. Смутьский

ФЕНОМЕНЫ СОЛНЦА В ИСТОРИЧЕСКОЙ ПЕРСПЕКТИВЕ

Тюмень 2016

1

Организация-депонент: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт криосферы Земли» Сибирского отделения Российской академии наук, г. Тюмень

Название работы: Феномены Солнца в исторической перспективе

Автор: Смутьский И.И., (13.04.1944), ФГБОУН «Институт криосферы Земли», г. Тюмень, Российская Федерация

Реферат: В работе рассмотрена теория явлений, связанных с прохождением Солнца на небе при изменении параметров орбитальном и вращательном движении Земли. Автором установлено, что изменение угла наклона экватора к эклиптике происходят от 14.8° до 32.1° . Эти результаты объясняют колебания палеоклимата, а также согласуются с рядом свидетельств палеоастрономии. Для расчета длительности солнечных суток, уравнения времени, долготы светового дня, азимутов суточного движения Солнца, его восходов и заходов, длины и азимута тени гномона, длительности полярных дней и ночей, сезонов года и других явлений разработана программа в среде MathCad. С ее помощью выполнены расчеты феноменов Солнца в современную эпоху и в 4 экстремальных эпохи на интервале 50 тыс. лет назад. Работа представляет интерес для широкого круга специалистов в области наук о Земле и может использоваться студентами при выполнении курсовых и дипломных работ.

Ключевые слова: изменение параметров, орбита, ось Земли, долгота дня, полярная ночь, гномон.

Язык: рус.

Страниц: 66

Ил.: да

Библ.: 24

Title: The Phenomena of the Sun in the Historical Perspective

Authors: Smulsky J.J., Institute of Earth's Cryosphere (IEC), Tyumen, Russian Federation

Abstract:

The paper considers the theory of the phenomena associated with the Sun's passage in the sky when the parameters of the orbital and rotational motion of the Earth are changing. The author found that the obliquity changes from 14.8° to 32.1° . These results explain the variations of paleoclimate and are consistent with several testimonies of paleoastronomy. The program developed in MathCad to calculate the duration of solar day, equation of time, daylight, azimuths of the daily movement of the Sun, sunrises and sunsets, the length and azimuth of the gnomon shadow, duration of the polar days and nights, of seasons and other phenomena. The phenomena of the Sun in the contemporary epoch and in 4 extreme epochs in the interval of 50 thousand years ago are calculated. The work is of interest to a wide range of specialists in the field of Earth Sciences and can be used by students when doing term papers and dissertations.

Key Words: Changing parameters, orbit, the Earth's axis, duration, day, polar night, gnomon

1. Введение

Новые решения задачи об эволюции вращательного движения Земли [1] - [2] показали, что ось вращения Земли совершает значительные колебания [3] - [4]. На рис. 1 линией 1 показано, что новые изменения угла наклона ε (угол между плоскостями экватора Земли и ее орбиты) происходят от 14.8° до 32.1° при современном его значении 23.4° . В то же время по прежним теориям, например [5] (см. рис. 1, линия 2) угол ε изменялся от 22.21° до 24.43° . На рис. 1 показана эволюция угла наклона ε за прошедшие 200 тыс. лет. Примерно такой же диапазон изменения ε получен при решении задачи за будущие 200 тыс. лет [3]. Из приведенных значений видно, что диапазон колебания угла наклона по новым решениям в 7-8 раз больше, чем по прежним теориям.

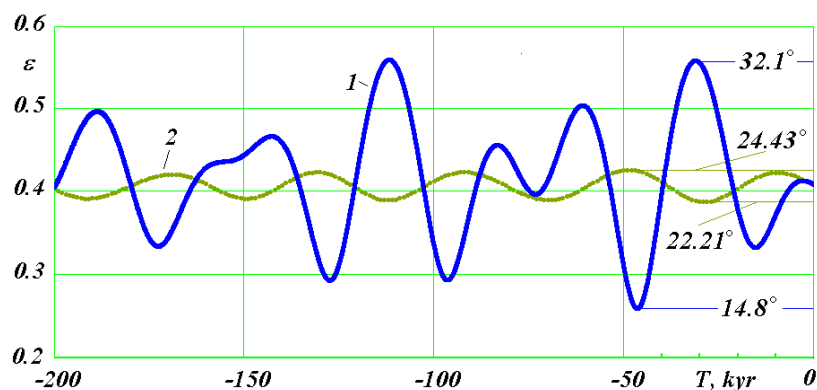


Рис. 1. Эволюция угла наклона ε (в радианах) экватора Земли к плоскости ее орбиты за 200 тыс. лет в прошлое. Сравнение новых результатов 1 с результатами прежних теорий 2 на примере работы Дж. Ляскара и др. [5]. В градусах приведены максимальные и минимальные значения угла ε .

Эти результаты на протяжении нескольких лет проверялись. Задача была решена еще тремя другими методами [4]. Результаты не изменились. Кроме того, полученные в этой задаче изменения параметров вращательного движения Земли на интервале нескольких тысяч лет, для которых имеются наблюдения, совпали с данными наблюдений.

Как видно из рис. 1, новые решения 1 отличаются от прежних 2 не только амплитудами колебания, но и моментами наступления экстремумов. Эти отличия в эволюции угла наклона ε приводят к таким же существенным отличиям в эволюции инсоляции Земли [3] – [4]. При сопоставлении нового изменения инсоляции за прошедшие 50 тыс. лет с палеоклиматом было установлено [6], что оно объясняет все известные его колебания: суровый ледниковый период 46 тыс. лет назад, сильное потепления 31 тыс. лет назад, последний ледниковый период 16 тыс. лет назад и небольшое потепления 4 тыс. лет назад.

Существуют свидетельства, что угол наклона ε изменялся более существенно, чем это следует из прежних теорий. Например, М. И. Исрапилов [7] исследовал сотни древних календарей в Дагестане. Он пришел к выводу, что угол наклона ε изменялся от $19-20^\circ$ до $32-33^\circ$. Возраст датировки календарей у него доходит до 65 тыс. лет. Б. Г. Тилак [8] исследовал тексты Вед, Бхагавад-Гиты, Авесты и др. древних источников. В них используются характеристики полярной области, как будто древние арии обитали в ней. Это можно объяснить только большими углами наклона ε . В этом случае полярный круг проходит южнее современного и, дополнительно, на этих широтах становится теплее. Тем самым создаются необходимые для жизни человека условия в полярной области.

Ряд календарей в Дагестане М. И. Исрапилов [7] называет обсерваториями, т.к. они позволяли определять моменты наступления лунных и солнечных затмений. Таких обсерваторий найдено достаточно много, в том числе Стоунхендж в Англии [9] и Ales Stones на юге Швеции [10]. Многие из них, в том числе последние, ориентированы по азимуту восхода Солнца в дни летнего и зимнего солнцестояния. Такие обсерватории и календари называют азимутальными. В зенитных обсерваториях и календарях [7] объекты ориентированы так, чтобы можно было фиксировать зенитные углы солнцестояний, равноденствий и других моментов, важных для хозяйственной деятельности человека. В календарях третьего вида, которые были распространены на Алтае и в Сибири [11], календари выполнялись в виде жезлов, пластин, фигур животных и даже женских украшений. На них насечками или другим способом отмечены дни года и моменты наступления различных феноменов Луны и Солнца. По этим календарям можно определить продолжительность интервалов между днями равноденствий и солнцестояний, а также временные характеристики других астрономических явлений.

Характеристики календарей зависят от параметров орбитального и вращательного движения Земли, а также от широты места нахождения календаря. Однако зависимость эта сложна и не очевидна. Для понимания механизма функционирования календаря и его расшифровки необходимо использовать теорию солнечных явлений. Имеющееся в астрономии описание этих феноменов достаточно сложное. Оно не позволяет исследователям древних календарей оперативно рассчитывать условия применительно к рассматриваемому календарю и подбирать различные варианты параметров, от которых зависят зафиксированные календарем явления.

Целью настоящей работы является создание такой теории. В отличие от существующей таковой в астрономии, в ней используется другой алгоритм определения долгот Солнца при его годовом движении. Кроме того, все математические операции

алгоритмизированы и представлены в виде программы SunPhnmen.mcd в среде MathCad. Для ориентировки исследователей древних календарей рассчитаны солнечные феномены при современных и при отличающихся от современных параметрах орбитального и вращательного движения Земли. Они взяты для четырех экстремумов ε за последние 50 тыс. лет (см. рис. 1): $T = 2.8; 15.32; 31$ и 46.44 тыс. лет назад.

2. Геометрические характеристики движения Солнца по небосводу

2.1. Движение Солнца в течение года

Рассмотрим положение Солнца S над точкой M земной поверхности (рис. 2). Плоскость горизонта в т. M на небесной сфере I нанесена горизонтальным кругом NN' . Перпендикуляр к плоскости NN' пересекает поверхность небесной сферы I в точке зенита Z . Солнце S совершает вокруг Земли годовое движение по орбите, которая проектируется на небесную сферу в виде круга эклиптики EE' . Движение происходит против стрелки часов с началом отсчета долготы λ Солнца в точке весеннего равноденствия γ . В этой точке Солнце находится в плоскости экватора AA' , когда из южного полушария переходит в северное.

Видимое орбитальное движение Солнца вокруг Земли обусловлено неравномерным движением Земли вокруг Солнца по орбите, которая является эллипсом. Относительно неподвижных звезд период движения по орбите $P_{sd} = 365.25636042$ дней. Он называется сидерическим годом. В работах [12]-[13] представлен алгоритм расчета долгот Солнца λ_{jl} , где $jl = 1, 2, \dots, 365$, по дням года $T_{d,jl} = 1, 2, \dots, 365$. Отсчет дней начинается от момента весеннего равноденствия, т.е. $jl = 0$ соответствует моменту равноденствия. Этот алгоритм основан на точном решении задачи двух тел [14]- [15]. Задача движения Земли относительно Солнца рассматривается в полярной системе координат (r, φ_o) , где r – расстояние Земли от Солнца, а φ_o – угловое положение Земли на орбите относительно перигелия орбиты. Время t_{fp} движения Земли по орбите от точки перигелия до точки ее нахождения с углом φ_o рассчитывается по формуле

$$t_{fp} = t'_{fp} \text{ при } \varphi_o \leq \pi \text{ и } t_{fp} = 2 \cdot t_a - t'_{fp} \text{ при } \pi < \varphi_o \leq 2 \cdot \pi, \quad (1)$$

где

$$t'_{fp} = \frac{R_p}{v_p} \cdot \left\{ \frac{(\alpha_1 + 1) |\sin \varphi_o|}{(2\alpha_1 + 1)[(\alpha_1 + 1) \cos \varphi_o - \alpha_1]} + \frac{\alpha_1 [\arcsin \frac{\alpha_1 + 1 - \alpha_1 \cos \varphi_o}{(\alpha_1 + 1) \cos \varphi_o - \alpha_1} - \pi / 2]}{(-2\alpha_1 - 1)^{3/2}} \right\}, \quad (2)$$

R_p – радиус перигелия;

v_p – скорость Земли в перигелии.

$\alpha_1 = \mu_1 / (R_p v_p^2)$ – параметр траектории;

$\mu_1 = -G(M+m)$ – параметр взаимодействия; l

G – гравитационная постоянная;

M – масса Солнца;

m – масса Земли;

$t_a = \frac{R_p}{v_p} \cdot \frac{-\pi\alpha_1}{(-2\alpha_1 - 1)^{3/2}}$ – время движения от перигелия до афелия, которое следует из

(2) при $\varphi_0 = \pi$. Здесь используется параметр траектории α_1 , так как он известен при постановке задачи, а эксцентриситет орбиты e определяется в результате решения задачи двух тел. Для гравитационного взаимодействия эти параметры однозначно связаны: $e = -(1 + \alpha_1)/\alpha_1$.

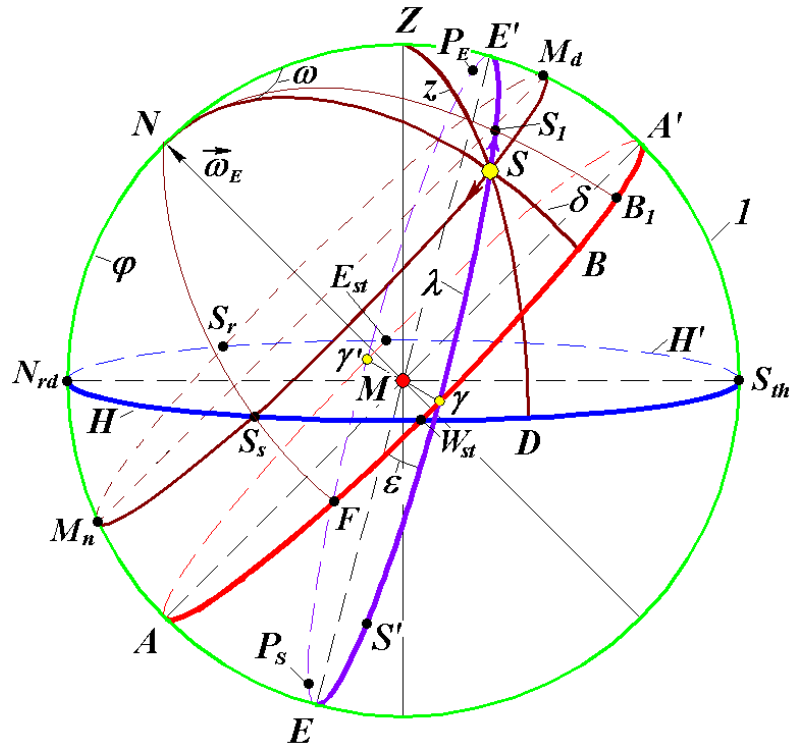


Рис. 2. Основные геометрические характеристики Солнца S и наблюдателя M на земной поверхности. **Характеристики небесной сферы 1:** AA' - плоскость подвижного экватора; EE' - плоскость подвижной эклиптики, а ε - угол между плоскостями AA' и EE' ; N - северный полюс; **Характеристики плоскости горизонта HH' :** дуга $N_{rd}N = \varphi$ - географическая широта точки M на плоскости горизонта; Z - зенит точки M ; N_{rd} , E_{st} , S_{th} и W_{st} - точки Севера, Востока, Юга и Запада, соответственно, на круге горизонта HH' . **Характеристики годового движения Солнца** по кругу эклиптики EE' : $\delta = SB$ - склонение Солнца; $\lambda = \gamma S$ - долгота Солнца; точки γ , E' , γ' и E - точки нахождения Солнца в дни весеннего равноденствия, летнего солнцестояния, осеннего равноденствия и зимнего солнцестояния, соответственно; SS_1 - путь Солнца за одни солнечные сутки. **Характеристики суточного движения Солнца** по кругу $S_r M_d S M_n$: точки S_r , M_d , S_s и M_n

положения центра Солнца в моменты восхода, полудня, захода и полуночи, соответственно; $z = \angle ZMS$ – зенитный угол Солнца; $\omega = \angle ZNS$ – часовой угол Солнца, отсчитываемый от полудня.

Этот алгоритм отличается от традиционного, основанного на уравнении Кеплера. Он, как уже отмечалось, базируется на точном решении задачи двух тел и является более простым в использовании. Программа `Insl2bd.mcd` в среде MathCad для расчета долгот λ_{jI} и других характеристик инсоляции Земли имеется в свободном доступе: <http://www.ikz.ru/~smulski/Data/Insol/>. Алгоритм для определения долгот λ_{jI} включен в пункты 3-5 программы `SunPhnmen.mcd` расчета феноменов Солнца, которая представлена в Приложении.

Как уже отмечалось, формулами (1) – (2) определяется время движения Земли от точки положения ее перигелия P_E (см. рис. 2). Перигелий относительно восходящего узла γ определяется углом $\varphi_{p\gamma}$. Относительно Земли Солнце движется по той же орбите, но его перигей P_S сдвинут на 180° , т.е. угол перигея Солнца $\nu = \varphi_{p\gamma} + \pi$. Так как долгота Солнца λ , также отсчитывается от восходящего узла γ (см. рис. 2), то полярный угол φ_o в формулах (1) – (2) выразится через долготу λ так:

$$\varphi_o = \lambda - \nu = \lambda - \varphi_{p\gamma} - \pi \quad (3)$$

Итак, формулами (1) – (3) определяется время годового движения Солнца по небесной сфере, т.е. по эклиптике EE' , в зависимости от его долготы λ .

Эксцентриситет орбиты e , угол перигелия $\varphi_{p\gamma}$ и угол наклона орбиты ε к экватору изменяются со временем. Они определяются в результате решения двух задач об орбитальном и вращательном движении Земли. В рассматриваемых программах в среде MathCad эти параметры в зависимости от времени T , считываются из файла, например, файла `OrAl-200.prn` – за 200 тысяч лет назад (т.л.н.).

Положение Солнца S (рис. 2) на эклиптике EE' известно в любой момент времени t . А угловое расстояние Солнца SB от экватора, т.е. угол склонения δ , определяется известным в астрономии выражением

$$\delta = \arcsin(\sin \varepsilon \cdot \sin \lambda). \quad (4)$$

Вывод выражения (4) имеется в работах [12]-[13]. Отметим, что все используемые в настоящей работе формулы выведены нами. Многие из них известны в астрономии. Однако необходимо осуществлять их вывод по-новому, чтобы быть уверенным в возможности их использования при измененных параметрах орбитального и вращательного движения Земли.

Если в формулу (4) подставить $\lambda = \lambda_{jI}$, то мы получим склонение δ_{jI} для каждого дня года. В этой формуле и в последующих, с целью упрощения изложения, индекс jI

опускаем. Координатами λ и δ полностью определяется годовое движение Солнца по небосводу. В дальнейшем потребуется угловое расстояние Солнца γB (рис. 2) на экваторе AA' , которое известно в астрономии как прямое восхождение α_S . Здесь индекс S , обозначающий Солнце, введен для отличия при обозначении значком α других параметров.

В сферическом прямоугольном треугольнике γSB известны углы: $B = \pi/2$; $\gamma = \varepsilon$ и две стороны: $\gamma S = \lambda$, $BS = \delta$. Согласно преобразованиям сферической тригонометрии, например, формулы (1.1.013) в работе [16] можем записать для неизвестной стороны $\gamma B = \alpha_S$:

$$\sin \alpha_S = \operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{ctg} \varepsilon.$$

После подстановки в это выражение δ из (4) получаем прямое восхождения Солнца в следующем виде:

$$\alpha_{S0} = \arcsin \frac{\cos \varepsilon \cdot \sin \lambda}{\sqrt{1 - (\sin \varepsilon \cdot \sin \lambda)^2}} \quad (5)$$

$$\alpha_S = \alpha_{S0} \text{ при } \lambda \leq 0.5\pi; \alpha_S = \pi - \alpha_{S0} \text{ при } 0.5\pi < \lambda \leq 1.5\pi; \alpha_S = 2\pi + \alpha_{S0} \text{ при } \lambda > 1.5\pi.$$

В формулу (5) входит долгота Солнца λ , которая изменяется от 0 до 2π . Так как функция \arcsin многозначна, то на интервалах λ больших $\pi/2$ необходимо выбирать нужные значения по представленному алгоритму.

Плоскости экватора AA' и эклиптики EE' изменяются в пространстве, вследствие чего точка весеннего равноденствия γ по часовой стрелке перемещается по эклиптике за год на $50''.25641$. Как уже отмечалось, годовое движение Солнца проходит по кругу эклиптики EE' против часовой стрелки, что отражается изменением долготы λ , начиная от точки весеннего равноденствия γ . Поэтому время прохождения Солнцем двух последовательных точек весеннего равноденствия, т.е. тропический год $P_{tr} = 365.24219879$ дней, меньше сидерического года P_{sd} . Для того, чтобы сезоны года не смещались по датам, современный календарь основан на тропическом годе.

Солнце S при годовом движении по эклиптике EE' (см. рис. 2) в момент весеннего равноденствия находится в т. $\gamma (\lambda = 0)$, а в день летнего солнцестояния Солнце проходит т. $E' (\lambda = \pi/2)$, в момент осеннего равноденствия находится в т. $\gamma' (\lambda = \pi)$, а в день зимнего солнцестояния проходит т. $E (\lambda = 3\pi/2)$. В п. 8 программы SunPhnmen.mcd вычислены моменты в днях прохождения точек лета T_{dsm} , осени T_{dau} и зимы T_{dwn} . Точку весеннего равноденствия, как уже отмечалось, Солнце проходит в момент $T_{dsp} = 0$. Так как ряд

долгот λ_{jl} расположен по целочисленному ряду дней $T_{d,jl}$, то эти расчеты проводятся интерполяцией по соседним значениям долгот. Продолжительности сезонов: весны, лета, осени и зимы рассчитываются по разностям этих моментов, соответственно:

$$\Delta T_{dsp} = T_{dsm} - T_{dsp}; \quad \Delta T_{dsm} = T_{dau} - T_{dsm}; \quad \Delta T_{dau} = T_{dwn} - T_{dau}; \quad \Delta T_{dwn} = P_{tr} - T_{dwn}. \quad (6)$$

Результаты расчетов моментов наступления сезонов и их длительностей, согласно (6), приведены в табл. 1 для пяти эпох. Как уже отмечалось, четыре эпохи выбраны в моменты наступления экстремумов угла наклона ε . Как видно из табл. 1 величина ε изменяется от 0.25841 до 0.55875 в радианах, или от 14.8° до 32.1° в градусах. В современную эпоху ($T = 0$) наибольшую длительность имеет лето ($\Delta T_{dsm} = 93.654$ дня), а наименьшую – зима ($\Delta T_{dwn} = 88.981$ дня). В эпоху $T = 2.8$ т.л.н лето имеет еще большую длительность, а наименьшую – осень. В эпоху $T = 15.32$ т.л.н лето имеет наименьшую длительность, а наибольшую – осень. Аналогичные изменения длительности сезонов происходят в остальные эпохи. Однако эти изменения не очень большие и не превышают 6 дней.

В таблице 1 приведены длительности сезонов для северного полушария. Эти данные применимы и для южного полушария, если весну заменить осенью, а лето – зимой. Следует отметить, что приведенные в табл. 1 длительности сезонов для современной эпохи ($T = 0$) совпадают с известными в астрономии.

Таблица 1. Количество дней до начала сезонов в Северном полушарии и их продолжительность в эпохи T наступления экстремумов угла наклона ε . T – время в тыс. лет от 30.12.1949 г.

№	T	ε	T_{dsm}	T_{dau}	T_{dwn}	ΔT_{dsp}	ΔT_{dsm}	ΔT_{dau}	ΔT_{dwn}
1	0	0.40916	92.770	186.425	276.261	92.770	93.654	89.837	88.981
2	-2.8	0.41343	94.226	186.029	274.484	94.226	91.803	88.454	90.759
3	-15.32	0.33237	88.484	181.276	275.458	88.484	92.792	94.183	89.784
4	-31	0.55875	91.191	179.887	271.280	91.191	88.697	91.393	93.962
5	-46.44	0.25841	92.806	185.831	275.649	92.806	93.026	89.818	89.593

2.2 Суточное движение Солнца

Земля совместно с наблюдателем M (см. рис. 2), кругом горизонта HH' и меридианом $NZE M_d A'$ вращается вокруг оси вращения Земли MN , с угловой скоростью $\vec{\omega}_E$. Вращение происходит против часовой стрелки. Поэтому Солнце относительно Земли и, в частности, относительно круга горизонта HH' по часовой стрелке перемещается по кругу $S_r M_d S_s$ параллельно экватору AA' . В точке S_r оно восходит над горизонтом HH' , в точке M_d находится в полдень, а в точке S_s заходит за горизонт, а в точке M_n находится в полночь. Часовой угол ω Солнца S отсчитывается от меридиана $NZE M_d A'$, проходящего через точку полдня M_d . Часовой угол ω равняется дуге AB на круге экватора AA' . Угловое

расстояние Солнца от зенита Z определяется дугой $ZS = z$, где z называется зенитным углом.

В сферическом треугольнике NZS известны две стороны: $NZ = \pi/2 - \varphi$; $NS = \pi/2 - \delta$ и угол $N = \omega$ между ними. Тогда по теореме косинусов [16] $\cos ZS = \cos NZ \cdot \cos NS + \sin NZ \cdot \sin \varphi \cdot \cos N$ он запишется в следующем виде [12]-[13]:

$$\cos z = \sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos \omega. \quad (7)$$

Зенитный угол z отсчитывается от точки зенита Z против часовой стрелки. В точке восхода S_r он равен: $z = -\pi/2$, в точке захода S_s угол $z = \pi/2$. При этих углах из выражения (7) определяется часовой угол заходов и восходов Солнца.

$$\omega_0 = \pm \arccos(-\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta). \quad (8)$$

В представленном на рис. 2 положении наблюдателя M и Солнца S длительность дня больше длительности ночи. При нахождении Солнца S в полдень в точке E' длительность дня будет наибольшая. Это точка летнего солнцестояния, по-другому, летнего солнцеворота. До этого момента Солнце каждый день приближалось к зениту Z , а в последующие дни оно будет удаляться от зенита. При нахождении Солнца S в точке E наибольшей будет длительность ночи. Это точка зимнего солнцестояния. А при нахождении Солнца S в точках γ или γ' его суточное перемещение будет происходить по кругу экватора AA' . Этот круг пересекает круг горизонта HH' по его диаметру, поэтому время нахождения Солнца над горизонтом и под ним одинаково, т.е. длительность дня равна длительности ночи.

Если наблюдатель в точке M на рис. 2 будет находиться на большей широте, т.е. дуга $N_{rd}N$ будет больше, то окружность SM_d не пересечет круг горизонта HH' . В этом случае для наблюдателя M наступит полярный день. При нахождении Солнца S' в южном полушарии вблизи т. E круг его суточного движения также не пересечет линию горизонта HH' . В этом примере широты для наблюдателя в точке M наступит полярная ночь.

3 Длительность солнечных суток

Длительность солнечных суток T_{sd} определяется периодом прохождения Солнца через точку полдня M_d (рис. 2). За время T_{sd} Солнце S по эклиптике EE' переместится в точку S_l с прямым восхождением $\alpha_{s_l} = \gamma B_l$, которое определяется формулой (5). В связи с этим полдень наступит при часовом угле $\omega_{sd0} < 2\pi$ на величину $\Delta\alpha_0 = \alpha_{s_l} - \alpha_s$, т.е. часовой угол солнечных суток будет

$$\omega_{sa0} = 2\pi - \Delta\alpha_0. \quad (9)$$

Как следует из (5) величина $\Delta\alpha_{0,j1}$ определяется разностью долгот Солнца λ_{j1} за два соседних дня. Величина $\Delta\lambda_{j1}$ изменяется по двум причинам: из-за неравномерного движения Солнца по эллиптической орбите и из-за наклона орбиты под углом ε к плоскости экватора. Из-за наклона одинаковые дуги SS_1 на круге эклиптики EE' проектируются в неодинаковые дуги BB_1 на круге экватора AA' . Разность прямых восхождений за два соседних дня запишем в виде:

$$\Delta\alpha_{0,j1} = \alpha_{s,j1} - \alpha_{s,j1-1}.$$

Найдем среднюю за год разность прямых восхождений

$$\Delta\alpha_m = \sum_{j1=1}^{365} \frac{\Delta\alpha_{0,j1}}{365}. \quad (10)$$

Тогда по отношению к средней величине $\Delta\alpha_m$ разность долгот за солнечные сутки будет $\Delta\alpha = \Delta\alpha_0 - \Delta\alpha_m$ и часовой угол солнечных суток запишется

$$\omega_{sd} = 2\pi - (\Delta\alpha_0 - \Delta\alpha_m). \quad (11)$$

А длительность солнечного дня в часах будет иметь вид:

$$T_{sd,j1} = \frac{24}{2\pi} \omega_{sd} = 12 \left(2 - \frac{\Delta\alpha_{0,j1} - \Delta\alpha_m}{\pi} \right), \quad (12)$$

где $24/2\pi$ – коэффициент преобразования дуги, измеряемой в радианах, в часы.

Нетрудно убедиться, что средняя за год длительность солнечных суток, согласно (12), $T_{sdm} = 24$ часа. Тогда отклонение длительности солнечных суток в минутах от средних составляет

$$\Delta T_{sd} = 60(T_{sd} - 24). \quad (13)$$

Приведем некоторые значения для 2015 года. Отклонение солнечных суток от средних в день весеннего равноденствия $j_1 = 1$ будет $\Delta T_{sd} = 0.297$ мин, наибольшее значение $\Delta T_{sd} = 0.358$ минуты при $j_1 = 181$, и наименьший солнечный день при $j_1 = 278$: $\Delta T_{sd} = -0.497$ минуты. В современной цивилизации счет времени m происходит по средним солнечным суткам T_{sdm} . Они делятся на 24 часа, 1 час состоит из 60 минут, а минута – из 60 секунд. За счет отклонения ΔT_{sd} солнечных суток от средних T_{sdm} накапливается отличие η_0 солнечного времени от среднего. Последовательное суммирование отклонений запишем в виде

$$\eta_{0,j1} = \eta_{0,j1-1} + \Delta T_{sd,j1-1}. \quad (14)$$

Найдем среднее отклонение за год

$$\eta_{0m} = \left(\sum_{j1=1}^{365} \eta_{0,j1} \right) / 365. \quad (15)$$

Средняя величина отклонения η_{0m} образуется при счете времени по средним солнечным суткам. Тогда отклонения солнечного времени от среднего солнечного времени будет

$$\eta_{j1} = \eta_{0,j1} - \eta_{0m}. \quad (16)$$

Величина η в астрономии называется уравнением времени. Поэтому истинное солнечное время m_a в часах будет выражаться через среднее солнечное время m так:

$$m_a = m + \eta, \quad (17)$$

где m – отсчитывается от полуночи.

График для уравнения времени $\eta(T_d)$ приведен на рис. 3. Отклонения времени η для дня весеннего равноденствия $j_1 = 1$ равно $\eta = -7.47$ мин, наименьшее значение $\eta_{mn} = -14.25$ мин при $j_1 = 329$, а наибольшее $\eta_{mx} = 16.43$ мин при $j_1 = 229$. Величины отклонения η не отличаются от известных в астрономии [17]. Отличие имеется в начале отсчета времени T_d в днях: в астрономии дни отсчитываются с 1 января, а на рис. 3 – с момента весеннего равноденствия.

Следует отметить, что по величине отклонения времени η можно также определить отклонение истинных солнечных суток от средних

$$\Delta T_{sd,j1} = \eta_{j1+1} - \eta_{j1}. \quad (18)$$

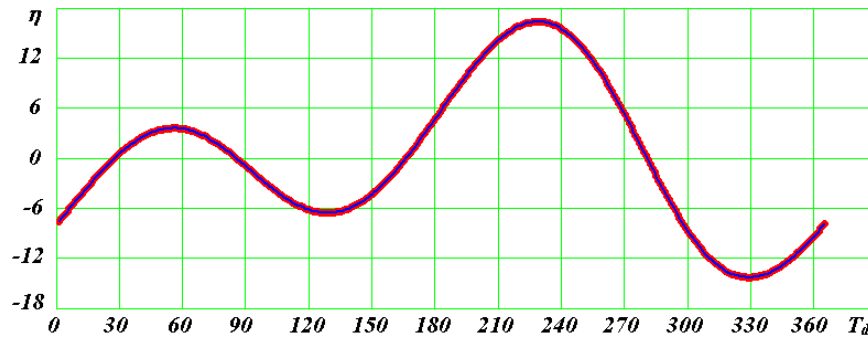


Рис. 3. Уравнение времени в современную эпоху 30.12.1949 г.: η – в мин; T_d – в днях от момента весеннего равноденствия.

Клавдий Птолемей использовал равноденственные часы [18]. Как показано выше, весенние равноденственные сутки больше среднесолнечных на $\Delta T_{sd} = 0.297$ мин. Если он и предшествующие ему астрономы использовали равноденственное время, оно может отличаться от среднесолнечного времени на величину порядка 10 минут. Роберт Ньютон [19] обвинил Клавдия Птолемея в искажении моментов древних наблюдений, потому что они не совпадают с современной теорией примерно на такое же количество минут. Как

видим, одной из причин несовпадения может быть разная длительность использованных часов времени.

Длительность солнечных суток, согласно (12), определялась разностями долгот $\lambda_{j1} - \lambda_{j1-1}$ за средние солнечные сутки $T_{sdm} = 24$ часа. Был рассчитан скорректированный ряд долгот $\lambda_{c,j1}$ по фактической длительности суток $T_{sd,j1}$ и повторены расчеты по формулам (9) – (16). Наибольшее отличие скорректированной длительности суток ΔT_{sd} от ΔT_{sd} равно 0.092 сек при $j_1 = 278$. Это составляет относительную погрешность отклонения длительности солнечных суток 0.3%. Поэтому алгоритм расчета (9) – (16) для длительности суток T_{sd} и уравнения времени η можно использовать без коррекции.

На рис. 4 изменение длительности солнечных суток ΔT_{sd} в современную эпоху ($T = 0$) сопоставлено с этими изменениями в другие четыре эпохи. Как видно время экстремумов ΔT_{sd} примерно совпадает и приходится на моменты равноденствий ($T_d \approx 0$ и $T_d \approx 180$) и солнцестояний ($T_d \approx 90$ и $T_d \approx 270$). При этом изменение длительности солнечных суток происходят в пределах от -0.5 мин до 0.35 мин от средней длительности в 24 часа.

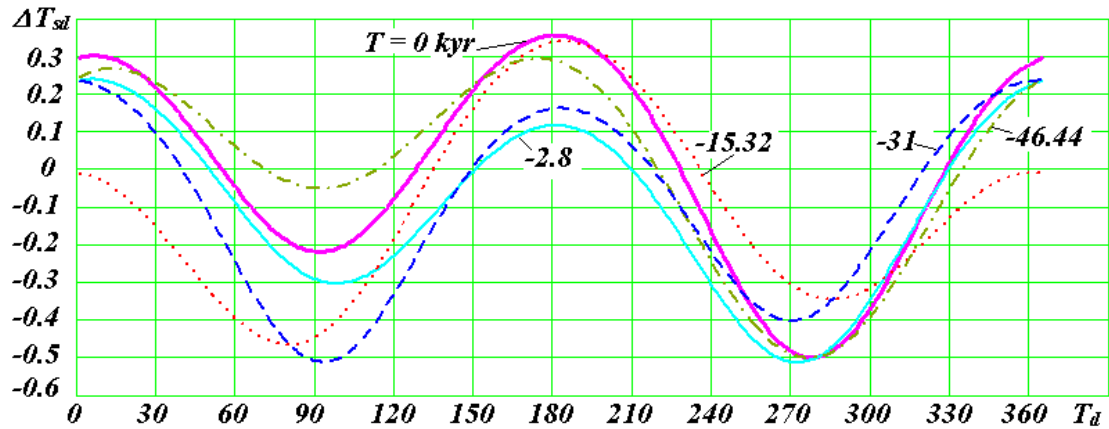


Рис. 4. Отклонение ΔT_{sd} длительности солнечных суток в эпохи T от средних за год в эти же эпохи: ΔT_{sd} – в минутах; T – время в тыс. лет от 30.12.1949 г.

Таблица 2. Изменения параметров уравнения времени по эпохам T : T – время в тыс. лет от 30.12.1949 г.

T , kyr	η_{0m}	$\eta_{mх}$	$\eta_{mн}$	$\Delta\alpha_m$
	мин			радианы
0	7.80093	16.4349	-14.2489	0.0172030
-2.8	7.21693	12.1048	-18.0700	0.0172034
-15.32	-2.54582	11.8227	-14.7360	0.0172024
-31	-4.69624	26.1632	-19.2286	0.0172042
-46.44	6.45078	9.00746	-8.54319	0.0172025

В табл. 2 основные параметры уравнения времени η , представленного на рис. 3 для современной эпохи ($T = 0$), сопоставлены с таковыми для других четырех эпох. Среднее

отклонение η_{0m} , согласно (15), как видно из табл. 2 изменяется в широких пределах: от -4.7 мин в эпоху 31 т.л.н. до 7.8 мин в современную эпоху. Максимальное отклонение η_{mx} и минимальное η_{mn} также изменяются в 2-3 раза. В то же время средняя разность прямых восхождений $\Delta\alpha_m$ за одни сутки, согласно (10), остается неизменной $\Delta\alpha_m = 0.0172$. Это является следствием неизменности периодов орбитального и вращательного движения Земли.

На рис. 2 мы рассматривали вращения Земли со средней угловой скоростью $\bar{\omega}_E$. Угловая скорость Земли имеет свои независимые колебания [4], [20], но их амплитуда на три порядка меньше амплитуды изменения солнечных суток. Поэтому колебания угловой скорости вращения Земли здесь не учитываются.

4. Долгота светового дня

4.1. Долгота светового дня в течение года

Длительность светового дня, или долгота дня D_0 в часах определяется (см. рис. 2) суммой часовых углов ω_0 восходов и заходов центра Солнца (8):

$$D_0 = (24/2\pi) \cdot 2\omega_0 = (24/\pi) \cdot \omega_0. \quad (19)$$

Так как часовой угол ω_0 отсчитывается до центра Солнца, то величина D_0 определяет длительность нахождения над горизонтом NN' центра Солнца. Световой день начинается с появления края Солнца и заканчивается с опусканием его за горизонт. Кроме того, из-за уменьшения плотности атмосферы с высотой происходит преломление (рефракция) светового луча так, что Солнце видно на угол ρ_{90} под горизонтом. В общем случае для наблюдаемых на небе объектов отклонение ρ_{90} при зенитном угле $z = 90^\circ$, или рефракция, зависит от ряда факторов, которыми для Солнца можно пренебречь. Поэтому в астрономии рефракция принята постоянной и равно $\rho_{90} = 34'$ [17].

На рис. 2 часовой угол z показан между центром Солнца и зенитом Z наблюдателя M , находящегося на поверхности Земли. А формулой (7) угол z определяется от центра Земли. Угол p , под которым расстояние наблюдателя от центра Земли видно с Солнца, называется его параллаксом. На угол p необходимо уменьшить рассчитанную по (7) величину зенитного угла. Наибольшая величина параллакса p не превышает $8''.8$ [17]. Эта величина в 230 раз меньше величины рефракции ρ_{90} , поэтому параллаксом можно пренебречь.

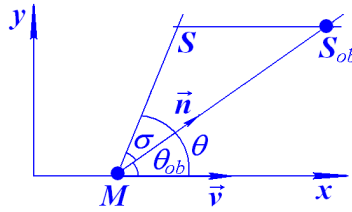


Рис. 5. Угол θ_{ob} видимого положения Солнца S_{ob} при движении наблюдателя M со скоростью \vec{v} и угол θ действительного положения солнца S .

Имеется еще один источник искажения положения Солнца на небосводе (см. рис. 5), который обусловлен движением наблюдателя M относительно Солнца S со скоростью \vec{v} . Это явление называется aberrацией света.

При движении наблюдателя относительно источника света S происходят изменения всех характеристик света. Точное выражение для измененных характеристик света приведено в работе [21]. При скорости движения v , значительно меньшей скорости света c для угла смещения источника справедливо выражение

$$\sigma = \beta \cdot \sin \theta_{ob}, \quad (20)$$

где $\beta = v/c$

Истинное положение источника S отличается от наблюдаемого положения S_{ob} на угол σ . Упрощенно, как это принято в астрономии [17], можно рассмотреть движение наблюдателя M относительно Солнца за счет суточного вращения Земли v_{rt} и за счет ее орбитального движения (v_{or}) относительно Солнца. При суточном вращении в точках восхода и захода Солнца углы θ между ним и скоростью v_{rt} близки к 0 и π . Поэтому, согласно (20), угол смещения σ будет близкий к нулю. За счет орбитального движения в этих же точках угол θ между Солнцем и скоростью v_{or} близок к $\pi/2$. В этом случае угол наблюдаемого Солнца будет на величину σ меньше, чем угол истинного. Это будет приводить к более раннему восходу Солнца и более раннему его заходу. Так что на длительность светового дня это явление не оказывает влияние. При этом угол смещения σ не превышает 20" [17]. Эта величина в 100 раз меньше величины рефракции ρ_{90} , а также меньше неопределенности величины ρ_{90} . Поэтому aberrацией света можно пренебречь.

Следует отметить, что в силу пренебрежения aberrацией света такое рассмотрение этого явления по составляющим скорости v_{or} и v_{or} допустимо. Однако при точном его рассмотрении, необходимо рассматривать полный вектор скорости, его три угла наклона к линии MS_{ob} (рис. 5). Затем вычислять изменение этих углов по точным формулам в работе [21].

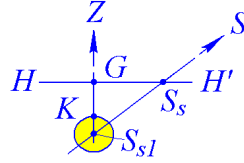


Рис.6. Абберационное смещение $GK = \rho_{90}$ края диска Солнца в момент его захода: HH' – линия горизонта; S_{s1} – положение центра Солнца во время захода его края.

Теперь рассмотрим восходы и заходы верхнего края Солнца. На рис. 6 показано смещение края диска Солнца на угловое расстояние $GK = \rho_{90}$ ниже уровня горизонта HH' в момент его захода. Видимый радиус Солнца KS_{s1} согласно [17] равен:

$$KS_{s1} = \frac{961'' \cdot 18}{\rho} = \frac{4.6599 \cdot 10^{-3}}{\rho}, \quad (21)$$

где ρ – расстояние Солнца от Земли, отнесенное к большой полуоси a орбиты Земли. Величина ρ рассчитывается по уравнению траектории в зависимости от долготы λ [14]-[15].

С учетом (21) дуга GS_{s1} будет равна в радианах

$$GS_{s1} = 10^{-3} \cdot \left(9.8902 + \frac{4.6599}{\rho} \right). \quad (22)$$

Дуга GS_{s1} расположена на окружности большого круга, проходящего через точку зенита Z (рис. 2), поэтому она является приращением зенитного угла, т.е. $\Delta z = GS_{s1}$. Тогда зенитный угол видимого края заходящего Солнца будет

$$z_{0a} = \pi/2 + GS_{s1}. \quad (23)$$

Так как часовой угол ω связан с зенитным углом z выражением (7), то часовой угол видимого захода края Солнца можно записать так:

$$\cos \omega_{0a} = \frac{\cos z_{0a} - \sin \delta \cdot \sin \varphi}{\cos \delta \cdot \cos \varphi}. \quad (24)$$

Так как правая часть по модулю может превышать 1, то перепишем выражение (24) в виде:

$$\omega_{0a} = \arccos(Fn), \quad (25)$$

где функция Fn определяется в зависимости от промежуточной функции

$$Fn0 = \frac{\cos z_{0a} - \sin \delta \cdot \sin \varphi}{\cos \delta \cdot \cos \varphi} \quad (26)$$

так:

$$Fn = Fn0 \text{ при } -1 \leq Fn0 \leq 1; \quad Fn = -1 \text{ при } Fn0 < -1; \quad Fn = 1 \text{ при } Fn0 > 1. \quad (27)$$

Как следует из рис. 2, зенитный угол видимого края восходящего Солнца будет $z_{0ra} = -\pi/2 - GS_{s1}$, т.е. по модулю такой же, как и z_{0a} . Поэтому модуль часового угла восхода

Солнца будет определяться также выражением (25). Тогда долгота светового дня в радианах равна $2 \cdot \omega_{0d}$, а в часах запишется так:

$$D = 24 \cdot \omega_{0d} / \pi. \quad (28)$$

На рис. 7 показано изменение долготы дня D в течение года на разных широтах. Например, на широте $\varphi = 60^\circ$ в момент весеннего равноденствия ($T_d = 1$) $D = 12.31$ часа, затем она увеличивается до 18.87 часа в момент летнего солнцестояния. В момент осеннего равноденствия $D = 12.26$ часа, а затем уменьшается до $D = 5.87$ часа в день зимнего солнцестояния. С уменьшением широты φ экстремумы долготы дня D уменьшаются и приближаются к 12.1 часа на экваторе ($\varphi = 0^\circ$).

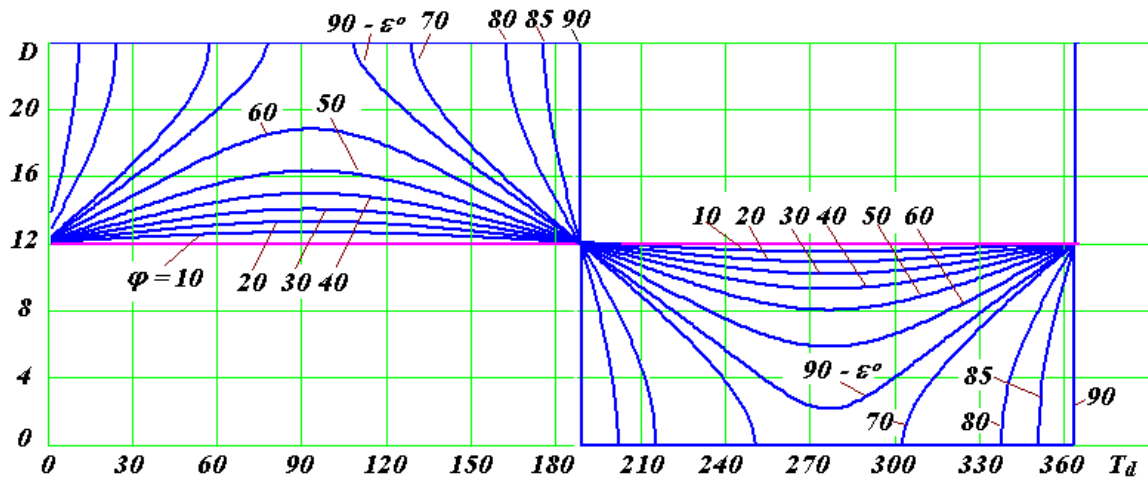


Рис. 7. Продолжительность (долгота) светового дня в году на разных широтах φ Северного полушария в современную эпоху 30.12.1949 г.

С увеличением широты $\varphi > 60^\circ$ наибольшая долгота дня в день летнего солнцестояния приближается к 24 часам. На полярном круге ($\varphi = 90^\circ - \varepsilon^\circ$) наступает полярный день, который длится 31 сутки. С увеличением широты длительность полярного дня увеличивается до половины года на полюсе. В день зимнего солнцестояния долгота дня с увеличением широты уменьшается до $D = 2.17$ часа на полярном круге. С дальнейшим увеличением широты наступает полярная ночь.

Представленная на рис. 7 картина изменения долготы дня совпадает с таковой в астрономии [17].

4.2. Полярные дни и ночи: моменты наступления и длительность

Рассмотрим моменты наступления полярных дней и ночей и их длительность. Для этого необходимо рассчитать долготы λ этих событий. Как уже отмечалось, полярному дню соответствует долгота (длительность) дня $D_d = 24$ часа, а полярной ночи $D_n = 0$ часов. Тогда из (28) получаем часовые углы полярного дня $\omega_{0ad} = \pi$ и полярной ночи – $\omega_{0an} = 0$.

После подстановки в (25) вместо ω_{0a} этих значений часового угла, получаем $Fn_d = -1$ для полярного дня и $Fn_n = 1$ для полярной ночи. Здесь функция Fn определяется выражением (26). Перепишем его в следующем виде:

$$\cos z_{0a} - \sin \delta \cdot \sin \varphi = Fn \cdot \cos \delta \cdot \cos \varphi.$$

Подставив в это выражение значение $\sin \delta$, согласно (4), получим следующее уравнение для долготы λ

$$\cos z_{0a} - \sin \varepsilon \cdot \sin \lambda \cdot \sin \varphi = F_n \sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon \cdot \sin^2 \lambda} \cdot \cos \varphi. \quad (29)$$

После возведения (29) в квадрат и преобразований с учетом того, что для рассматриваемого случая $F_n^2 = 1$, получаем для $\sin \lambda$ квадратное уравнение

$$\sin^2 \lambda - 2 \frac{\sin \varphi \cdot \cos z_{0a}}{\sin \varepsilon} \cdot \sin \lambda - \frac{\cos^2 \varphi - \cos^2 z_{0a}}{\sin^2 \varepsilon} = 0. \quad (30)$$

Оно имеет два решения, отличающиеся знаками «+» и «-» перед квадратным корнем. Запишем это решение в виде одной формулы:

$$\sin \lambda = Fn01; Fn02, \quad (31)$$

где функция со знаком «+» имеет вид:

$$Fn01 = [\sqrt{(\sin \varphi \cdot \cos z_{0a})^2 + \cos^2 \varphi - \cos^2 z_{0a}} + \sin \varphi \cdot \cos z_{0a}] / \sin \varepsilon. \quad (32)$$

Функция $Fn02$ перед корнем имеет знак «-».

Чтобы исключить значения по модулю превышающие 1 вводятся функции

$$Fn1 = Fn01 \text{ при } 1 \geq Fn01 \geq -1; \quad Fn1 = 1 \text{ при } Fn01 > 1; \quad (33)$$

$$Fn2 = Fn02 \text{ при } 1 \geq Fn02 \geq -1; \quad Fn2 = -1 \text{ при } Fn02 < -1. \quad (34)$$

Летнее полугодие характеризуется долготами $0 < \lambda < \pi$, а зимнее $-\pi < \lambda < 2\pi$. Так как функция $Fn1 > 0$, то она будет давать летние долготы, а отрицательная функция $Fn2$ – зимние долготы. Тогда в соответствии с (31) летние долготы полярных дней будут $\lambda_{pd} = \arcsin(Fn1)$. Эта функция будет давать два решения: для первого λ_{pd} и второго квадранта λ_{pd1} . Как следует из рис. 7 меньшее значение соответствует началу полярного дня, а большее – концу. Окончательно долготы начала и конца полярных дней запишутся в виде:

$$\lambda_{pd} = \arcsin(Fn1); \quad \lambda_{pd1} = \pi - \arcsin(Fn1). \quad (35)$$

Аналогично долготы начала и конца полярных ночей определяются так:

$$\lambda_{pn} = 2\pi + \arcsin(Fn2); \quad \lambda_{pn1} = \pi - \arcsin(Fn2). \quad (36)$$

Чтобы найти моменты по времени T_d , соответствующие долготам λ_{pd} , λ_{pd1} , λ_{pn} , λ_{pn1} , необходимо найти индексы j_l соседних долгот. Затем интерполяцией определяются моменты: T_{dd} и T_{ddl} – начала и конца полярного дня, а также T_{dn} и T_{dn1} – начала и конца полярной ночи. Алгоритм вычисления приведен в п. 11 программы SunFhnm.mcd в

Приложении, а на рис. 8 они представлены в виде графиков. В области *I* приблизительно до $T_d = 90$ дней изображены начала полярных дней в зависимости от широты φ . Разными линиями и точками показаны графики для 5 эпох. Аналогично в области *II* приблизительно при $90 < T_d < 180$ дней этими же линиями показаны моменты T_d окончания полярных дней. Аналогично приблизительно при $180 < T_d < 270$ и $T_d > 270$ изображены начала (*III*) и окончания (*IV*) полярных ночей.

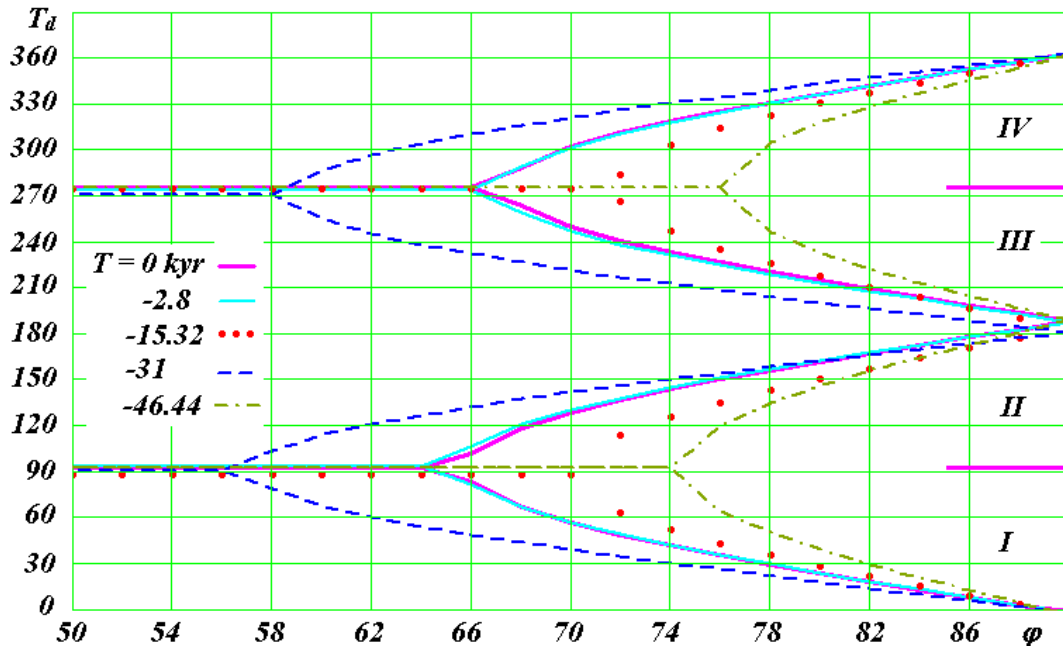


Рис. 8. Моменты T_d наступления (*I, III*) и окончания (*II, IV*) полярных дней (*I, II*) и ночей (*III, IV*) на разных широтах Северного полушария в экстремальные эпохи за последние 50 т.л.н.

Например, в современную эпоху $T = 0$ на широте $\varphi = 70^\circ$ в $T_d = 56.88$ день от момента весеннего равноденствия наступает полярный день. Он заканчивается в $T_d = 128.82$ день. Полярная ночь наступает в $T_d = 250.05$ день и заканчивается в $T_d = 302.39$ день. С увеличением широты φ начала полярных дней и ночей происходит раньше, а окончание позже. С уменьшением широты φ начала полярных дней отдаляются и приближаются к $T_d = 92.8$ дню, а начала полярных ночей приближаются к $T_d = 275.5$ дню. Это происходит на широтах близких к широте полярного круга, которая для современной эпохи равна 66.56° .

В другие эпохи графики начала и конца полярных дней и ночей, как видно из рис. 8, идентичны, но широта их начала может существенно смещаться. При этом изменяется продолжительность полярных дней и ночей. Например, в эпоху 31 т. л. н. широта начала полярных дней и ночей смещается до 56° и 58° , соответственно, а в эпоху 46.44 т. л. н. — до 74° и 76° соответственно.

Следует отметить, что древние арии [8] в эпоху 31 т. л. н. могли обитать на территории близкой по широте г. Тюмени ($\varphi = 57.15^\circ$) и наблюдать полярные дни и ночи. С приближением последнего ледникового периода 15.32 т. л. н. они вынуждены были мигрировать на южные территории.

Начала полярных дней и ночей и их продолжительность $\Delta T_{dd} = T_{dd1} - T_{dd}$ и $\Delta T_{dn} = T_{dn1} - T_{dn}$; соответственно, на разных широтах представлены в табл. 1П в Приложении для пяти разных эпох. Для сравнения, для современной эпохи приведены длительности полярных дней и ночей в астрономии. Они обозначены как EA по названию источника [17]. Данные EA приведены с точностью 1 день. Округление начала и конца полярных дней и ночей может приводить к разности их длительности в 2 дня. В табл. 1П такое отличие наблюдается. А в целом представленные на рис. 8 и табл. 1П результаты для современной эпохи совпадают с известными данными в астрономии.

4.3. Долготы светового дня в моменты солнцестояний

Рассмотрим долготу светового дня в моменты летнего и зимнего солнцестояний в неполярных широтах. Как уже отмечалось, наибольшая долгота светового дня будет в момент летнего солнцестояния $\lambda_s = \pi/2$, а наименьшая – в момент зимнего солнцестояния $\lambda_w = 1.5\pi$. Тогда склонение Солнца δ , согласно (4), в этих случаях будет $\delta_s = \varepsilon$ и $\delta_w = -\varepsilon$, соответственно. Тогда после подстановки угла δ_s в (26) часовой угол видимых восходов и заходов края Солнца в момент летнего солнцестояния запишется аналогично (25)-(27) так:

$$\omega_{0sa} = \arccos(Fn_s); \quad (37)$$

$$Fn0_s = \frac{\cos z_{0a1} - \sin \varepsilon \cdot \sin \varphi}{\cos \varepsilon \cdot \cos \varphi}; \quad (38)$$

$$Fn_s = Fn0_s \text{ при } -1 \leq Fn0_s \leq 1; \quad Fn_s = -1 \text{ при } Fn0_s < -1; \quad Fn_s = 1 \text{ при } Fn0_s > 1. \quad (39)$$

В формуле (30) использован зенитный угол z_{0a1} , в котором безразмерное расстояние от Земли до Солнца ρ , согласно (22), из-за малого влияния его изменения принято $\rho = 1$.

После подстановки угла $\delta_w = -\varepsilon$ в (26) часовой угол видимых восходов и заходов края Солнца в момент зимнего солнцестояния запишется аналогично (37)-(39) так:

$$\omega_{0wa} = \arccos(Fn_w); \quad (40)$$

$$Fn0_w = \frac{\cos z_{0a1} + \sin \varepsilon \cdot \sin \varphi}{\cos \varepsilon \cdot \cos \varphi}; \quad (41)$$

$$Fn_w = Fn0_w \text{ при } -1 \leq Fn0_w \leq 1; \quad Fn_w = -1 \text{ при } Fn0_w < -1; \quad Fn_w = 1 \text{ при } Fn0_w > 1. \quad (42)$$

Тогда долгота светового дня в моменты летнего и зимнего солнцестояний запишутся, соответственно, так:

$$D_s = 24 \cdot \omega_{0sa} / \pi; \quad D_w = 24 \cdot \omega_{0wa} / \pi. \quad (43)$$

Результаты расчетов долготы дня в моменты солнцестояний по формулам (37) – (43) на рис. 9 даны для пяти разных эпох. Графики представляют изменение долготы дня D по широтам φ северного полушария. Для зимнего солнцестояния долгота дня $D \leq 12$ часов отмечена как область I , а для летнего солнцестояния – как область II .

В современную эпоху, как видно из рис. 9, на широте 50° в зимнее солнцестояние день длится 8 часов, а в летнее – 16.37 часа. С уменьшением широты день в зимнее солнцестояние увеличивается и приближается к 12 часам на экваторе. А в летнее солнцестояние день уменьшается и на экваторе также приближается к 12 часам. С увеличением широты φ долгота зимнего дня уменьшается и приближается к нулю. То есть наступает полярная ночь, а долгота летнего дня увеличивается до 24 часов и наступает полярный день.

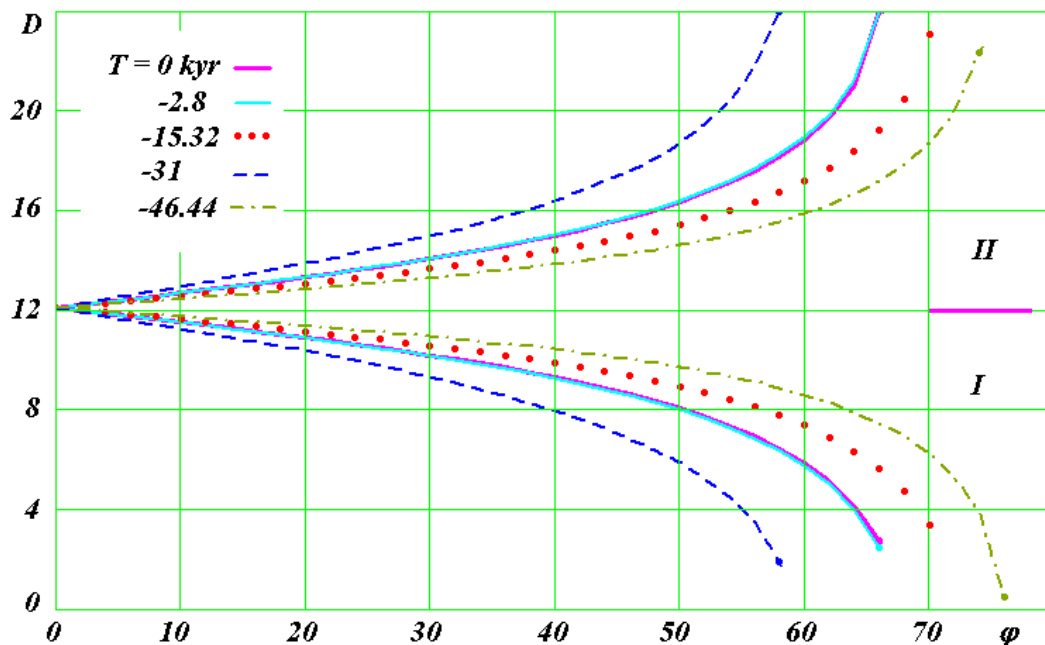


Рис. 9. Долгота светового дня D в моменты зимнего солнцестояния (I) и летнего солнцестояния (II) на разных широтах φ° Северного полушария в экстремальные эпохи T за последние 50 т.л.н.: T – время в тыс. лет от 30.12.1949 г.; D – долгота светового дня в часах.

Для остальных эпох изменения долготы дня изменяются подобным образом, но с разными наклонами зависимостей $D(\varphi)$. Например, для эпохи 31 т. л. н. полярные ночи и дни начинаются на меньших широтах, а в эпоху 46.44 т. л. н. – на больших широтах.

В Приложении в табл. 2П приведены долготы дней для летнего солнцестояния (D_s) и зимнего (D_w) для пяти разных эпох. Изменение широты φ дается через 2° , начиная с экватора. Широты изменяются до величин, после которых наступает полярный день ($D_s = 24$ часа) и полярная ночь ($D_w = 0$ часов).

5. Азимуты Солнца

5.1. Азимуты движения Солнца в течение суток

Азимут Солнца A_S отсчитывается на круге горизонта HH' (рис. 2) от точки севера N_{rd} до проекции Солнца в т. D за часовой стрелкой

$$A_S = N_{rd}S_{th} + S_{th}D = 2\pi - DN_{rd}. \quad (44)$$

В треугольнике $N_{rd}ZD$, две стороны которого $N_{rd}Z$ и ZD равны $\pi/2$, дуга DN_{rd} равняется углу Z . В треугольнике NZS известны две стороны: $NS = \pi/2 - \delta$ и $ZS = z$, а также угол $N = \omega$. По теореме синусов

$$\sin Z / \sin NS = \sin N / \sin ZS,$$

находим

$$\sin Z = \sin \omega \cdot \cos \delta / \sin z, \quad (45)$$

где дуга z является зенитным углом Солнца и согласно (7) определяется выражением:

$$z = \arccos(\sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos \omega). \quad (46)$$

Тогда с учетом (45) азимут Солнца (44) $A_S = 2\pi - Z$ запишется в радианах так:

$$A_{S,rad} = 2\pi - \arcsin(\sin \omega \cdot \cos \delta / \sin z). \quad (47)$$

Так как функция \arcsin в (47) неоднозначна и после достижения экстремальных значений $\pm \pi/2$ имеет изломы, то проводятся следующие операции. Вводится функция

$$Fn03 = \arcsin(\sin \omega \cdot \cos \delta / \sin z). \quad (48)$$

Находятся максимальные значения $mxFn$ функции $Fn03$ и минимальные ее значения $mnFn$. При изменении часового угла ω от $-\pi$ до π определяются индексы часового угла $in9$, соответствующего $mnFn$, и $in10$, соответствующего $mxFn$. В зависимости от этих индексов рассчитываются диапазоны индекса k часового угла ω_k и значения функции $Fn3$ так:

$$Fn3 = Fn03 \text{ при } ind9 \leq k \leq in10; \quad Fn3 = -\pi - Fn03 \text{ при } k < in9; \quad Fn3 = \pi - Fn03 \text{ при } k > in10. \quad (49)$$

Как видно из (48) при $\omega = 0$, в полдень, функция $Fn03$ может быть равной 0 или π . Согласно рис. 2 в полдень $Fn03 = N_{rd}D = \pi$. Тогда с учетом этого и (48) – (49) азимут Солнца в градусах в соответствии с (47) запишется так:

$$A_S = 180^\circ + (180^\circ/\pi) \cdot Fn3. \quad (50)$$

Следует отметить, что минимальное и максимальные значения $Fn03$ могут принадлежать не центральному участку. В этом случае на азимуте A_S при большом интервале между делениями ω будут всплески при переходе через $0.5 \cdot \pi$ и $1.5 \cdot \pi$. В этом случае нужно использовать следующее условие:

$F_n3 = F_n03$ при $ind9 < k < in10$; $F_n3 = -\pi - F_n03$ при $k \leq in9$; $F_n3 = \pi - F_n03$ при $k \geq in10$.

Этот алгоритм реализован в п. 13 программы SunPhenmn.mcd. На рис. 10 приведены азимуты движения Солнца по небосводу на широте Москвы в современную эпоху. Линией 1 показано изменение азимута в день весеннего равноденствия. Азимут Солнца в полночь $\omega = -12$ часов равен нулю и увеличивается на рассвете ($\omega \approx -6$ часов) до 90° . В течение дня продолжает увеличиваться: в полдень ($\omega = 0$ часов) до 180° и в полночь ($\omega = 12$ часов) достигает значения 360° . Вертикальными линиями показаны часы восхода и захода Солнца.

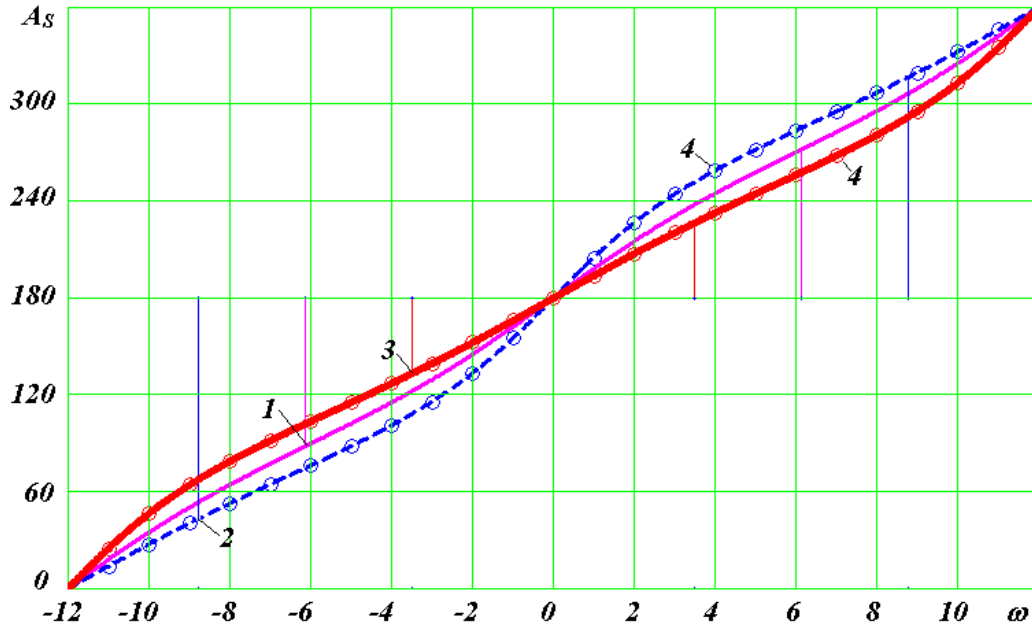


Рис. 10. Азимуты A_S на широте Москвы ($\varphi^\circ = 55.7522^\circ$) суточного движения Солнца в дни весеннего равноденствия (1), летнего (2) и зимнего (3) солнцестояний в современную эпоху 30.12.1949 г. Вертикальными линиями отмечены часовые углы восходов ($\omega < 0$) и заходов Солнца ($\omega > 0$). Кружками 4 отмечены часовые промежутки времени.

В дни солнцестояний: летнего (линия 2) и зимнего (линия 3) изменение азимутов происходит аналогичным образом, но границы дня существенно изменяются. Кроме того, по сравнению с изменением азимута в дни равноденствия, в эти дни характер изменения азимутов более существенно отличается от линейного закона. Нелинейный характер изменения A_S свидетельствует, что определение промежутков времени по азимуту Солнца или по тени гномона, будет характеризоваться соответствующей неравномерностью хода времени. На рис. 10 часовые промежутки нанесены кружками. Так как в дни равноденствий азимут A_S 1 изменяется наиболее близко к линейному закону, то равноденственные часы наиболее равномерны.

Условия (49) при вычислении азимута Солнца справедливы для нетропических широт. В тропических широтах Северного полушария широта φ меньше угла наклона ε , т.е. $\varphi - \varepsilon < 0$. Для зенитного угла z в полдень ($\omega = 0$) из (7) следует

$$z_n = \varphi - \delta. \quad (51)$$

Поэтому, как уже отмечалось, в день летнего солнцестояния ($\delta = \varepsilon$ см. рис. 2) зенитный угол в тропических широтах изменяется от

$$z_{ns} = \varphi - \varepsilon \quad (52)$$

до

$$z_{nw} = \varphi + \varepsilon \quad (53)$$

в день зимнего солнцестояния ($\delta = -\varepsilon$). Из (52) видно, что в день летнего солнцестояния зенитный угол z_{ns} становится отрицательным, т.е. для наблюдателя M (см. рис. 2) Солнце находится в северной стороне неба. В этом случае в полдень ($\omega = 0$) азимут Солнца $A_{Sn} = 0$, а не π , как в нетропических широтах. Следует отметить, что в этом случае суточное движение Солнца для наблюдателя M происходит на южной стороне неба справа налево, а не как на северной стороне слева направо, как это наблюдается в нетропических широтах.

Ситуации с отрицательным углом z_n , согласно (51), имеют место не только для дня летнего солнцестояния, но и для других дней. Поэтому необходимо определять номера дней, для которых $z_n < 0$. Тогда для рассмотренного случая тропических широт азимут Солнца запишется так:

$$A_{St} = (180/\pi) \cdot Fn03 \text{ при } z_n < 0. \quad (54)$$

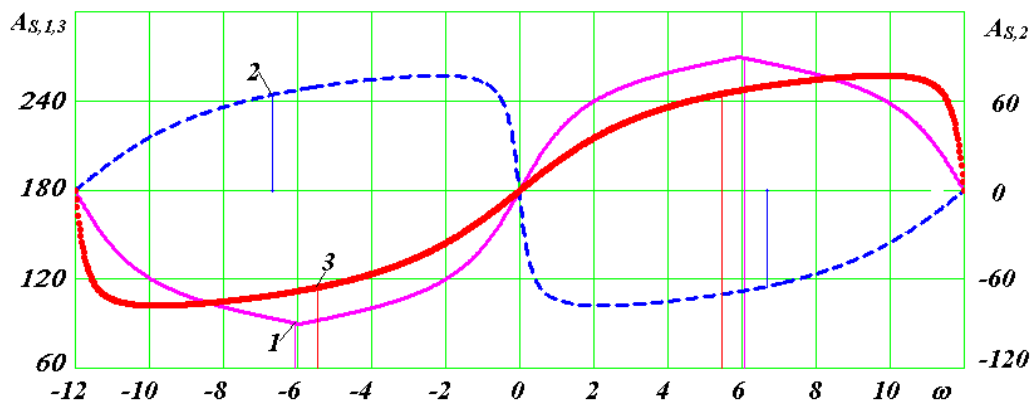


Рис. 11. Азимуты в тропических широтах ($\varphi^\circ = 20^\circ$) суточного движения Солнца в дни весеннего равноденствия 1, летнего 2 и зимнего 3 солнцестояний в современную эпоху 30.12.1949 г. Шкала азимута дня летнего солнцестояния 2 сдвинута на 180° (см. справа графика). Вертикальными линиями отмечены часовые углы восходов ($\omega < 0$) и заходов Солнца ($\omega > 0$).

Полностью алгоритм расчета азимута Солнца приведен в п. 13 программы SunPhenmn.mcd в Приложении. На рис. 11 представлено изменение азимута Солнца в

течение суток на широте $\varphi = 20^\circ$. В день весеннего равноденствия 1 и зимнего солнцестояния 3 азимут Солнца изменяется от 180° в полночь ($\omega = -12$ часов) до некоторого минимального значения. Для зимнего солнцестояния 3 оно приходится на ночь, а для весеннего равноденствия – на рассвет. В полдень азимут Солнца снова равняется 180° , т.е. Солнце находится в южной стороне неба. При движении Солнца от полдня к полночи оно проходит максимальные значения азимута и в полночь снова приходит на юг ($A_S = 180^\circ$).

В день летнего солнцестояния (линия 2, правая шкала графика) Солнце в полночь находится на Севере ($A_S = 0^\circ$), затем движется по северной стороне неба ($A_S < 90^\circ$). Перед полднем ($\omega \approx 1$ час) достигает максимального отклонения к востоку и в полдень возвращается на север ($A_S = 0^\circ$). После полдня Солнце переходит в западную сторону неба и достигает максимального отклонения к западу ($A_S \approx 70^\circ$). К полночи Солнце снова возвращается на север ($A_S = 0^\circ$). Следует отметить, что здесь мы использовали для определения азимута шкалу не от 0 до 360° , а от -180° до 180° . Это позволяет избежать разрыва графика на интервале часового угла ω от -12 часов до $+12$ часов.

В нетропических широтах суточное движение Солнца происходит по полному кругу вокруг наблюдателя M , т.е. $A_S = 0 \div 2\pi$. В тропических широтах суточный круг движения Солнца происходит в стороне от наблюдателя: летом (линия 2) в северной стороне неба, зимой, включая дни равноденствия, (линии 1 и 3) – в южной стороне неба.

5.2. Проекция дневного пути Солнца на плоскости горизонта

Рассмотрим проекцию на плоскость горизонта дневное движение Солнца. Положение Солнца S (рис. 2) над плоскостью горизонта HH' определяется зенитным углом z и углом азимута A_S , который определяется дугой $N_{rd}S_rS_{th}D$. На плоскости горизонта введем две оси координат с началом в точке M : N_S – направленная на Север N_{rd} и E_S – направленная на Восток E_{st} . Тогда проекции центра Солнца на эти оси запишутся так:

$$N_S = \sin z \cdot \cos A_S; \quad E_S = \sin z \cdot \sin A_S, \quad (55)$$

где A_S – азимут Солнца в радианах.

Выражением (55) также определяются координаты N_S , E_S точек восхода и захода верхнего края Солнца, если углами z и A_S будут определены их моменты времени. На рис. 12 проекции дневного пути Солнца показаны для трех случаев: в день весеннего равноденствия и в дни солнцестояний на широте Москвы.

В день весеннего равноденствия центр Солнца всходит на Востоке и заходит на Западе. А восход и заход верхнего края Солнца немного сдвигается на Север. Летом

восход и заход Солнца находится в северной части горизонта. С увеличением широты φ траектория 2 Солнца будет приближаться к окружности. На широте, где траектория станет окружностью, наступит полярный день.

В день зимнего солнцестояния траектория 3 Солнца укорачивается и находится в южной стороне неба. С увеличением широты длина ее уменьшается, и там, где траектория исчезает, наступает полярный день.

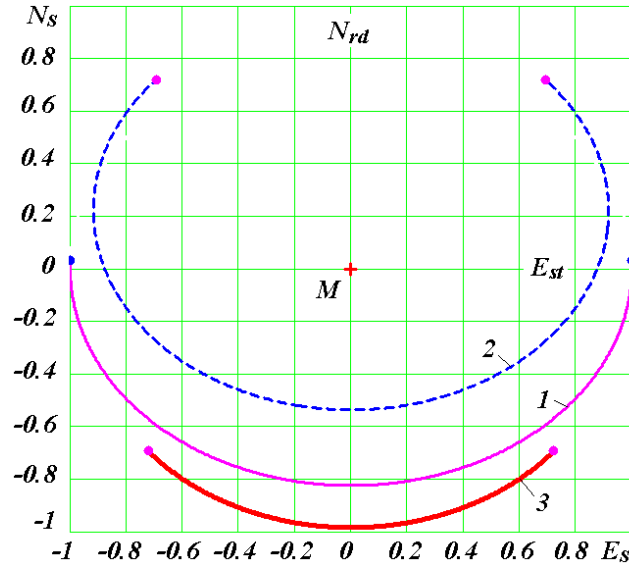


Рис. 12. Проекция дневного пути Солнца на плоскости горизонта на широте Москвы ($\varphi = 55.7522^\circ$) в современную эпоху 30.12.1949 г.: 1 – в дни весеннего равноденствия; 2 – летнего и 3 – зимнего солнцестояний. Ось N_s направлена на Север (N_{rd}), а ось E_s – на восток (E_{st}). Положение наблюдателя (M) в начале координат отмечено крестиком. Точками на линиях отмечены восходы верхнего края Солнца (с правой стороны) и его заходы (с левой стороны).

Следует отметить, что конечные точки на траектории Солнца в дни равноденствий 1 и в дни солнцестояний 2 и 3 играют ключевую роль в древних астрономических календарях [9]-[10]. Представленный в п. 15 программы SunPhnmen.mcd алгоритм позволяет рассчитать их для любой эпохи.

5.3. Азимуты восходов и заходов Солнца

В отличие от азимутов суточного движения Солнца азимуты точек восхода и захода необходимо отсчитывать до точек появления и исчезновения верхнего края Солнца. Как видно из рис. 2 и рис. 6, азимут наблюдаемой точки G захода края Солнца состоит из дуг на круге горизонта HH'

$$A_{Gs} = N_{rd}E_{st}S_{th}W_{st} + W_{st}S_s + S_sG, \quad (56)$$

где E_{st} и W_{st} – точки Востока и Запада на круге горизонта.

Дуга $N_{rd}E_{st}S_{th}W_{st}$ равна $1.5 \cdot \pi$ (см. рис. 2). Через точку S_s и полюс N проведена дуга большого круга S_sF , поэтому она перпендикулярна дуге экватора AA' , т.е. угол $F = 0.5 \cdot \pi$.

Дуга S_sF равна δ . В треугольнике S_sFW_{st} угол $W_{st} = \pi/2 - \varphi$. Поэтому дуга $W_{st}S_s$ определяется по теореме синусов

$$W_{st}S_s = \arcsin(\sin\delta/\cos\varphi). \quad (57)$$

Сторона GS_s может быть найдена из треугольника $GS_{sI}S_s$. (см. рис. 6), в котором угол $S_s = W_{st} = \pi/2 - \varphi$. В виду малости треугольника, его можно рассматривать как плоский и линейный со сторонами $R_E \cdot GS_{sI}$ и $R_E \cdot GS_s$, где R_E – радиус Земли. Для угла S_s можно записать: $\text{tg}(\pi/2 - \varphi) = R_E \cdot GS_{sI} / (R_E \cdot GS_s)$. Отсюда получаем:

$$GS_s = GS_{sI} \cdot \text{tg} \varphi. \quad (58)$$

Подставляя в (56) составляющие получим азимут точки захода Солнца в градусах в виде:

$$A_{Gs} = (180/\pi) \cdot (1.5\pi + \arcsin(\sin\delta/\cos\varphi) + GS_{sI} \cdot \text{tg}\varphi). \quad (59)$$

Ввиду того, что $\sin\delta/\cos\varphi$ по модулю может превышать 1, введем обозначение:

$$Fn04 = \sin\delta/\cos\varphi \quad (60)$$

и определим функцию:

$$Fn4 = Fn04 \text{ при } -1 \leq Fn04 \leq 1; \quad Fn4 = -1 \text{ при } Fn04 < -1; \quad Fn4 = 1 \text{ при } Fn04 > 1. \quad (61)$$

Тогда азимут точки захода Солнца будет:

$$A_{Gs} = (180/\pi) \cdot (1.5\pi + \arcsin(Fn4) + GS_{sI} \cdot \text{tg}\varphi). \quad (62)$$

Чтобы рассчитать азимут точки восхода, обозначим точку S_{rI} видимого восхода края Солнца на дуге M_nS_r (на рис. 2 эта точка не приведена). Она находится под горизонтом HH' и дуга $S_{rI}S_r$ равна по величине дуге $S_{sI}S_s$ (см. рис. 6), т.е. $S_{rI}S_r = S_{sI}S_s$. Поэтому точка наблюдаемого восхода края Солнца G_s будет ближе к точке севера N_{rd} на величину дуги $S_rG_I = S_sG$. Тогда азимут наблюдаемой точки G_s восхода будет определяться следующими дугами:

$$A_{Gr} = N_{rd}E_{st} - E_{st}S_r - S_rG_r, \quad (63)$$

где точка E_{st} находится в пересечении кругов горизонта HH' и экватора AA' , а ее азимут $N_{rd}E_{st} = \pi/2$. Дуга $E_{st}S_r = W_{st}S_s$. Подставляя в (63) все составляющие азимут точки восхода края Солнца с учетом (60)-(61) получаем в виде:

$$A_{Gr} = (180/\pi) \cdot (0.5\pi - \arcsin(Fn4) - GS_{sI} \cdot \text{tg}\varphi). \quad (64)$$

Как видим из (62) и (64) сумма азимутов восходов и заходов

$$A_{Gs} + A_{Gr} = 360^\circ. \quad (65)$$

Сумма $A_{Gs} + A_{Gr}$ может отличаться от 360° , если горизонт в восточной части отличается от горизонта в западной части высотой окружающей местности. Приведенные

формулы для азимутов не учитывают этой особенности и дают симметричные азимуты восходов и заходов относительно направления MN_{rd} на север (рис. 2).

На рис. 13 показано изменение азимута точки восхода края Солнца A_{Gr} в течение года на разных широтах. Например, на широте $\varphi = 60^\circ$ в момент весеннего равноденствия ($T_d = 1$) азимут $A_{Gr} = 87.76^\circ$, затем он уменьшается до 35.84° в день летнего солнцестояния. В момент осеннего равноденствия $A_{Gr} = 88.23^\circ$, а затем увеличивается до $A_{Gr} = 141.27^\circ$ в день зимнего солнцестояния.

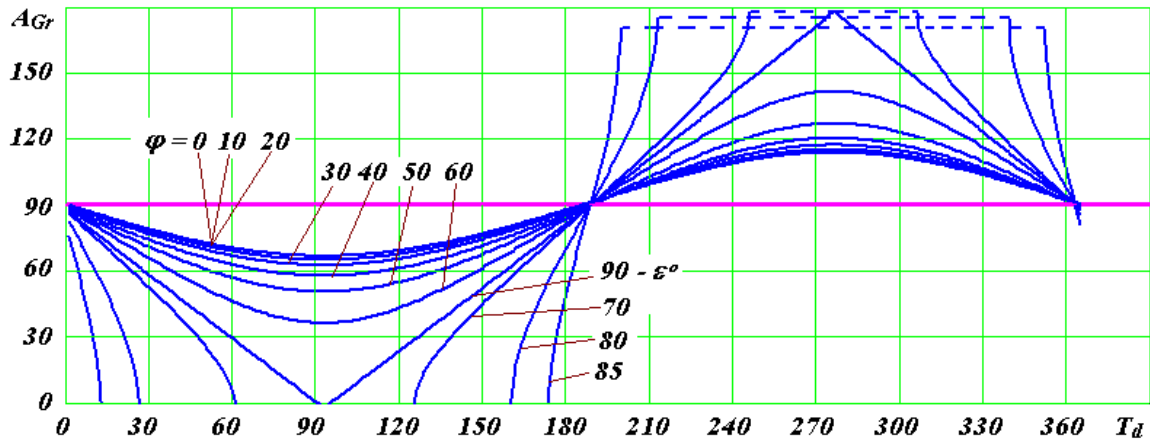


Рис. 13. Азимуты восходов верхнего края Солнца в современную эпоху 30.12.1949 г. в течение года на разных широтах φ° Северного полушария: A_{Gr} – азимуты восходов Солнца в градусах.

С уменьшением широты φ экстремумы азимута Солнца A_{Gr} уменьшаются и на экваторе ($\varphi = 0^\circ$) приближаются к 66.56° в день летнего солнцестояния и к 113.44° в день зимнего солнцестояния. С увеличением широты $\varphi > 60^\circ$ наименьший азимут точки восхода края Солнца A_{Gr} в день летнего солнцестояния приближается к 0° , т.е. Солнце восходит на Севере. На полярном круге ($\varphi = 90^\circ - \varepsilon^\circ$) наступает полярный день. С увеличением широты в день зимнего солнцестояния ($T_d = 276$) азимута Солнца A_{Gr} увеличивается до 180° на полярном круге ($\varphi = 90^\circ - \varepsilon^\circ$), т.е. Солнце восходит на Юге. С дальнейшим увеличением широты наступает полярная ночь.

Следует отметить, что графики на рис. 13 напоминают графики долготы светового дня на рис. 7, если их перевернуть вокруг горизонтальной линии $A_{Gr} = 90^\circ$. Азимуты точки захода края Солнца A_{Gs} , как следует из (65), $A_{Gs} = 360^\circ - A_{Gr}$, поэтому их графики будут похожи на графики долготы светового дня на рис. 7.

5.4. Экстремальные азимуты восходов и заходов Солнца в дни солнцестояний

Наибольшие азимуты заходов и наименьшие азимуты восходов верхнего края Солнца имеют место в день летнего солнцестояния $\lambda_s = \pi/2$. В день зимнего

солнцестояния $\lambda_s = 1.5 \cdot \pi$ экстремумы азимутов становятся обратными: азимуты заходов – наименьшие, а азимуты восходов – наибольшие. Приведем предельные азимуты восходов (64) в день летнего солнцестояния:

$$A_{Grsm} = (180/\pi) \cdot (0.5\pi - \arcsin(\sin\varepsilon/\cos\varphi) - (9.8902 \cdot 10^{-3} + 4.6599 \cdot 10^{-3}/\rho_s) \cdot \text{tg}\varphi) \quad (66)$$

и в день зимнего солнцестояния:

$$A_{Grwn} = (180/\pi) \cdot (0.5\pi + \arcsin(\sin\varepsilon/\cos\varphi) - (9.8902 \cdot 10^{-3} + 4.6599 \cdot 10^{-3}/\rho_w) \cdot \text{tg}\varphi). \quad (67)$$

Азимуты заходов Солнца (62) в дни солнцестояний запишутся аналогичным образом. При вычислениях по формулам (66)-(67) в алгоритм необходимо ввести условия, чтобы избежать $|\sin\varepsilon/\cos\varphi| > 1$ (см. п. 14 программы в Приложении).

Результаты расчетов азимуты восходов Солнца в дни солнцестояний по формулам (66) - (67) для пяти разных эпох даны на рис. 14. Графики представляют изменение азимута A_{Gr} по широтам φ Северного полушария. Для летнего солнцестояния азимуты $A_{Gr} \leq 90^\circ$ отмечены как область I, а для зимнего солнцестояния – как область II.

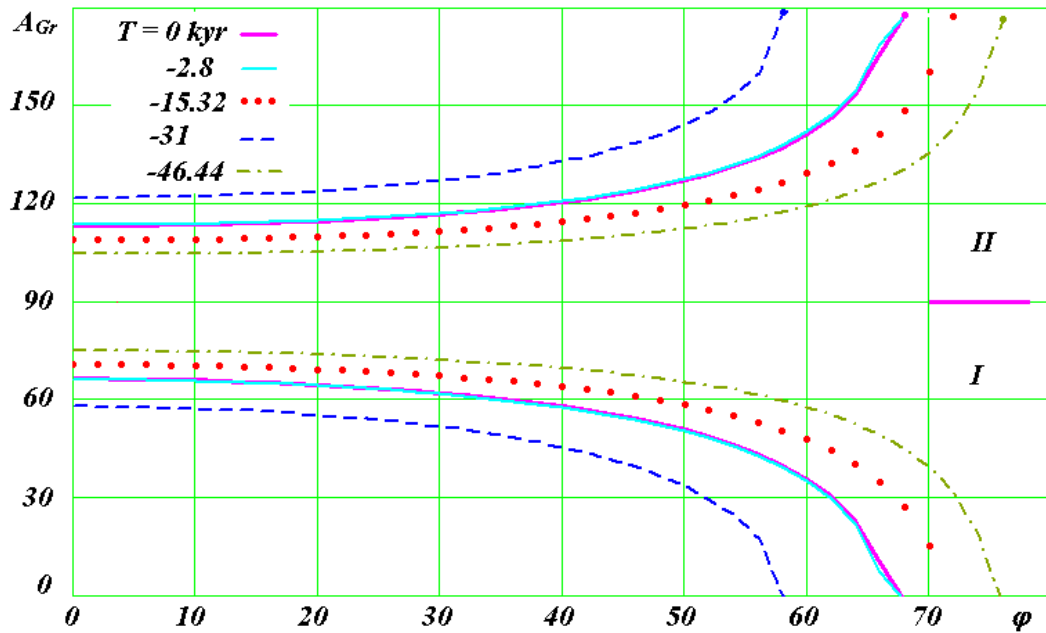


Рис. 14. Азимуты восходов верхнего края Солнца в моменты летнего солнцестояния (I) и зимнего солнцестояния (II) на разных широтах φ° Северного полушария в экстремальные эпохи T за последние 50 т.л.н.: T – время в тыс. лет от 30.12.1949 г.; A_{Gr} – азимуты восходов Солнца в градусах.

В современную эпоху, как видно из рис. 14, на широте 50° в летнее солнцестояние азимут восхода Солнца A_{Gr} равен 50.77° , а в зимнее – 127.24° . С уменьшением широты азимут восхода увеличивается и приближается к 66.56° на экваторе. А в зимнее солнцестояние азимут восхода уменьшается и на экваторе приближается к 113.44° . С увеличением широты φ азимут восхода A_{Gr} дня летнего солнцестояния уменьшается и

приближается к нулю. То есть Солнце восходит на Севере и наступает полярный день. А азимут восхода A_{Gr} дня зимнего солнцестояния с увеличением широты φ увеличивается до 180° и наступает полярная ночь.

Для остальных эпох изменения азимута восхода Солнца A_{Gr} происходит подобным образом, но с разными наклонами зависимостей $A_{Gr}(\varphi)$. Например, для эпохи 31 т. л. н. полярные ночи и дни начинаются на меньших широтах, а в эпоху 46.44 т. л. н. – на больших широтах.

Следует отметить, что графики на рис. 14 напоминают графики долготы светового дня D в разные эпохи на рис. 9, однако области I и II у них разные. Азимуты точки захода края Солнца, например, в день летнего солнцестояния A_{Gss} , как следует из (65), $A_{Gss} = 360^\circ - A_{Grsm}$. Поэтому графики A_{Gssm} и A_{Gswm} будут похожи на графики долготы светового дня на рис. 9.

В Приложении в табл. 3П приведены азимуты восходов Солнца для летнего солнцестояния (A_{Grsm}) и зимнего (A_{Grwn}) для пяти разных эпох. Изменение широты φ дается через 2° , начиная с экватора. Широты изменяются до величин, после которых наступает полярный день ($A_{Grsm} = 0^\circ$) и полярная ночь ($A_{Grwn} = 180^\circ$).

6. Солнечная тень гномона

6.1. Относительная длина тени гномона

Гномоном (др.-греч. γνόμων – указатель) называется предмет, тень от которого используется в солнечных и лунных часах и календарях. На рис. 15 показана длина тени l_{sh} вертикального гномона длиной l_g , которая возникает от верхнего края Солнца. Величина l_{sh} зависит от зенитного угла z Солнца и его углового радиуса S . Ранее формулой (21) величина S приводилась в виде дуги KS_{sl} на рис. 6. Как следует из рис. 15, относительная длина тени гномона будет:

$$l_{shl} = l_{sh}/l_g = \operatorname{tg}(z - S) = \operatorname{tg}(z - 4.6599 \cdot 10^{-3}/\rho), \quad (68)$$

где зенитный угол z Солнца определяется выражением (46).

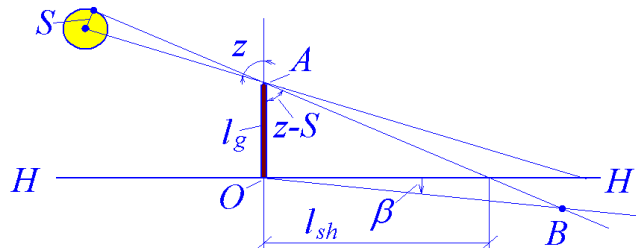


Рис. 15. Длина тени l_{sh} гномона длиной l_g при освещении его солнцем S .

Чтобы избежать отрицательных значений относительной длины теней l_{shl} расчет проводится по следующему алгоритму:

$$Fn06 = z - 4.6599 \cdot 10^{-3} / \rho; \quad (69)$$

$$Fn6 = Fn06 \text{ при } -0.5 \cdot \pi \leq Fn0 \leq 0.5 \cdot \pi; \quad Fn6 = -0.5 \cdot \pi \text{ при } Fn06 < -0.5 \cdot \pi;$$

$$Fn6 = 0.5 \cdot \pi \text{ при } Fn06 > 0.5 \cdot \pi; \quad (70)$$

$$l_{sh10} = \text{tg}(Fn6); \quad l_{sh1} = l_{sh10} \text{ при } l_{sh10} > 0; \quad l_{sh1} = 0 \text{ при } l_{sh10} < 0. \quad (71)$$

6.2. Изменение длины тени в течение дня

По алгоритму (69)-(71) рассчитано изменение относительной длины тени l_{shl} гномона в течение суток для трех разных дней на широте г. Москвы и для одного дня на широте г. Тюмени (рис. 16). В левой части графика вертикальными линиями показаны часовые углы восходов Солнца, а в правой – часовые углы его заходов. Так как в эти моменты длина тени стремится к бесконечности, и ординату l_{shl} графика приходится ограничивать, то асимптотическое приближение линий l_{shl} к вертикальным линиям восходов и заходов находится вне рисунка.

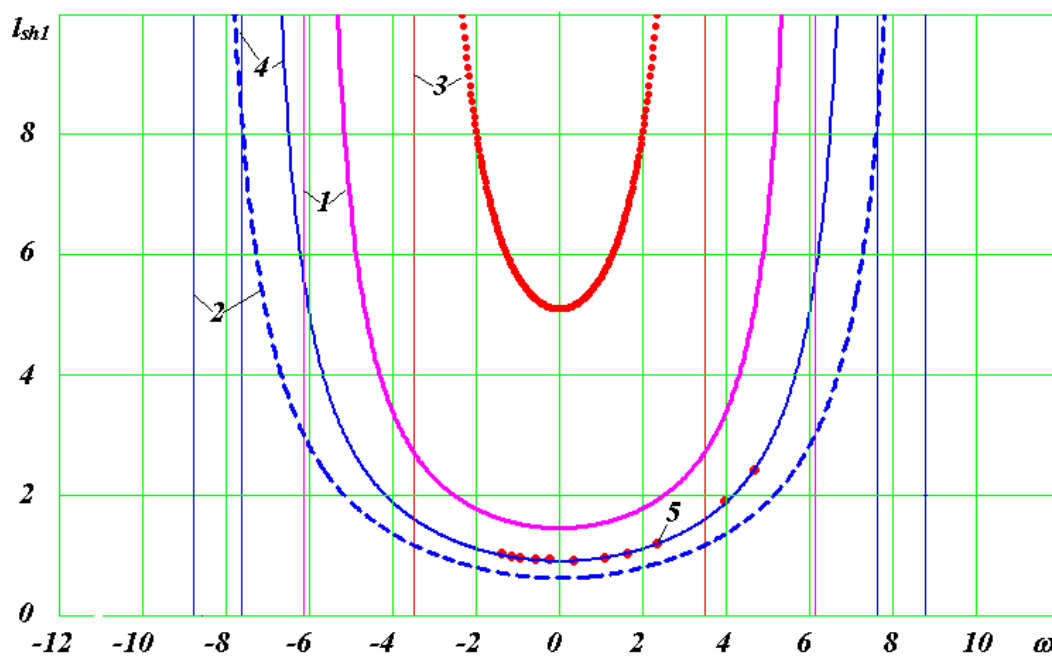


Рис. 16. Изменение длины солнечной тени гномона единичной длины в течение суток в дни весеннего равноденствия 1, летнего 2 и зимнего 3 солнцестояний на широте Москвы ($\varphi^\circ = 55.7522^\circ$) в современную эпоху 30.12.1949 г. 4 – длина солнечной тени гномона 15 августа 2015 г. вблизи Тюмени ($\varphi^\circ = 57.301575^\circ$) по расчету и 5 – по наблюдениям. Вертикальными линиями отмечены часовые углы восходов ($\omega < 0$) и заходов Солнца ($\omega > 0$).

Как видно из рис. 16, в день весеннего равноденствия (линия 1) длина тени l_{shl} после восхода Солнца ($\omega < 0$) уменьшается и в полдень ($\omega = 0$) достигает минимального значения $l_{sh1} = 1.433$. Затем она увеличивается до бесконечности в момент захода Солнца

($\omega > 0$). В день летнего солнцестояния (линия 2) минимальная длина тени уменьшается до $l_{shl} = 0.626$, а в день зимнего солнцестояния минимальная длина тени увеличивается до $l_{shl} = 5.108$. Таким образом, на широте г. Москвы длина полуденной тени изменяется в пределах $5.108 \geq l_{shl} \geq 0.626$.

Рассмотрим траекторию движения тени конца гномона в координатах N_{sh}, E_{sh} , где ось N_{sh} направлена на Север, а ось E_{sh} – на Восток. Азимут тени A_{sh} отсчитывается от оси N_{sh} и выражается через азимут Солнца так: $A_{sh} = A_S + 180^\circ$. Тогда проекции тени на плоскость горизонта запишутся:

$$N_{sh} = l_{shl} \cdot \cos A_{sh} = -l_{shl} \cdot \cos A_S; \quad E_{sh} = -l_{shl} \cdot \sin A_S. \quad (72)$$

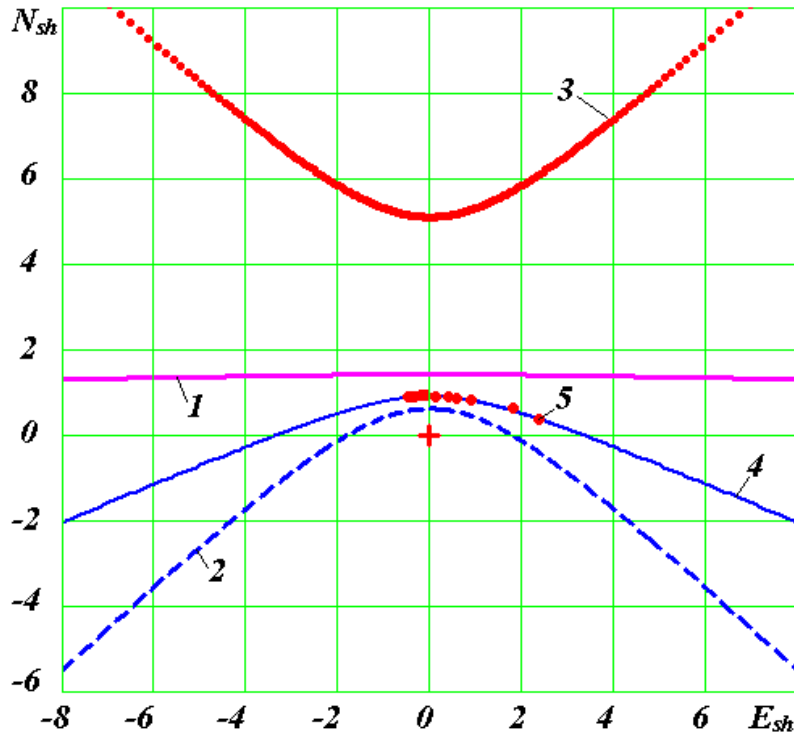


Рис. 17. Суточная траектория тени конца гномона единичной длины на плоскости горизонта $N_{sh}(E_{sh})$ в дни весеннего равноденствия 1, летнего 2 и зимнего 3 солнцестояний на широте Москвы ($\varphi^\circ = 55.7522^\circ$) в современную эпоху 30.12.1949 г. 4 – траектория тени гномона 15 августа 2015 г. вблизи Тюмени ($\varphi^\circ = 57.301575^\circ$) по расчету и 5 – по наблюдениям. Ось N_{sh} направлена на Север, а ось E_{sh} – на восток. Положение гномона в начале координат отмечено крестиком.

На рис. 17 показана траектория дневной тени конца гномона относительной длины для трех дней на широте г. Москвы и одного дня на широте г. Тюмени. В начале координат крестиком отмечено положение гномона. На широте г. Москвы в день весеннего равноденствия (линия 1) конец тени гномона движется с Запада ($E_{sh} < 0$) на Восток почти по прямой линии. При этом тень находится севернее гномона. В день летнего солнцестояния тень гномона (линия 2) начинает утром движение с Юго-запада и

заканчивает движение вечером на Юго-востоке. Только вблизи полудня, ± 2 часа, тень находится севернее гномона. Линией 3 показано, что в день зимнего солнцестояния тень полностью движется на Севере от гномона.

6.3. Измерение длины тени гномона

С целью проверки полученных результатов на местности, недалеко от г. Тюмени, были выполнены наблюдения за перемещением тени гномона. На рис. 18 показан нехитрый инструментарий из подсобных материалов: лист ватмана, компас, карандаш, металлический прут, рулетка и отвес, с помощью которого выполнены наблюдения. Наблюдения проводились 15.08.2015 г., что составляет $T_d = 148$ день после дня весеннего равноденствия 21 марта. Вдоль тени карандашом проводились линии на ватмане и отмечались конец тени и время ее наблюдения. Затем были замерены азимуты A_{shM} теней от направления от направления на Север N_M , определенный по компасу.

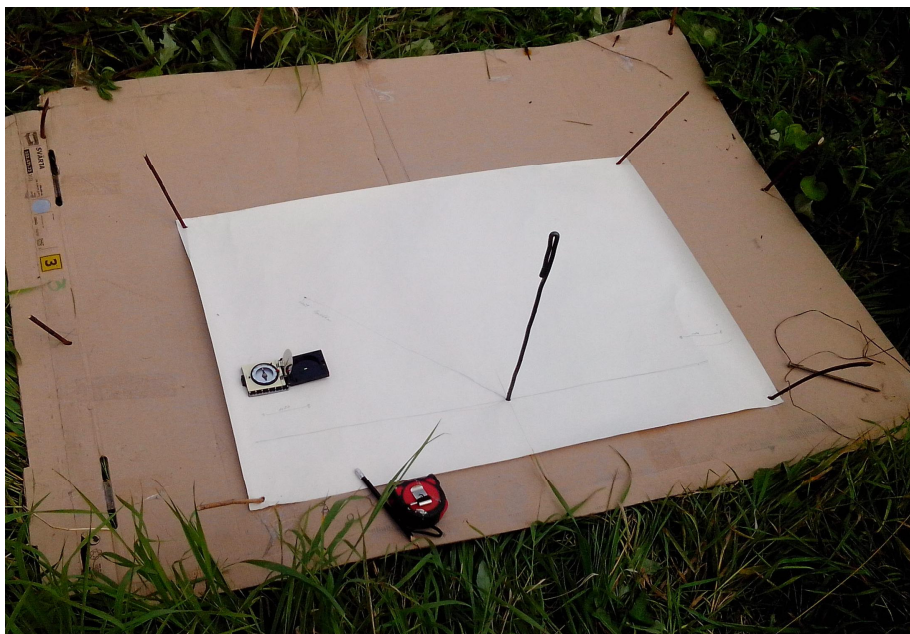


Рис. 18. Наблюдение тени гномона 15 августа 2015 г. вблизи Тюмени ($\varphi^\circ = 57.301575^\circ$) и основные инструменты: лист ватмана, компас, карандаш, металлический прут диаметром 6 мм – гномон, рулетка и отвес.

На рис. 19 показаны результаты наблюдений в виде зависимости относительной длины тени l_{shl} от времени в г. Тюмени t_m . Как видно, минимум l_{shl} приходится на время t_m отличное от 12 часов. На рис. 16 данные наблюдения точками 5 нанесены на рассчитанную согласно (69)-(71) зависимость 4 $l_{shl}(\omega)$. Положение полдня ($\omega = 0$) приходится на 12 ч. 44 мин тюменского времени.

Для рассматриваемой широты места наблюдения и дня $T_d = 148$ по формуле (50) был рассчитан азимуты A_S Солнца. Аналогично рис. 10 он был представлены в виде

графика $A_S(\omega)$. В этих же координатах нанесены определенные азимуты Солнца A_{SM} по замеренным азимутам тени $A_{SM} = A_{shM} - 180^\circ$. Азимуты A_{SM} оказались эквидистантно сдвинуты на $\Delta A = 14.47059^\circ$ вниз по отношению к азимутам A_S , т.е. $A_{SM} < A_S$. Это обусловлено тем, что Северный магнитный полюс сдвинут к Востоку на величину ΔA по отношению к географическому Северному полюсу.

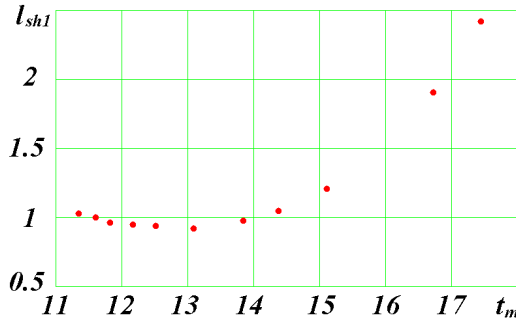


Рис. 19. Результаты наблюдения относительной длины тени l_{shl} гномона в зависимости от времени t_m в г. Тюмени 15 августа 2015 г. на широте $\varphi^\circ = 57.301575^\circ$.

Скорректированные данные измерения азимута тени и времени ее наблюдения использованы для расчета по формулам (72) ее траектории. На рис. 17 она нанесена точками 5. Как видим, измеренная траектория тени гномона 5 совпала с рассчитанной 4. Некоторый разброс точек 5 вокруг линии 4 объясняется погрешностью измерений.

Итак, выполненные наблюдения и измерения тени гномона подтвердили представленный алгоритм её расчета. Кроме того, измерения позволили определить истинный полдень в 12 ч. 44 мин тюменского времени и восточное отклонение ΔA магнитной стрелки. Следует отметить, что азимут солнечного полдня и его время наступления можно непосредственно определить по данным наблюдения, представленным на рис. 19. Но для этого наблюдения необходимо производить более часто и за больший промежуток времени.

6.4. Полуденная длина тени гномона в течение года

Как видно из рис. 16, наименьшая тень наступает в полдень ($\omega = 0$). В этом случае зенитный угол z_n центра Солнца определяется выражением (51), тогда в соответствии с (68) единичная длина полуденной тени запишется так

$$l_{sIn} = \text{tg}(\varphi - \delta - 4.6599 \cdot 10^{-3} / \rho). \quad (73)$$

Алгоритм расчета относительной длины тени в п. 17.3 программы SunPhnmen.mcd приведен с учетом особенностей функции tg . Результаты расчетов изменения длины полуденной тени в течение года на разных широтах Северного полушария показаны на рис. 20. В этих расчетах ввиду незначительного влияния относительного расстояния ρ принято $\rho = 1$. Как видно из рис. 20, на широте $\varphi = 60^\circ$ в день весеннего равноденствия ($T_d = 0$) длина относительной полуденной тени $l_{sIn} = 1.687$. Затем она уменьшается и в день летнего солнцестояния достигает минимального значения 0.734. Далее увеличивается и

принимает максимальное значение 8.351 в день зимнего солнцестояния. С увеличением широты φ минимальные и максимальные значения возрастают, а с уменьшением φ – уменьшаются. В тропических широтах ($\varphi < \varepsilon$) зависимость $l_{sIn}(\varphi)$ имеет два максимума и два минимума. В минимумах длина тени равна нулю: в эти моменты Солнце находится в зените. А максимумы l_{sIn} наступают в дни солнцестояний.

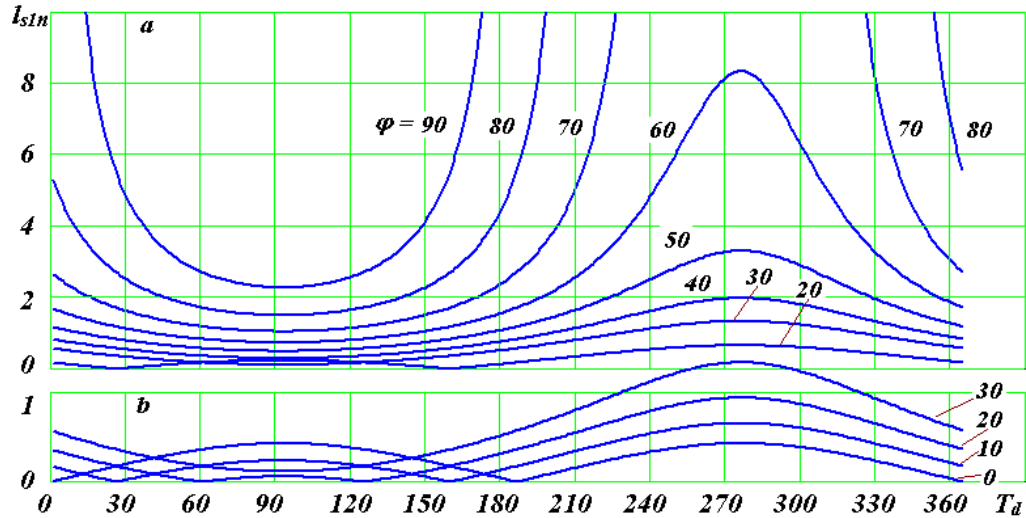


Рис. 20. Длина полуденной солнечной тени гномона единичной длины l_{sIn} в зависимости от дней года T_d в современную эпоху 30.12.1949 г. на разных широтах φ° Северного полушария: *a* – в обычном масштабе; *b* – при увеличении ординаты l_{sIn} в 2 раза.

6.5. Экстремальные длины солнечной тени гномона в дни солнцестояний

Как показано выше, экстремальные длины теней происходят в дни солнцестояний, которые характеризуются углом $\delta = \pm\varepsilon$. Тогда из (73) с учетом $\rho = 1$ получаем относительные длины теней

$$l_{sIs} = \text{tg}(\varphi - \varepsilon - 4.6599 \cdot 10^{-3}); \quad l_{sIw} = \text{tg}(\varphi + \varepsilon - 4.6599 \cdot 10^{-3}), \quad (74)$$

для дней летнего и зимнего солнцестояний, соответственно. С учетом особенностей функции tg алгоритм расчета приведен в п. 17.3 программы SunPhnmen.mcd.

Результаты расчетов экстремальных длин тени для пяти разных эпох в зависимости от широты φ даны на рис. 21. Шкала для длин теней в летнее солнцестояние l_{sIs} приведена справа, а для зимнего солнцестояния l_{sIw} – слева. В современную эпоху, как видно из рис. 21 при $T = 0$, в полдень летнего солнцестояния на экваторе ($\varphi = 0$) длина тени $l_{sIs} = 0.428$. Затем она уменьшается на тропике $\varphi \approx \varepsilon$ до 0, а с дальнейшим увеличением широты длина тени возрастает до $l_{sIs} = 2.277$ на широте $\varphi = 90^\circ$.

В другие эпохи графики полуденной тени в летнее солнцестояние почти эквидистантно сдвигаются по широте φ , в зависимости от угла наклона ε . На широтах $\varphi = \varepsilon$ длина тени равна нулю: $l_{sIs} = 0$.

В современную эпоху ($T = 0$) в полдень зимнего солнцестояния на экваторе ($\varphi = 0$) длина тени $l_{slw} = 0.428$, т.е. такая же, как и в полдень летнего солнцестояния. Затем она с увеличением широты φ растет до бесконечности до широты $\varphi = 90^\circ - \varepsilon^\circ$ полярного круга, где начинается полярная ночь. В другие эпохи полуденная тень на экваторе изменяется от 0.259 ($T = 46.44$ т.л.н.) до 0.618 ($T = 31$ т.л.н.). С увеличением широты длины теней в день зимнего солнцестояния увеличиваются во все эпохи и тем в большей степени, чем меньше широта полярного круга ($90^\circ - \varepsilon^\circ$).

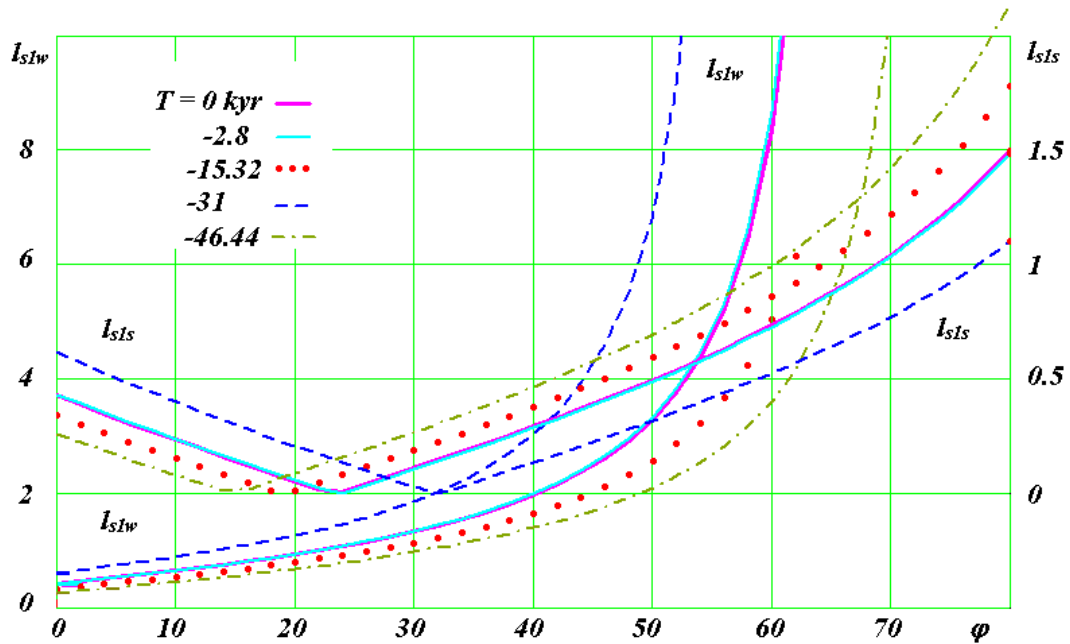


Рис. 21. Тени гномона единичной длины в полдни летнего солнцестояния (l_{slS}) и зимнего солнцестояния (l_{slw}) на разных широтах φ° Северного полушария в экстремальные эпохи T за последние 50 т.л.н.: T – время в тыс. лет от 30.12.1949 г.; масштабы длин l_{slw} и l_{slS} – разные и отличаются в 4 раза.

В приложении в табл. 4П приведены длины полуденных теней в дни летнего (l_{slS}) и зимнего (l_{slw}) солнцестояний для пяти разных эпох. Изменение широты φ дается через 2° , начиная с экватора до широты 80° . Бесконечная длина тени выражена числом $1.6e+16$.

7. Основные феномены Солнца

Подведем итоги по основным феноменам Солнца. Освещение Солнцем поверхности в точке нахождения наблюдателя M (см. рис. 2), т.е. ее инсоляция, зависит от эксцентриситета e орбиты Земли, угла наклона ε плоскости экватора Земли к плоскости ее орбиты, угла φ_{py} между перигелием орбиты Земли и восходящим углом γ и широты места φ [11]. Эти четыре параметра создают разнообразие инсоляции поверхности Земли, из которого наблюдатель может определить следующие основные 6 явлений, или феноменов (см. табл. 3). Первым феноменом является количество дней до начала сезона T_d ,

отсчитываемое от момента весеннего равноденствия. Для весны $T_{dsp} = 0$, для лета наблюдатель определяет количество дней до летнего солнцестояния T_{dsm} , для осени – до момента осеннего равноденствия T_{dau} и для зимы – до момента зимнего солнцестояния T_{dwn} . С этим феноменом также связана продолжительность сезонов ΔT_d , которая, согласно (6) рассчитывается по разности величин T_d . В рассмотренном выше алгоритме начала сезонов определяются долготами $\lambda = 0; \pi/2; \pi; 3\pi/2$. По зависимости $\lambda(T_d)$, определяется время T_d в днях до начала каждого сезона. Этот феномен не зависит от широты φ наблюдателя, а определяется только параметрами e , δ и φ_{py} .

Таблица 3. Основные феномены Солнца

№ п/п	Наименование	Параметр	Сезоны и долготы λ их начала			
			Весна 0	Лето $\pi/2$	Осень π	Зима $3\pi/2$
1	Количество дней до начала сезона	T_d , дни	0	T_{dsm}	T_{dau}	T_{dwn}
2	Длительность полярных дней и ночей	$\Delta T_{dd,n}$, дни	–	ΔT_{dd}	–	ΔT_{dn}
3	Зенитные углы Солнца в полдни равноденствий и солнцестояний	z_n	z_{nsp}	z_{nsm}	z_{nau}	z_{nwn}
4	Долгота светового дня в дни солнцестояний	D , часы	–	D_s	–	D_w
5	Азимуты восхода Солнца в дни равноденствий и солнцестояний	A_{Gr}	A_{Grsp}	A_{Grsm}	A_{Grau}	A_{Grwn}
6	Относительные длины теней гномона в полдни равноденствий и солнцестояний	l_{sln}	l_{slsp}	l_{sls}	l_{slau}	l_{slw}

Второй феномен, характерный для высоких широт, – это длительность в днях полярных дней (ΔT_{dd}) и полярных ночей (ΔT_{dn}). Наблюдатель на широте φ своего места может определить длительность полярных ночи и дня. А в теории полярные ночи и дни определяются долготами λ_{pd} и λ_{pn} (см. формулы (35)- (36)), по которым длительность этих феноменов рассчитывается по зависимости $\lambda(T_d)$. Этот феномен сильно зависит от широты φ наблюдателя. Поэтому он в наибольшей степени находит для уточнения широты палеонаблюдателя, если он находился в высоких широтах.

Третьим феноменом является зенитный угол z_n Солнца в полдни равноденствий и солнцестояний. Как уже отмечалось для весны, лета, осени и зимы Северного полушария равны, соответственно:

$$z_{nsp} = \varphi, z_{nsm} = \varphi - \varepsilon, z_{nau} = \varphi \text{ и } z_{nwn} = \varphi + \varepsilon. \quad (75)$$

Следует отметить, что в наблюдениях может использоваться высота l Солнца над горизонтом. Она определяется через зенитный угол так:

$$l = \pi/2 - z_n. \quad (76)$$

Четвертый феномен – это долгота светового дня во время летнего солнцестояния D_s и зимнего солнцестояния D_w . Для наблюдателя существует сложность в измерении этого

феномена. Эти измерения требуют высокой технологии определения времени и хранения сведений о нем. Тем не менее, возможны приемы выполнения этой работы. В теории этот феномен определяется выражением (43).

Пятый феномен – азимуты восходов и заходов Солнца в дни солнцестояний и равноденствий. Они могут быть зафиксированы наблюдателем в зависимости от какого-то направления. В теории азимут восхода Солнца в день летнего солнцестояния определяется выражениями (66), а зимнего – (67). В дни равноденствий при $\delta = 0$, согласно (60) и (64) азимут восхода Солнца будет:

$$A_{Grsp} = A_{Grau} = 90^\circ \cdot [1 - (9.8902 \cdot 10^{-3} + 4.6599 \cdot 10^{-3}) \cdot \text{tg} \varphi / 0.5\pi]. \quad (77)$$

Шестой феномен – длина теней гномона в полдни. Для дней солнцестояний: летнего (l_{sIs}) и зимнего (l_{sIw}) определяется согласно (74), а в дни равноденствий при $\delta = 0$, согласно (73), длина тени будет:

$$l_{sIsp} = l_{sIau} = \text{tg}(\varphi - 4.6599 \cdot 10^{-3}). \quad (78)$$

Наблюдатель может зафиксировать эти феномены по отношению к гномону, длина которого неизвестна. В этом случае могут потребоваться дополнительные данные для определения относительной длины тени. В теории относительные длины теней определяются выражениями (74) и (78).

8. Восстановление параметров наблюдателя и движения Земли по древним феноменам Солнца

Параметрами наблюдателя являются его древние широта местонахождения и направление на Север. Исследователи древних календарей отмечают изменение этих параметров наблюдателя. Например, М.И. Исрапилов пришел к выводу о смещении Северного полюса в Якутию несколько тысяч лет назад [7]. Рассмотрим как определить параметры наблюдателя по феноменам Солнца.

В дни равноденствий зенитный угол z , согласно (75), в полдень будет равняться широте места $z_{nsp} = \varphi$. А длина тени l_{sIsp} согласно (77) также зависит от широты φ . Тогда широта места наблюдателя определяется по одному из этих феноменов:

$$\varphi = z_{nsp} \quad \text{либо} \quad \varphi = \text{arctg}(l_{sIsp} + 4.6599 \cdot 10^{-3}). \quad (79)$$

В дни равноденствий суточное движение Солнца происходит по кругу экватора AA' (рис. 2). Поэтому центр Солнца восходит на Востоке, а заходит на Западе. Палеонаблюдатель отмечает восходы и заходы Солнца по его верхнему краю. По формуле (77) при известной широте φ может быть найден азимут A_{Grsp} восхода верхнего края Солнца. Обозначим наблюдаемое значение азимута палео-Востока как $A_{Eapa} = 90^\circ$, тогда из (77) можем записать:

$$A_{Eapa} = A_{G1sp} + 90^\circ \cdot (9.8902 \cdot 10^{-3} + 4.6599 \cdot 10^{-3}) \cdot \operatorname{tg} \varphi / 0.5\pi. \quad (80)$$

Тогда азимут палео-Севера запишется так:

$$A_{Npa} = A_{Eapa} - 90^\circ = A_{G1spa} - 90^\circ \cdot [1 - (9.8902 \cdot 10^{-3} + 4.6599 \cdot 10^{-3}) \cdot \operatorname{tg} \varphi / 0.5\pi], \quad (81)$$

где A_{G1spa} – наблюдаемый азимут древнего восхода Солнца во время весеннего равноденствия.

Азимут палео-Севера также можно определить через азимут восхода Солнца в момент осеннего равноденствия, а также через азимуты заходов в дни равноденствий. Четырехкратные способы определения предоставляют возможности для проверки результатов определения A_{Npa} .

Теперь на основе феноменов Солнца определим параметры движения Земли. В полдень солнцестояний ($\lambda = \pi/2, 1.5\pi$) зенитные углы z Солнца, согласно (75), и длины теней в полдень, согласно (74), зависят от $\varphi - \varepsilon$ и $\varphi + \varepsilon$. Поэтому при известной широте φ угол наклона ε плоскости экватора к плоскости орбиты Земли может быть определен по одной из четырех зависимостей:

$$\varepsilon = \varphi - z_{nsm}; \quad \varepsilon = -(\varphi - z_{nsm}); \quad \varepsilon = \varphi - \operatorname{arctg}(l_{s1sm}) - 4.66 \cdot 10^{-3}; \quad \varepsilon = -[\varphi - \operatorname{arctg}(l_{s1wn})] - 4.66 \cdot 10^{-3}. \quad (82)$$

Как видим зависимости (82) позволяют разными четырьмя способами определить угол наклона ε при известной широте φ . Если широта φ неизвестна, то соотношения (82) позволяют определить и широту φ и угол ε , при этом двумя способами.

Предельные азимуты восходов в дни солнцестояний определяются выражениями (66) и (67), которые зависят от ε и φ . Вычтем из (67) выражение (66) и выразим угол наклона ε :

$$\varepsilon = \operatorname{arcsin}[\sin(\pi \cdot \Delta A_{sr} / 360) \cdot \cos \varphi], \quad (83)$$

где $\Delta A_{sr} = A_{Grwn} - A_{Grsm}$ – разница азимутов восходов в дни солнцестояний.

Аналогичное выражение для угла наклона запишется через разницу ΔA_{ss} азимутов заходов в дни солнцестояний. Поэтому, если величины ΔA_{ss} и ΔA_{sr} имеются, то этим предоставляется возможность проверки определения ε . Выражение (83) знаменательно тем, что в него входит разность азимутов восходов. Это исключает возможное, отличное от современного, толкование восхода и определение его момента. В этом случае на определение ε также меньше влияют географические особенности места наблюдения.

Долготы светового дня в моменты солнцестояний определяются выражениями (43).

С учетом (37) – (40) найдем разность светового дня $\Delta D = D_s - D_w$

$$\Delta D = \frac{24}{\pi} \left(\operatorname{arccos} \left(\frac{\cos z_{0a1} - \sin \varepsilon \cdot \sin \varphi}{\cos \varepsilon \cdot \cos \varphi} \right) - \operatorname{arccos} \left(\frac{\cos z_{0a1} - \sin \varepsilon \cdot \sin \varphi}{\cos \varepsilon \cdot \cos \varphi} \right) \right). \quad (84)$$

Упростим выражение (84), рассматривая его для центра Солнца, т.е. согласно (23) $z_{0a1} = \pi/2$. Тогда оно приобретет вид:

$$\Delta D = \frac{24}{\pi} [\arccos(-\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \varepsilon) - \arccos(\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \varepsilon)], \quad (85)$$

После упрощения (85) выразим угол наклона ε :

$$\varepsilon = \operatorname{arctg}\{[\sin(0.5\pi \cdot \Delta D_{ud})]/\operatorname{tg} \varphi\}, \quad (86)$$

где

$$\Delta D_{ud} = \Delta D/24 - \quad (87)$$

– разность светового дня в моменты солнцестояний, по отношению к длительности суток.

Выражение (86) позволяет определить угол наклона ε при известной широте места φ . Оно не требует знания способа деления суток на части, так как в (86) входит доля от суток, на которую солнечный день в летнее солнцестояние больше дня в зимнее солнцестояние. После нахождения ε из (86), по выражению (84) можно уточнить ΔD , а затем по (86) определить уточненное значение угла наклона ε .

Определенные по представленным формулам широта φ и угол наклона ε в дни равноденствий и солнцестояний содержат ошибки, связанные с определением палеонаблюдателем азимута, длины тени, продолжительности разности дня ΔD . Кроме того в формулах содержится ошибка, связанная с тем, что принятые моменты равноденствий и солнцестояний на заходе и восходе Солнца или в полдень могут не совпадать с моментом прохождения Солнца через соответствующие точки γ , γ' , E и E' на эклиптике EE' (рис. 2). Разность моментов может достигать 0.5 дня. Он дает погрешность пропорциональную отношению 0.5 дня к периоду прецессии оси Земли, равному 25780 тыс. лет. То есть эта погрешность незначительна. Погрешность наблюдений палеонаблюдателя также может быть оценена. Для этого необходимо современному наблюдателю повторить наблюдения в месте нахождения палеонаблюдателя. Обработка их результатов позволит определить погрешность палеонаблюдателя.

При известных палеопараметрах φ и ε остальные параметры: эксцентриситет e орбиты Земли и долгота φ_{py} перигелия могут быть определены по количеству дней T_{dsm} , T_{dau} , T_{dwn} до начала сезона и по длительности полярных дней ΔT_{dd} или ночей ΔT_{dn} . Эти параметры зависят от долготы λ , которая рассчитывается численно в прилагаемой программе SunPhnmen.mcd. Методом последовательных приближений с ее помощью параметры e и φ_{py} могут быть найдены. Они могут быть определены разными способами, так как нахождения двух неизвестных e и φ_{py} существует 5 уравнений для величин T_{dsm} , T_{dau} , T_{dwn} , ΔT_{dd} и ΔT_{dn} .

Изменение параметров ε , e и φ_{py} во времени известно в результате решения задач об орбитальном движении Земли и о ее вращательном движении. В файле OrAl-5kyr.prn величины ε , e и φ_{py} даны с интервалом 1 год за 5 т.л.н., а в файле OrAl-200ky.prn – с интервалом 40 лет за 200 т.л.н. Поэтому, по трем параметрам ε , e и φ_{py} должен однозначно определиться возраст эпохи палеонаблюдателя. Если из археологических исследований примерный возраст эпохи наблюдения известен, то по одной из зависимостей ε , e или φ_{py} от времени этот возраст может быть уточнен.

Рассмотрим схематически алгоритмы определения параметров e и φ_{py} в двух случаях: 1) при известном примерном возрасте эпохи наблюдения и 2) при неизвестном. Пусть и в первом и во втором случае определены два каких-либо параметра палеоклимата, например, $T_{dsm,p}$ и $\Delta T_{dd,p}$. Индекс p , здесь и далее добавленный к обозначению параметра, обозначает, что этот параметр определен по древнему (палео-) календарю.

В первом случае пусть T_1 и T_2 – время начальной и конечной эпох, в пределах которого находится предполагаемый возраст древнего календаря. С помощью программы SunPhnmen.mcd на интервале от T_1 до T_2 рассчитываются T_{dsm} и ΔT_{dd} и строятся графики $T_{dsm}(\varphi_{py})$ и $\Delta T_{dd}(e)$. По этим графикам по величинам $T_{dsm,p}$ и $\Delta T_{dd,p}$ определяются угол перигелия $\varphi_{py,p}$ и эксцентриситет e_p , которые были в эпоху древнего календаря. Время эпохи T_p определяется из файла данных OrAl-5kyr.prn или OrAl-200ky.prn.

Во втором случае, когда возраст календаря неизвестен, при заданных параметрах φ и ε с помощью программы SunPhnmen.mcd производится первая серия расчетов при неизменном угле перигелия φ_{py} варьируется эксцентриситет e . Во второй серии при неизменном эксцентриситете e варьируется угол перигелия φ_{py} . Затем строится первая серия графиков $T_{dsm}(\varphi_{py})$ при разных e и вторая серия графиков $\Delta T_{dd}(e)$ при разных φ_{py} . Затем на графиках $T_{dsm}(\varphi_{py})$ проводится горизонтальная линия $T_{dsm,p} = \text{const}$, а на графиках $\Delta T_{dd}(e) - \Delta T_{dd,p} = \text{const}$. По пересечению этих линий с линиями графиков $T_{dsm}(\varphi_{py})$ и $\Delta T_{dd}(e)$ определяются параметры угол $\varphi_{py,p}$ и эксцентриситет e_p , которые были в эпоху древнего календаря. Время эпохи T_p определяется из файла данных OrAl-5kyr.prn или OrAl-200ky.prn по трем параметрам: ε , $\varphi_{py,p}$ и e_p .

9. Использование результатов в аэрокосмических исследованиях рельефа

Рассмотренный алгоритм и программа SunPhnmen.mcd по расчету феноменов Солнца может быть использована для определения высоты возвышенностей и глубины выемок при аэрокосмическом исследовании поверхности Земли или других планет. В качестве примера рассмотрим определение профиля бугра по его тени.

Осенью 2013 г. оленеводами на Ямале, в 30 км Бованенковского месторождения ($70^{\circ}21'44''$ с.ш. и $68^{\circ}26'46''$ в.д.) [22] обнаружен провал в земле, который еще называют воронкой. Он имел диаметр 25 м и глубину больше 50 м [23]. Вверху провал завершается коническим раструбом диаметром около 60 м. По космическому снимку от 09.06.2013 г. (см. рис. 22a) было установлено [23], что на месте провала находился бугор *1*. Цифрой 2 показана тень от бугра.

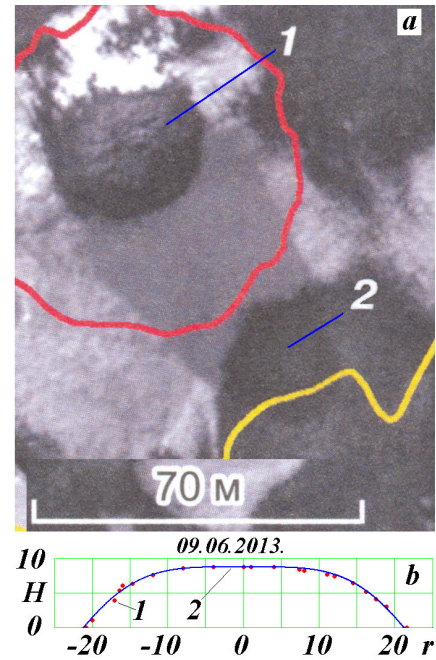


Рис. 22. Бугор (*a*) от 9 июня 2013 г. вблизи Бованенково на Ямале ($\varphi = 70^{\circ}$) [23] перед появлением осенью 2013 г. воронки и профиль бугра (*b*), рассчитанный по его тени: точки – по результатам измерения тени, линия – аппроксимационная зависимость (90).

Солнце находится в направлении противоположном тени, и, как следует из рис. 22a, азимута Солнца равен $A_{Shl} = 326.5^{\circ}$. Широта бугра $\varphi = 70.3622^{\circ}$, а дата его наблюдения соответствует $T_d = 81$ день от дня равноденствия 21 марта. По зависимости азимута Солнца A_S от часового угла ω (50) время T_d и широта бугра φ позволяют рассчитать часовой угол Солнца ω , который обозначим как ω_{hS} . Эти расчеты выполнены в п. 18 программы SunPhnmen.mcd.

Ряд азимутов Солнца $A_{S,k}$ по формуле (50) рассчитан для ряда часовых углов $\omega_{h,k}$. По значению азимута A_{Shl} из ряда азимутов $A_{S,k}$ выбирается индекс $in12$, при котором азимут $A_{S,in12}$ находится вблизи значения A_{Shl} , но меньше его. Тогда часовой угол Солнца находится интерполяцией по следующей формуле

$$\omega_{hS} = \omega_{h,in12} + \frac{(\omega_{h,in12+1} - \omega_{h,in12})(A_{S,in12+1} - A_{Shl})}{A_{S,in12+1} - A_{S,in12}}. \quad (88)$$

По часовому углу Солнца ω_{hS} с помощью формулы (71) рассчитывается единичная длина гномона l_{sh1hl} в месте нахождения бугра. Так как формула (71) и входящие в нее выражения являются сложными нелинейными зависимостями, то вычисления в п. 18 программы SunPhnmen.mcd производятся аналогично определению часового угла по формуле (88).

Наблюдаемую длину тени бугра l_{Osh} можно определить по космоснимку с учетом приведенного на нем масштаба длины, равному 70 м (см. рис. 22). Тогда высота бугра определяется так:

$$H = \frac{l_{Osh}}{l_{sh1hl}}. \quad (89)$$

Такие расчеты выполнены для ряда точек тени и получен профиль бугра. На рис. 22b точками 1 представлен профиль бугра, определенный по замерам длины тени. Линией 2 приведена аппроксимация профиля бугра зависимостью

$$H_{cs} = H_{mx} \cdot \cos \left[0.5\pi \left(\frac{r}{R_h} \right)^2 \right], \quad (90)$$

где $H_{mx} = 8.76$ м – высота бугра в центральной точке;

$R_h = 21.2$ м – радиус бугра.

В работе [23] по стереопаре снимков оценили диаметр бугра в основании: 45-48 м и его высоту: 5-6 м. Как видим, полученные по тени размеры бугра согласуются с этими оценками: диаметр бугра по тени меньше на 9.7%, а высота – больше на 37%. В работе [23] сообщается, что в месте нахождения воронки наблюдается уклон местности. Возможно, наличие уклона увеличивает высоту холма.

Рассчитаем тень от гномона, когда она падает не на горизонтальную поверхность, а имеющую уклон β к горизонтальной поверхности HH' (см. рис. 15). Обозначим длину тени гномона на наклонной поверхности $l_{sh\beta} = OB$. В треугольнике AOB угол $B = 90^\circ - (z - S) - \beta$. Тогда по теореме синусов $l_g / \sin B = OB / \sin(z - S)$ находим длину тени гномона на наклонной поверхности OB

$$l_{sh\beta} = l_g \cdot \frac{\sin(z - S)}{\cos(z - S + \beta)}. \quad (91)$$

После преобразования (91) длину тени гномона единичной длины на поверхности с углом уклона β получаем в виде:

$$l_{sh1\beta} = \frac{l_{sh1}}{\cos \beta - l_{sh1} \cdot \sin \beta}, \quad (92)$$

где l_{sh1} – длина тени гномона единичной длины на горизонтальной поверхности;

β – угол наклона поверхности в направлении тени.

При наличии уклона в месте нахождения бугра длина тени согласно (92) увеличится. Это приведет, в соответствии с (89), к уменьшению высоты H бугра.

Представляет интерес полученный профиль (90) бугра. Если бугор образован движением льдистого материала, то его профиль даже при движении с неизменным ускорением будет такой же, как и профиль скорости. При ламинарном течении вязкой жидкости в трубе профилем скорости является парабола:

$$v = v_{\max} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R_h} \right)^2 \right]. \quad (93)$$

Тогда профиль бугра будет иметь вид:

$$H_q = H_{mx} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R_h} \right)^2 \right]. \quad (94)$$

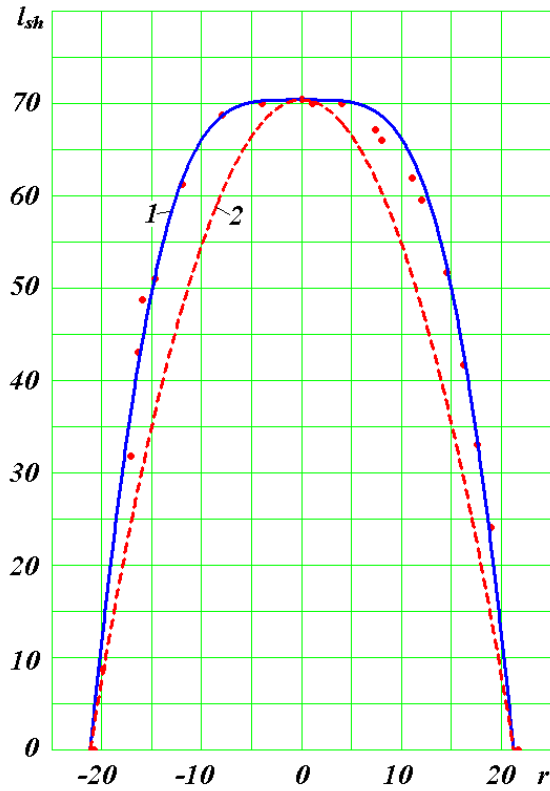


Рис. 23. Сравнение профиля тени с аппроксимационными зависимостями: 1 – для сходящегося течения (90); 2 – для ламинарного течения (94); точки – по результатам измерения тени; l_{sh} и r – длина тени бугра и его радиус в м.

Профиль скорости, аналогичный профилю бугра (90), получен для вертикальной скорости в сходящемся к центру течения жидкости, например, в пористой трубе с одним заглушенным торцом (см. стр. 59 [24]). Профили (90) и (94) для лучшего сравнения на рис. 23 нанесены на профиль тени. При этом в выражениях (90) и (94) вместо H_{mx} использована максимальная длина тени $l_{Oshmx} = 70.4$ м. Как видно из графиков, профиль (90) для сходящегося течения значительно лучше согласуется с профилем тени, нежели профиль ламинарного течения (94). Имеющееся в правой части отличие наблюдаемого профиля тени от зависимости (90) вызвано влиянием снега на правой стороне бугра (рис. 22a).

Природа образования воронки на Ямале неизвестна. В настоящее время существуют разные предположения о причинах ее возникновения. Полученный по тени профиль бугра (90) может быть объяснен стоком пласта льдистого вещества к центру бугра, вследствие чего происходит его вертикальное движение вверх. Насколько возможен такой механизм образования воронки могут показать только дальнейшие ее исследования.

Рассмотренный пример использования феноменов Солнца для аэрокосмических исследований показывает большие потенциальные возможности этого метода.

10. Заключение

Большие колебания оси вращения Земли объясняют колебания палеоклимата и имеют косвенное подтверждение в некоторых древних календарях и в исторических свидетельствах. Расшифровка древних календарей затруднена сложностью процессов, от которых зависят солнечные явления, фиксируемые календарями. Разработана теория феноменов Солнца, которая алгоритмизирована и реализована в виде программы в среде MathCad. В отличие от традиционной теории, основанной на уравнении Кеплера, в новой теории долгота λ годового движения Солнца в зависимости от номера дня года определяется по результатам точного решения задачи двух тел.

Рассчитаны длительности сезонов, долготы светового дня, временные характеристики полярных дней и ночей, азимуты восходов и заходов Солнца, длины теней гномона и их азимуты, а также другие феномены Солнца для современной эпохи и для четырех экстремальных эпох на интервале 50 тысяч лет назад. По современной эпохе результаты подтверждены результатами традиционной теории феноменов Солнца и выполненными наблюдениями.

Подведен итог по основным феноменам Солнца. Рассмотрены алгоритмы восстановления отдельных параметров орбитального и вращательного движения Земли, а также широты и возраста эпохи по древним календарям. Показаны возможности разработанного алгоритма и программы SunPhnmen.mcd при аэрокосмических исследованиях рельефа Земли.

Литература

1. *Смульский И.И., Сеченов К.Е.* Уравнения вращательного движения Земли и их решения при воздействии Солнца и планет / Институт криосферы Земли СО РАН. - Тюмень, 2007. - 35 с. - ил. : 7. Библиогр.: 19 назв. - Рус. - Деп. в ВИНТИ 02.05.07 г. № 492-B2007. <http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/UVrVzSPc.pdf>.
2. . *Smulsky J.J.* The Influence of the Planets, Sun and Moon on the Evolution of the Earth's Axis // *International Journal of Astronomy and Astrophysics*, 2011, 1, 117-134. doi:10.4236/ijaa.2011.13017. <http://www.SciRP.org/journal/ijaa>.
3. *Смульский И.И.* Анализ уроков развития астрономической теории палеоклимата // Вестник Российской Академии Наук, 2013. Т. 83. № 1. С. 31-39. <http://elibrary.ru/item.asp?id=18448265>. doi:10.7868/S0869587313010118.
4. *Смульский И.И.* Основные положения и новые результаты астрономической теории изменения климата / Институт криосферы Земли СО РАН. - Тюмень, 2014. - 30 с.: ил: 16.- Библиогр.: 44 назв. - Рус. Деп. в ВИНТИ РАН 30.09.2014, № 258-B2014. <http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/OsPoATLP3.pdf>.
5. *Laskar J., Robutel P., Joutel F., Gastineau M., Correia A.C.M., and Levrard B.* A Long-term numerical solution for the Earth // *Icarus* 170, 2004. Iss. 2: 343-364.
6. *Смульский И.И.* Новые инсоляционные периоды и последние похолодания в плиоцене / В сб. Арктика, Субарктика: мозаичность, контрастность, вариативность криосферы: Труды международной конференции / Под ред. В.П.Мельникова и Д.С.Дроздова. – Тюмень: Изд-во Эпоха, 2015. – С. 360-363. http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/smulsky_J_J2015_03_15c1.pdf.
7. *Исрапилов М.И.* Наскальные рисунки Дагестана и колебания полюсов и наклона оси Земли в голоцене. Махачкала: Издательство “Юпитер”. – 2003, 432 с.
8. *Тулак Б.Г.* Арктическая родина в Ведах. М.: ФАИР-ПРЕСС. 2002, 528 с.
9. *Chippindale Ch.* Stonehenge Complete: Thames & Hudson and Ithaca, London, 1983.
10. *Mörner N.-A., Lind B.G.* Stonehenge Has Got a Younger Sister Ales Stones in Sweden Decoded // *International Journal of Astronomy and Astrophysics*, 2012, 2, 23-27 <http://dx.doi.org/10.4236/ijaa.2012.21004>.
11. *Ларичев В.Е.* Мудрость змеи: Первобытный человек, Луна и Солнце. Новосибирск: «Наука», Сибирское Отделение, 1989, 272 с.
12. *Смульский И.И., Кротов О.И.* Новый алгоритм расчета инсоляции Земли / Институт криосферы Земли СО РАН. – Тюмень, 2013. – 38 с. – Деп. в ВИНТИ 08.04.2013 № 103-B2013. <http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/NwAICI2c.pdf>.
13. *Smulsky J.J. and Krotov O.I.* New Computing Algorithm of the Earth's Insolation // *Applied Physics Research*, Vol. 6, No. 4; 2014, p. 56-82. <http://dx.doi.org/10.5539/apr.v6n4p56>.
14. *Смульский И.И.* Теория взаимодействия. - Новосибирск: Из-во Новосиб. ун-та, НИЦ ОИГГМ СО РАН, 1999 г., 294 с. http://www.ikz.ru/~smulski/TVfulA5_2.pdf.
15. *Смульский И.И.* Математическая модель Солнечной системы / В сб. Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа. Российская Академия Наук: ВЦ им. А.А. Дородницына. М.: ВЦ РАН А.А. Дородницына, 2007. С. 119-138. <http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/MatMdSS5.pdf>.
16. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Под ред. Дубошина Г.Н. Изд. 2-е, доп. и перераб. М., Наука, 1976, 862 с.
17. Труды ИПА РАН. Вып. 10. Эфемеридная астрономия. – Санкт-Петербург: ИПА РАН, 2004, 488 с.
18. *Птолемей К.* Альмагест. Математическое сочинение в тринадцати книгах. М.: Наука. Физматлит. 1998, 672 с.
19. *Ньютон Р.Р.* Преступление Клавдия Птолемея: пер. с англ. М.: Наука. – 1985, 384 с.

20. *Smulsky J.J.* The Influence of the Planets, Sun and Moon on the Evolution of the Earth's Axis // International Journal of Astronomy and Astrophysics, 2011, 1, 117-134. <http://dx.doi.org/10.4236/ijaa.2011.13017>.
21. *Smulsky J.J.* Exact Equations for the Light Doppler Effect // Journal of Modern Physics, 2014, Vol. 5, No. 16, p. 1602-1607. <http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2014.516161>.
22. *Богоявленский В.И., Гарагаш И.А.* Обоснование процесса образования кратеров газового выброса в Арктике математическим моделированием // Арктика: экология и экономика. 2015, № 3 (19), с. 12-17.
23. *Кизяков А.И., Сонюшкин А.В., Лейбман М.О., Зимин М.В, Хомутов А.В.* Геоморфологические условия образования воронки газового выброса и динамика этой формы на центральном Ямале // Криосфера Земли. 2013. Т. XVII. № 4. С. 36-47.
24. *Смутьский И.И.* Аэродинамика и процессы в вихревых камерах. - Новосибирск: ВО "Наука". - 1992, 301 с. <http://www.ikz.ru/~smulski/Aerpro/aerpro.djvu>.

Приложения

Таблица 1П. Длительность полярного дня (ΔT_{dd}) и полярной ночи (ΔT_{dn}) в эпохи T на разных широтах φ° Северного полушария: T – время в тыс. лет от 30.12.1949 г.; T_{dd} и T_{dn} – время в днях начала момента наступления полярного дня и полярной ночи, соответственно, от момента равноденствия; длительности ΔT_{dd} и ΔT_{dn} – в днях; ЕА – данные согласно [17] для современной эпохи. **Продолжение Таблицы 1П см. после Таблицы 3П.**

φ°	Полярный день и полярная ночь в эпохи T , куг									
	0						-2.8			
	T_{dd}	ΔT_{dd}	ΔT_{dd} ЕА	T_{dn}	ΔT_{dn}	ΔT_{dd} ЕА	T_{dd}	ΔT_{dd}	T_{dn}	ΔT_{dn}
90	-2.1105	190.68	191	188.56	174.58	175	-2.1489	190.24	188.09	175.02
88	2.9549	180.47	182	193.7	164.38	165	3.0084	180.13	193.04	164.91
86	8.0524	170.2	171	198.87	154.11	155	8.196	169.96	198.03	154.74
84	13.219	159.79	161	204.12	143.7	145	13.449	159.66	203.08	144.43
82	18.494	149.16	150	209.47	133.07	134	18.806	149.16	208.25	133.89
80	23.925	138.23	140	215	122.09	123	24.312	138.35	213.58	123.03
78	29.572	126.86	128	220.76	110.63	112	30.023	127.14	219.15	111.69
76	35.519	114.89	116	226.88	98.466	100	36.019	115.35	225.05	99.687
74	41.887	102.07	103	233.52	85.259	86	42.414	102.77	231.46	86.688
72	48.879	88.015	89	241	70.373	72	49.395	89.009	238.65	72.113
70	56.877	71.944	73	250.05	52.341	54	57.308	73.386	247.28	54.667
68	66.819	51.986	53	263.75	25.009	26	66.967	54.268	259.74	29.568
66	83.798	17.954	19	276.26	0	0	81.981	24.438	274.48	0
64	92.77	0	0	276.26	0	0	94.226	0	274.48	0

Продолжение Таблицы 1П см. после Таблицы 3П.

Таблица 2П. Долгота светового дня в моменты солнцестояний в эпохи T на разных широтах φ° Северного полушария: T – время в тыс. лет от 30.12.1949 г.; D_s и D_w – длительность светового дня в часах в моменты летнего и зимнего солнцестояний, соответственно.

φ°	Долгота светового дня в часах в эпохи T , куг									
	0		-2.8		-15.32		-31		-46.44	
	D_s	D_w	D_s	D_w	D_s	D_w	D_s	D_w	D_s	D_w
0	12.121	12.121	12.121	12.121	12.118	12.118	12.131	12.131	12.115	12.115
2	12.237	12.006	12.239	12.004	12.21	12.026	12.298	11.964	12.186	12.045
4	12.353	11.890	12.356	11.887	12.302	11.933	12.466	11.797	12.256	11.974
6	12.47	11.774	12.475	11.770	12.396	11.841	12.635	11.63	12.328	11.903

8	12.588	11.657	12.594	11.651	12.49	11.748	12.805	11.461	12.4	11.832
10	12.708	11.539	12.715	11.532	12.585	11.654	12.978	11.29	12.473	11.761
12	12.83	11.419	12.838	11.411	12.682	11.559	13.154	11.117	12.547	11.688
14	12.953	11.298	12.963	11.288	12.78	11.463	13.333	10.941	12.623	11.615
16	13.08	11.175	13.091	11.164	12.88	11.365	13.516	10.761	12.7	11.54
18	13.209	11.049	13.222	11.036	12.983	11.266	13.704	10.578	12.778	11.464
20	13.342	10.92	13.356	10.906	13.089	11.164	13.897	10.389	12.859	11.387
22	13.478	10.787	13.495	10.772	13.197	11.059	14.097	10.195	12.942	11.307
24	13.62	10.651	13.638	10.633	13.309	10.951	14.305	9.994	13.028	11.225
26	13.766	10.51	13.786	10.491	13.425	10.84	14.521	9.7855	13.117	11.141
28	13.919	10.363	13.94	10.342	13.546	10.725	14.747	9.5680	13.209	11.054
30	14.078	10.211	14.102	10.188	13.672	10.606	14.984	9.3404	13.305	10.964
32	14.245	10.052	14.271	10.027	13.803	10.481	15.235	9.1010	13.405	10.870
34	14.421	9.8848	14.449	9.8578	13.941	10.35	15.501	8.8478	13.511	10.771
36	14.607	9.7087	14.637	9.6795	14.087	10.213	15.785	8.5787	13.621	10.668
38	14.804	9.5224	14.837	9.4907	14.241	10.069	16.091	8.2907	13.739	10.560
40	15.016	9.3241	15.051	9.2897	14.406	9.9151	16.422	7.9805	13.863	10.445
42	15.242	9.1119	15.281	9.0746	14.581	9.7516	16.783	7.6436	13.995	10.323
44	15.487	8.8836	15.529	8.8431	14.77	9.5766	17.183	7.2742	14.138	10.193
46	15.754	8.6363	15.8	8.5922	14.974	9.3881	17.631	6.8647	14.291	10.053
48	16.047	8.3665	16.097	8.3183	15.197	9.1838	18.141	6.4043	14.457	9.9029
50	16.371	8.0694	16.427	8.0166	15.441	8.9609	18.735	5.8771	14.637	9.7395
52	16.734	7.7392	16.796	7.681	15.71	8.7157	19.454	5.2579	14.836	9.5609
54	17.146	7.3679	17.215	7.3032	16.011	8.4436	20.378	4.502	15.056	9.3643
56	17.622	6.9443	17.700	6.8716	16.351	8.1386	21.767	3.5113	15.301	9.146
58	18.184	6.4522	18.275	6.3694	16.740	7.7924	24	1.9332	15.578	8.9011
60	18.869	5.8665	18.979	5.7697	17.193	7.3939	24	0	15.894	8.6236
62	19.752	5.1436	19.893	5.0263	17.733	6.9263	24	0	16.260	8.3047
64	21.028	4.1961	21.246	4.0422	18.396	6.3643	24	0	16.692	7.9327
66	24	2.7703	24	2.5149	19.253	5.6650	24	0	17.213	7.4898
68	24	0	24	0	20.475	4.7449	24	0	17.864	6.9489
70	24	0	24	0	23.119	3.3865	24	0	18.717	6.2643
72	24	0	24	0	24	0	24	0	19.942	5.3480
74	24	0	24	0	24	0	24	0	22.337	3.9819
76	24	0	24	0	24	0	24	0	24	0.49058
78	24	0	24	0	24	0	24	0	24	0
80	24	0	24	0	24	0	24	0	24	0

Таблица 3П. Азимуты восходов верхнего края Солнца в моменты солнцестояний в эпохи T на разных широтах φ° Северного полушария: T – время в тыс. лет от 30.12.1949 г.; A_{Grsm} и A_{Grwn} – азимуты восходов в градусах в моменты летнего и зимнего солнцестояний, соответственно; азимуты заходов верхнего края Солнца $A_{Gssm} = 360^\circ - A_{Grsm}$ и $A_{Gswm} = 360^\circ - A_{Grwn}$ в дни летнего и зимнего солнцестояний, соответственно.

φ°	Азимуты восходов в градусах в эпохи T , куг									
	0		-2.8		-15.32		-31		-46.44	
	A_{Grsm}	A_{Grwn}	A_{Grsm}	A_{Grwn}	A_{Grsm}	A_{Grwn}	A_{Grsm}	A_{Grwn}	A_{Grsm}	A_{Grwn}
0	66.557	113.44	66.312	113.69	70.957	109.04	57.986	122.01	75.194	104.81
2	66.513	113.43	66.268	113.67	70.916	109.03	57.935	122.01	75.156	104.79
4	66.438	113.45	66.193	113.69	70.85	109.03	57.84	122.04	75.099	104.78
6	66.332	113.49	66.086	113.74	70.76	109.06	57.701	122.12	75.023	104.8
8	66.195	113.57	65.948	113.82	70.645	109.12	57.516	122.25	74.928	104.84
10	66.026	113.68	65.777	113.93	70.504	109.2	57.285	122.42	74.813	104.89
12	65.823	113.82	65.572	114.07	70.337	109.31	57.005	122.64	74.678	104.97

14	65.586	114	65.333	114.25	70.142	109.44	56.675	122.91	74.522	105.06
16	65.313	114.21	65.056	114.47	69.919	109.6	56.292	123.23	74.344	105.18
18	65.001	114.46	64.741	114.72	69.665	109.79	55.853	123.61	74.142	105.32
20	64.649	114.74	64.385	115.01	69.379	110.01	55.354	124.04	73.916	105.48
22	64.254	115.07	63.986	115.34	69.059	110.27	54.79	124.54	73.664	105.66
24	63.812	115.45	63.54	115.72	68.703	110.55	54.158	125.1	73.385	105.87
26	63.321	115.87	63.043	116.14	68.308	110.88	53.45	125.74	73.075	106.11
28	62.776	116.34	62.491	116.62	67.87	111.24	52.658	126.46	72.733	106.38
30	62.171	116.87	61.879	117.16	67.386	111.65	51.775	127.26	72.356	106.68
32	61.502	117.46	61.202	117.76	66.851	112.11	50.789	128.17	71.941	107.02
34	60.76	118.12	60.451	118.42	66.261	112.61	49.687	129.19	71.484	107.39
36	59.938	118.85	59.62	119.17	65.609	113.18	48.454	130.33	70.981	107.81
38	59.026	119.67	58.696	120	64.889	113.81	47.07	131.63	70.426	108.27
40	58.012	120.59	57.669	120.93	64.091	114.51	45.51	133.09	69.813	108.79
42	56.882	121.62	56.524	121.97	63.206	115.29	43.741	134.76	69.136	109.36
44	55.618	122.77	55.243	123.15	62.221	116.17	41.722	136.67	68.386	110
46	54.197	124.08	53.803	124.47	61.122	117.15	39.395	138.88	67.552	110.72
48	52.593	125.56	52.175	125.97	59.89	118.26	36.677	141.47	66.622	111.53
50	50.769	127.24	50.323	127.69	58.502	119.51	33.446	144.57	65.581	112.43
52	48.677	129.19	48.199	129.67	56.93	120.94	29.497	148.37	64.409	113.46
54	46.255	131.45	45.735	131.97	55.135	122.57	24.444	153.26	63.082	114.62
56	43.411	134.12	42.838	134.69	53.068	124.46	17.32	160.21	61.571	115.96
58	40.01	137.32	39.366	137.97	50.662	126.67	-1.3341	178.67	59.834	117.5
60	35.837	141.28	35.09	142.02	47.821	129.29			57.819	119.29
62	30.5	146.36	29.589	147.27	44.405	132.46			55.453	121.41
64	23.123	153.46	21.876	154.71	40.192	136.39			52.633	123.95
66	10.134	166.12	7.1078	169.15	34.788	141.47			49.204	127.05
68	-2.0634	177.94	-2.0634	177.94	27.362	148.51			44.923	130.95
70					15.159	160.26			39.364	136.06
72					-2.5657	177.43			31.646	143.22
74									19.103	155.08
76									-3.3436	176.66

Продолжение таблицы 1П.

φ°	Полярный день и полярная ночь в эпохи T , кут											
	-15.32				-31				-46.44			
	T_{dd}	ΔT_{dd}	T_{dn}	ΔT_{dn}	T_{dd}	ΔT_{dd}	T_{dn}	ΔT_{dn}	T_{dd}	ΔT_{dd}	T_{dn}	ΔT_{dn}
90	-2.4971	186.46	183.97	178.79	-1.6301	183.08	181.45	182.18	-3.3053	192.45	189.15	172.81
88	3.4938	174.02	190.46	166.27	2.2802	175.42	185.2	174.5	4.6306	176.55	197.14	156.86
86	9.516	161.51	197.05	153.55	6.1923	167.77	188.98	166.78	12.676	160.43	205.31	140.55
84	15.637	148.8	203.83	140.47	10.117	160.08	192.8	158.98	20.993	143.77	213.85	123.5
82	21.937	135.75	210.88	126.82	14.068	152.35	196.66	151.08	29.791	126.14	223.04	105.13
80	28.52	122.12	218.36	112.33	18.058	144.53	200.59	143.05	39.399	106.9	233.43	84.391
78	35.537	107.63	226.49	96.531	22.105	136.6	204.61	134.85	50.457	84.751	246.35	58.565
76	43.235	91.789	235.71	78.555	26.226	128.52	208.74	126.43	64.733	56.169	275.65	0
74	52.094	73.627	247.08	56.264	30.445	120.24	213	117.73	92.806	0	275.65	0
72	63.385	50.606	266.87	17.132	34.792	111.7	217.45	108.68	92.806	0	275.65	0
70	88.484	0	275.46	0	39.307	102.83	222.13	99.159	92.806	0	275.65	0
68	88.484	0	275.46	0	44.044	93.507	227.12	89.012	92.806	0	275.65	0
66	88.484	0	275.46	0	49.087	83.573	232.56	77.981	92.806	0	275.65	0
64	88.484	0	275.46	0	54.567	72.76	238.67	65.61	92.806	0	275.65	0
62	88.484	0	275.46	0	60.729	60.583	245.94	50.919	92.806	0	275.65	0
60	88.484	0	275.46	0	68.117	45.949	255.96	30.722	92.806	0	275.65	0
58	88.484	0	275.46	0	78.759	24.804	271.28	0	92.806	0	275.65	0
56	88.484	0	275.46	0	91.191	0	271.28	0	92.806	0	275.65	0

Таблица 4П. Длина тени гномона единичной длины в полдни летнего солнцестояния ($l_{s/s}$) и зимнего солнцестояния ($l_{s/w}$) в эпохи T на разных широтах φ° Северного полушария: T – время в тыс. лет от 30.12.1949 г.

φ°	Длина тени гномона единичной длины в эпохи T , кут									
	0		-2.8		-15.32		-31		-46.44	
	$l_{s/s}$	$l_{s/w}$	$l_{s/s}$	$l_{s/w}$	$l_{s/s}$	$l_{s/w}$	$l_{s/s}$	$l_{s/w}$	$l_{s/s}$	$l_{s/w}$
0	0.42811	0.42811	0.43317	0.43317	0.33996	0.33996	0.61874	0.61874	0.25934	0.25934
2	0.3874	0.47006	0.39231	0.47528	0.30146	0.37939	0.57147	0.6681	0.22241	0.29695
4	0.34777	0.51341	0.35256	0.51881	0.26377	0.41987	0.52605	0.71981	0.18604	0.33535
6	0.3091	0.55834	0.31378	0.56395	0.22676	0.46156	0.48227	0.77419	0.15015	0.37466
8	0.27125	0.60505	0.27583	0.6109	0.19033	0.50461	0.43994	0.83159	0.11463	0.41501
10	0.23411	0.65379	0.23862	0.6599	0.15438	0.54921	0.39889	0.89243	0.079387	0.45655
12	0.19757	0.7048	0.20201	0.71121	0.11882	0.59556	0.35897	0.95718	0.044344	0.49943

14	0.16154	0.75839	0.16592	0.76513	0.083554	0.64387	0.32004	1.0264	0.0094083	0.54384
16	0.12591	0.81489	0.13024	0.82201	0.048491	0.6944	0.28197	1.1008	0.01618	0.58996
18	0.090588	0.8747	0.094892	0.88226	0.013548	0.74745	0.24464	1.1811	0.05113	0.63803
20	0.055492	0.93828	0.059773	0.94634	0.012041	0.80334	0.20794	1.2683	0.086204	0.68828
22	0.020531	1.0062	0.024801	1.0148	0.046981	0.86245	0.17177	1.3637	0.12149	0.74102
24	0.005058	1.079	0.000791	1.0883	0.082036	0.92524	0.13604	1.4685	0.15708	0.79655
26	0.039986	1.1575	0.035713	1.1676	0.11729	0.99222	0.10064	1.5847	0.19306	0.85526
28	0.075012	1.2427	0.070722	1.2536	0.15284	1.064	0.065486	1.7145	0.22953	0.91759
30	0.11022	1.3356	0.1059	1.3475	0.18877	1.1413	0.030496	1.8608	0.26658	0.98404
32	0.1457	1.4375	0.14135	1.4507	0.22517	1.2251	0	2.0275	0.30434	1.0552
34	0.18155	1.5503	0.17714	1.5649	0.26216	1.3163	0.030016	2.2196	0.3429	1.1318
36	0.21785	1.6759	0.21338	1.6923	0.29982	1.4163	0.065005	2.4439	0.3824	1.2148
38	0.25471	1.8172	0.25017	1.8357	0.33828	1.5268	0.10015	2.7101	0.42297	1.3051
40	0.29223	1.9776	0.2876	1.9988	0.37767	1.6496	0.13555	3.032	0.46476	1.404
42	0.33052	2.1618	0.32579	2.1863	0.4181	1.7875	0.17128	3.4301	0.50792	1.5131
44	0.36971	2.3761	0.36487	2.4048	0.45973	1.9438	0.20744	3.9366	0.55264	1.6344
46	0.40992	2.6292	0.40495	2.6634	0.50273	2.1228	0.24413	4.6045	0.59913	1.7703
48	0.4513	2.9335	0.44618	2.975	0.54725	2.3305	0.28145	5.5283	0.6476	1.9242
50	0.49401	3.3072	0.48871	3.3589	0.59352	2.575	0.31951	6.8941	0.69831	2.1002
52	0.53822	3.7785	0.53272	3.8448	0.64174	2.8678	0.35843	9.1261	0.75156	2.3041
54	0.58411	4.3931	0.57841	4.4813	0.69217	3.2257	0.39834	13.446	0.80768	2.5437
56	0.63192	5.2304	0.62597	5.3541	0.7451	3.6746	0.43937	25.415	0.86705	2.83
58	0.68189	6.4419	0.67566	6.6284	0.80086	4.2556	0.48168	226.22	0.93014	3.1791
60	0.7343	8.3567	0.72775	8.6702	0.85983	5.0394	0.52544	1.6e+16	0.99745	3.6154
62	0.78946	11.85	0.78256	12.485	0.92245	6.158	0.57084	1.6e+16	1.0696	4.1778
64	0.84776	20.274	0.84045	22.199	0.98923	7.8894	0.61808	1.6e+16	1.1474	4.9324
66	0.90961	69.546	0.90184	98.901	1.0608	10.938	0.6674	1.6e+16	1.2317	6.0009
68	0.97551	1.6e+16	0.96722	1.6e+16	1.1379	17.754	0.71908	1.6e+16	1.3235	7.636
70	1.0461	1.6e+16	1.0372	1.6e+16	1.2213	46.81	0.77343	1.6e+16	1.4243	10.46
72	1.122	1.6e+16	1.1124	1.6e+16	1.3122	1.6e+16	0.83078	1.6e+16	1.5356	16.535
74	1.2041	1.6e+16	1.1937	1.6e+16	1.4118	1.6e+16	0.89157	1.6e+16	1.6595	39.209
76	1.2934	1.6e+16	1.282	1.6e+16	1.5218	1.6e+16	0.95626	1.6e+16	1.7986	1.6e+16
78	1.3911	1.6e+16	1.3787	1.6e+16	1.6441	1.6e+16	1.0254	1.6e+16	1.9564	1.6e+16
80	1.4989	1.6e+16	1.4851	1.6e+16	1.7812	1.6e+16	1.0997	1.6e+16	2.1374	1.6e+16

**Программа для расчета феноменов Солнца
на основе результатов задачи двух тел**

**SunPhmmen.mcd. The program for the Sun's phenomena computation
on the basis of the two-body problem results.**

It is completed 30.12.2015. It is modified 30.12.2015

1. The constants

```
rd := 57.29577951308232    ed := 24.3600    τ := 1440    kJpm2 := 41.868    ksj :=  $\frac{365.25636042}{365.25}$ 
pi := 3.141592653589793    p2 := 2*pi    pi05 := 0.5*pi    pi15 := 1.5*pi
Psd := 365.25636042    Psds := Psd*ed    Δdsd := Psd - 365    Ptr := 3.6524219879*102
G := 6.67259*10-11    mErt := 5.9742*1024    ae := 1.49597871*1011    MS := 332951.3*mErt    M1 := -G*(MS + mErt)
Am := 1.097960770309581*1013    kv := 2.874251102012487*10-4    Mss := 1.991787350282*1030
am := 1.362548000293008*10-2
```

The parameters of the Earth's orbit and the plane of the equator in epoch 2000 for the Sun's phenomena computation without taking into account the change of the Earth's orbital and rotational motions.

```
ec0 := 1.67086342*10-2    ε0 := 0.409092629689404    fpγ0 := 1.796595647267463    Tp0 := 0.500143001
JD49 := 2433280.5    JDp0 := JD49 + Tp0*100*Psd    JDp0 = 2.451548541223479*106
```

**2. Reading of the parameters of the Earth's orbital and
rotational motions from the files.**

The file of Laskar J. etc. [5]. The time T2 is in thousand years.

```
R1 := RmmEADPRN("INSO_LA2004.txt")    N41 := 200    di := 10
T2i4 := 10*R1i4-di,0    eci4 := R1i4-di,1    εi4 := R1i4-di,2    fpγi4 := R1i4-di,3
```

The files of Smulsky J.J. The time T2 is in sidereal centuries since 30.12.1949.

```
2500    5000
"OrAl1c_8.prm"    "OrAl-200ky.prm"
R1 := READPRN("OrAl-200ky.prm")    N410 := 5000    di := 1    N40 :=  $\frac{N410}{di}$     i40 := 0..N40    i50 := 1625
T20i40 := R1i40-di,0    ec00i40 := R1i40-di,1    fpγ00i40 := R1i40-di,2    T20N40 = -2*103
ε00i40 := R1i40-di,3    JD0i40 := R1i40-di,4    T0JYi40 := ksj*T20i40*100    T20i50 = -6.5*102
```

Extraction of extreme data for 50 thousand years:

I - extreme data for insolation;

o - extreme data for obliquity.

```
i4I0 := 0    i4I1 := 104    i4I2 := 397    i4I3 := 782    i4I4 := 1161
i4o0 := 0    i4o1 := 70    i4o2 := 383    i4o3 := 775    i4o4 := 1161
N4 := 4    i4 := 0..N4    i5 := 0
```

```
T2i4 := T20i4oi4    eci4 := ec00i4oi4    fpγi4 := fpγ00i4oi4    εi4 := ε00i4oi4    JDi4 := JD0i4oi4    TJYi4 := T0JYi4oi4    T2i5 = 0
```

3. The trajectory parameter, the perihelion radius, the velocity at the perihelion and the movement time to the aphelion

$$\text{all}_{14} := \frac{-1}{1 + \text{ec}_{14}} \quad \text{Rp}_{14} := \text{am} \cdot \frac{(2 \cdot \text{all}_{14} + 1)}{\text{all}_{14}} \quad \text{vp}_{14} := \frac{-\text{p2} \cdot \text{all}_{14} \cdot \text{Rp}_{14} \cdot \text{Am}}{\text{Psds} \cdot (-2 \cdot \text{all}_{14} - 1)^{1.5}} \quad \text{ta}_{14} := - \left(\frac{\text{Rp}_{14} \cdot \text{Am}}{\text{vp}_{14}} \right) \cdot \frac{\pi \cdot \text{all}_{14}}{(-2 \cdot \text{all}_{14} - 1)^{1.5}}$$

4. The polar angle and time of the Sun's motion in the plane of its orbit according to the two-body problem

J is the number of parts in a year or points of the the Sun's longitude.

$\lambda 0$ is a series of the Sun's longitudes with members, regular spaced by the value $d\lambda 0$.

λ is a series of the longitudes with members, regular spaced in time.

fi is the polar angle (anomaly), and ra0 is the radius of the Sun's motion.

ν is the longitude of the Sun's perigee from the point of vernal equinox.

tp0 is the time of the Sun's movement from the perigee to the point with the polar angle fi.

tp γ is the time of the Sun's movement from the perigee to the point of vernal equinox.

$$J := 365 \quad J0 := 365 \quad d\lambda 0 := \frac{2 \cdot \pi}{J} \quad \lambda 0_0 := 0 \quad j0 := 0..J \quad j1 := 1..J \quad j3 := 1..J + 1 \quad j03 := 0..J + 1$$

$$\lambda 0_{j1} := \lambda 0_{j1-1} + d\lambda 0 \quad \lambda 0_{J+1} := \lambda 0_J + d\lambda 0 \quad \lambda 0_0 = 0 \quad \lambda 0_J = 6.283185307179618$$

$$\nu 0_{14} := \text{fp} \gamma_{14} + \pi \quad \nu 0 T_{14} := \text{floor} \left(\frac{\nu 0_{14}}{\text{p2}} \right) \quad \nu_{14} := \nu 0_{14} - \nu 0 T_{14} \cdot \text{p2} \quad \text{fi} 0_{14, j03} := \lambda 0_{j03} - \nu_{14}$$

$$\text{fi}_{14, j03} := \text{if}(\text{fi} 0_{14, j03} < 0, \text{fi} 0_{14, j03} + \text{p2}, \text{fi} 0_{14, j03}) \quad \text{fi}_{14, j03} := \text{if}(\text{fi}_{14, j03} > \text{p2}, \text{fi}_{14, j03} - \text{p2}, \text{fi}_{14, j03})$$

$$\text{ra} 0_{14, j03} := \frac{\text{Rp}_{14} \cdot \text{Am}}{\left[\left(\text{all}_{14} + 1 \right) \cdot \cos(\text{fi}_{14, j03}) - \text{all}_{14} \right]}$$

$$\text{tp} 0_{14, j03} := \frac{\text{Rp}_{14} \cdot \text{Am}}{\text{vp}_{14}} \left[\frac{(\text{all}_{14} + 1) \cdot |\sin(\text{fi}_{14, j03})|}{(-2 \cdot \text{all}_{14} + 1) \cdot \left[(\text{all}_{14} + 1) \cdot \cos(\text{fi}_{14, j03}) - \text{all}_{14} \right]} + \frac{\text{all}_{14} \cdot \left[\text{asin} \left[\frac{\text{all}_{14} + 1 - \text{all}_{14} \cdot \cos(\text{fi}_{14, j03})}{(\text{all}_{14} + 1) \cdot \cos(\text{fi}_{14, j03}) - \text{all}_{14}} \right] - 0.5 \cdot \pi}{(-2 \cdot \text{all}_{14} - 1)^{1.5}} \right]$$

$$\text{tp}_{14, j03} := \text{if}(\text{fi}_{14, j03} > \pi, 2 \cdot \text{ta}_{14} - \text{tp} 0_{14, j03}, \text{tp} 0_{14, j03}) \quad \text{tp} 1_{14, j03} := \text{if}(\lambda 0_{j03} > \nu_{14}, 2 \cdot \text{ta}_{14} + \text{tp}_{14, j03}, \text{tp}_{14, j03})$$

$$\text{tp} \gamma_{14} := \text{tp}_{14, 0} \quad \text{tp} \gamma d_{14} := \frac{\text{tp} \gamma_{14}}{\text{ed}} \quad \text{JD} \gamma 0_{14} := \text{JDp} 0 + \text{tp} \gamma d_{14} \quad \text{tp} \gamma d_{15} = 76.42892802813478$$

5. The computation of longitudes with members, regularly spaced in time.

The first refinement of a series of longitudes

$$\text{JD} \gamma 0_{15} = 2.451624970151508 \cdot 10^6$$

$$\text{Td}_{j3} := j3 \quad \lambda i_{j03} := 0 \quad \lambda i_{14, j0+1} := \lambda i_{14, j0} + \frac{\lambda 0_{j0+1} - \lambda 0_{j0}}{\text{tp} 1_{14, j0+1} - \text{tp} 1_{14, j0}} \cdot \text{ed}$$

$$d\lambda 0 = 1.721420632103996 \cdot 10^{-2}$$

$$\text{fi} 2_{14, j03} := \lambda i_{14, j03} - \nu_{14} \quad \text{fi} 3_{14, j03} := \text{if}(\text{fi} 2_{14, j03} < 0, \text{fi} 2_{14, j03} + \text{p2}, \text{fi} 2_{14, j03}) \quad \text{fi} 4_{14, j03} := \text{if}(\text{fi} 3_{14, j03} > \text{p2}, \text{fi} 3_{14, j03} - \text{p2}, \text{fi} 3_{14, j03})$$

$$\text{tp} 2_{14, j03} := \frac{\text{Rp}_{14} \cdot \text{Am}}{\text{vp}_{14}} \left[\frac{(\text{all}_{14} + 1) \cdot |\sin(\text{fi} 4_{14, j03})|}{(-2 \cdot \text{all}_{14} + 1) \cdot \left[(\text{all}_{14} + 1) \cdot \cos(\text{fi} 4_{14, j03}) - \text{all}_{14} \right]} + \frac{\text{all}_{14} \cdot \left[\text{asin} \left[\frac{\text{all}_{14} + 1 - \text{all}_{14} \cdot \cos(\text{fi} 4_{14, j03})}{(\text{all}_{14} + 1) \cdot \cos(\text{fi} 4_{14, j03}) - \text{all}_{14}} \right] - 0.5 \cdot \pi}{(-2 \cdot \text{all}_{14} - 1)^{1.5}} \right]$$

$$tp3_{i4,j03} := \text{if}(\langle fi4_{i4,j03} > \pi, 2 \cdot ta_{i4} - tp2_{i4,j03}, tp2_{i4,j03} \rangle) \quad tp4_{i4,j03} := \text{if}(\langle \lambda_{i4,j03} > \nu_{i4}, 2 \cdot ta_{i4} + tp3_{i4,j03}, tp3_{i4,j03} \rangle)$$

The second refinement of a series of longitudes

$$\lambda_{i4,j03} := 0 \quad \lambda_{i4,j0+1} := \lambda_{i4,j0} + \frac{\lambda_{i4,j0+1} - \lambda_{i4,j0}}{tp4_{i4,j0+1} - tp4_{i4,j0}} \cdot 1 \cdot ed$$

$$fi5_{i4,j03} := \lambda_{i4,j03} - \nu_{i4} \quad fi6_{i4,j03} := \text{if}(\langle fi5_{i4,j03} < 0, fi5_{i4,j03} + p2, fi5_{i4,j03} \rangle) \quad fi7_{i4,j03} := \text{if}(\langle fi6_{i4,j03} > p2, fi6_{i4,j03} - p2, fi6_{i4,j03} \rangle)$$

$$tp5_{i4,j03} := \frac{Rp_{i4} \cdot Am}{vp_{i4}} \left[\frac{\langle all_{i4} + 1 \rangle \cdot |\sin(fi7_{i4,j03})|}{\langle 2 \cdot all_{i4} + 1 \rangle \cdot \left[\langle all_{i4} + 1 \rangle \cdot \cos(fi7_{i4,j03}) - all_{i4} \right]} + \frac{all_{i4} \cdot \left[\text{asin} \left[\frac{all_{i4} + 1 - all_{i4} \cdot \cos(fi7_{i4,j03})}{\langle all_{i4} + 1 \rangle \cdot \cos(fi7_{i4,j03}) - all_{i4}} \right] - 0.5 \cdot \pi}{\langle -2 \cdot all_{i4} - 1 \rangle^{1.5}} \right]$$

$$tp6_{i4,j03} := \text{if}(\langle fi7_{i4,j03} > \pi, 2 \cdot ta_{i4} - tp5_{i4,j03}, tp5_{i4,j03} \rangle) \quad tp7_{i4,j03} := \text{if}(\langle \lambda_{i4,j03} > \nu_{i4}, 2 \cdot ta_{i4} + tp6_{i4,j03}, tp6_{i4,j03} \rangle)$$

The third refinement of a series of longitudes

$$\lambda_{i4,j03} := 0 \quad \lambda_{i4,j0+1} := \lambda_{i4,j0} + \frac{\lambda_{i4,j0+1} - \lambda_{i4,j0}}{tp7_{i4,j0+1} - tp7_{i4,j0}} \cdot 1 \cdot ed$$

$$fi8_{i4,j3} := \lambda_{i4,j3} - \nu_{i4} \quad fi9_{i4,j3} := \text{if}(\langle fi8_{i4,j3} < 0, fi8_{i4,j3} + p2, fi8_{i4,j3} \rangle) \quad fi10_{i4,j3} := \text{if}(\langle fi9_{i4,j3} > p2, fi9_{i4,j3} - p2, fi9_{i4,j3} \rangle)$$

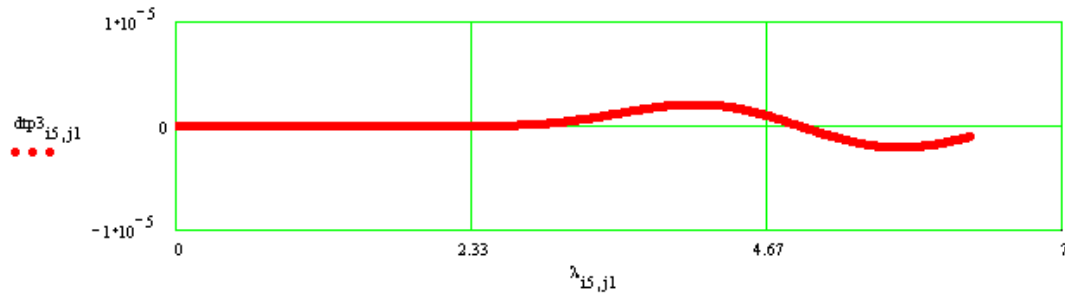
The check of intervals at refinement series of longitudes

$$tp8_{i4,j3} := \frac{Rp_{i4} \cdot Am}{vp_{i4}} \left[\frac{\langle all_{i4} + 1 \rangle \cdot |\sin(fi10_{i4,j3})|}{\langle 2 \cdot all_{i4} + 1 \rangle \cdot \left[\langle all_{i4} + 1 \rangle \cdot \cos(fi10_{i4,j3}) - all_{i4} \right]} + \frac{all_{i4} \cdot \left[\text{asin} \left[\frac{all_{i4} + 1 - all_{i4} \cdot \cos(fi10_{i4,j3})}{\langle all_{i4} + 1 \rangle \cdot \cos(fi10_{i4,j3}) - all_{i4}} \right] - 0.5 \cdot \pi}{\langle -2 \cdot all_{i4} - 1 \rangle^{1.5}} \right]$$

$$tp9_{i4,j3} := \text{if}(\langle fi10_{i4,j3} > \pi, 2 \cdot ta_{i4} - tp8_{i4,j3}, tp8_{i4,j3} \rangle) \quad tp10_{i4,j3} := \text{if}(\langle \lambda_{i4,j3} > \nu_{i4}, 2 \cdot ta_{i4} + tp9_{i4,j3}, tp9_{i4,j3} \rangle)$$

$$dtp3_{i4,j1} := \frac{\langle tp10_{i4,j1+1} - tp10_{i4,j1} \rangle - ed}{ed} \quad ddt3_{i4,0} := 0 \quad ddt3_{i4,j1} := ddt3_{i4,j1-1} + |dtp3_{i4,j1}|$$

$$\frac{ddt3_{i5,J}}{J} = 7.155883412539792 \cdot 10^{-7} \quad T_{2,5} = 0$$



The errors of the year continuance definition.

The days definition accuracy check in a sidereal year: Δdsd is the day residual until the end of a sidereal year.

$$\Delta dsdc := \frac{\langle p2 - \lambda_{i5,J} \rangle \cdot 1}{\lambda_{i5,J} - \lambda_{i5,J-1}} \quad \Delta \Delta dg := \Delta dsdc - \Delta dsd \quad \Delta \Delta dg = -1.273550658583145 \cdot 10^{-4} \quad \Delta \Delta dg \cdot ed = -11.00347769015837$$

$$\delta\lambda_{365} := \frac{\Delta dsdc - \Delta dsd}{\Delta dsd} \quad \delta\lambda_{365} = -4.967813122567979 \cdot 10^{-4}$$

The radius ra of Sun's motion along the orbit depending on a series of longitudes with members, regularly spaced in time.

$$ra_{i4,j1} := \frac{Rp_{i4} \cdot Am}{\left[(all_{i4} + 1) \cdot \cos(\lambda_{i4,j1} - \nu_{i4}) - all_{i4} \right]} \quad \rho_{i4,j1} := \frac{ra_{i4,j1}}{ae}$$

6. Setting the location of the observer's latitude.

$$\begin{aligned} If := 45 \quad il := 1..If + 1 \quad \phi_0 := -\frac{2}{rd} \quad \phi_{i1} := \phi_{i1-1} + \frac{2}{rd} \quad \phi_{E_{i1}} := \phi_{i1} \cdot rd \quad i11 := 36 \quad 6 \quad 29 \\ \text{Moscow} \quad \text{Tyumen} \quad \text{Bovanenkovo} \\ 55.75222 \quad 57.152199 \quad 70.3622 \quad \phi_{E_{i11}} := 70.3622 \\ 0.973059804296233 \quad 0.997494047305011 \quad 1.228052058946754 \quad \phi_{i11} := 1.228052058946754 \end{aligned}$$

7. Sun's declination and the hour angle of sunrises and sunsets.

If is the number of points on geographical latitudes.

i11 is the index of a concrete value of the latitude.

ϕ is the geographical latitude of place.

δ is the Sun's declination.

ω_0 is the hour angle of sunrises and sunsets.

$$\begin{aligned} \sin \delta_{i4,j1} := \sin(\varepsilon_{i4}) \cdot \sin(\lambda_{i4,j1}) \quad \delta_{i4,j1} := \text{asin}(\sin \delta_{i4,j1}) \quad \cos \delta_{i4,j1} := \cos(\delta_{i4,j1}) \quad \tan \delta_{i4,j1} := \tan(\delta_{i4,j1}) \quad \phi_{E_{i11}} = 70.3622 \\ \text{Fn}0_{i4,j1} := -\tan \delta_{i4,j1} \cdot \tan(\phi_{i11}) \quad \text{Fn}0_{i4,j1} := \text{if}(-1 < \text{Fn}0_{i4,j1}, \text{Fn}0_{i4,j1}, -1) \quad \text{Fn}0_{i4,j1} := \text{if}(1 > \text{Fn}0_{i4,j1}, \text{Fn}0_{i4,j1}, 1) \\ \omega_{i4,j1} := \text{acos}(\text{Fn}0_{i4,j1}) \end{aligned}$$

8. Longitude λ of the beginning seasons, number of days Td before they start and length of the seasons.

Beginning summer

$$\text{Ind}01_{i4,j1} := \text{if}(\lambda_{i4,j1} > \text{pi}05, 0, j1)$$

$$\text{in}01 := \text{for } i4 \in 0..N4$$

$$\begin{cases} \text{max} \leftarrow 0 \\ \text{for } j1 \in 1..J \\ \left| \begin{array}{l} \text{in}01_{a_{i4}} \leftarrow \text{Ind}01_{i4,j1} \text{ if } \text{max} \leq \text{Ind}01_{i4,j1} \\ \text{max} \leftarrow \text{Ind}01_{i4,j1} \text{ if } \text{max} \leq \text{Ind}01_{i4,j1} \end{array} \right. \\ \text{in}01a \end{cases}$$

$$\text{Td}_{su_{i4}} := \text{Td}_{m01_{i4}} + \frac{\text{pi}05 - \lambda_{i4, \text{in}01_{i4}}}{\lambda_{i4, \text{in}01_{i4} + 1} - \lambda_{i4, \text{in}01_{i4}}}$$

Beginning winter

$$\text{Ind}03_{i4,j1} := \text{if}(\lambda_{i4,j1} > \text{pi}15, 0, j1)$$

Beginning autumn

$$\text{Ind}02_{i4,j1} := \text{if}(\lambda_{i4,j1} > \text{pi}, 0, j1)$$

$$\text{in}02 := \text{for } i4 \in 0..N4$$

$$\begin{cases} \text{max} \leftarrow 0 \\ \text{for } j1 \in 1..J \\ \left| \begin{array}{l} \text{in}02_{a_{i4}} \leftarrow \text{Ind}02_{i4,j1} \text{ if } \text{max} \leq \text{Ind}02_{i4,j1} \\ \text{max} \leftarrow \text{Ind}02_{i4,j1} \text{ if } \text{max} \leq \text{Ind}02_{i4,j1} \end{array} \right. \\ \text{in}02a \end{cases}$$

$$\text{Td}_{au_{i4}} := \text{Td}_{m02_{i4}} + \frac{\text{pi} - \lambda_{i4, \text{in}02_{i4}}}{\lambda_{i4, \text{in}02_{i4} + 1} - \lambda_{i4, \text{in}02_{i4}}}$$

$$\begin{aligned}
& \text{in03} := \text{for } i4 \in 0..N4 \\
& \quad \left| \begin{array}{l} \text{max} := 0 \\ \text{for } j1 \in 1..J \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{in03}_{i4} := \text{Ind03}_{i4,j1} \text{ if } \text{max} \leq \text{Ind03}_{i4,j1} \\ \text{max} := \text{Ind03}_{i4,j1} \text{ if } \text{max} \leq \text{Ind03}_{i4,j1} \end{array} \right. \\ \text{in03a} \end{array} \right. \\
& \quad \text{Td}_{su} = \begin{bmatrix} 92.77029599636545 \\ 94.22585401187585 \\ 88.48370457936125 \\ 91.19072475675256 \\ 92.80560303813662 \end{bmatrix} \quad \text{Td}_{au} = \begin{bmatrix} 1.864247021690474 \cdot 10^2 \\ 1.860292802840937 \cdot 10^2 \\ 1.812758745783055 \cdot 10^2 \\ 1.79887367985595 \cdot 10^2 \\ 1.858311036206739 \cdot 10^2 \end{bmatrix} \\
& \quad \text{Td}_{wi_{i4}} := \text{Td}_{\text{in03}_{i4}} + \frac{\text{pi}5 - \lambda_{i4, \text{in03}_{i4}}}{\lambda_{i4, \text{in03}_{i4}} + 1 - \lambda_{i4, \text{in03}_{i4}}} \quad \text{Td}_{wi} = \begin{bmatrix} 2.762613818306462 \cdot 10^2 \\ 2.744835824248672 \cdot 10^2 \\ 2.754583577418334 \cdot 10^2 \\ 2.712798468644718 \cdot 10^2 \\ 2.756491980312958 \cdot 10^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

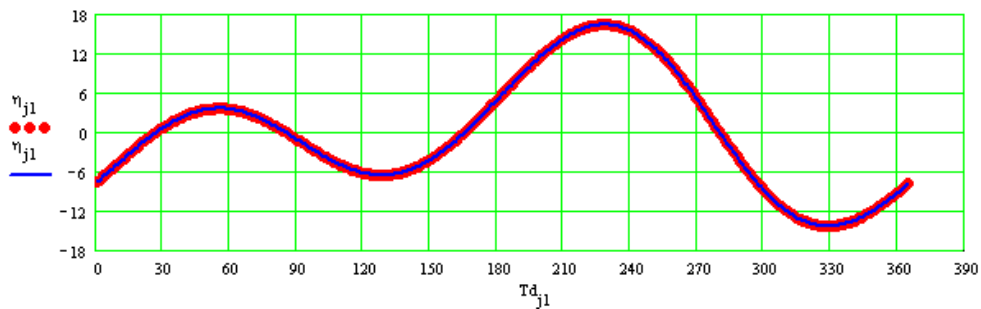
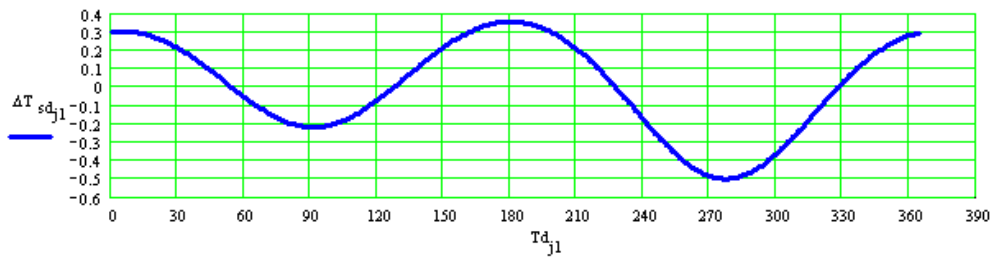
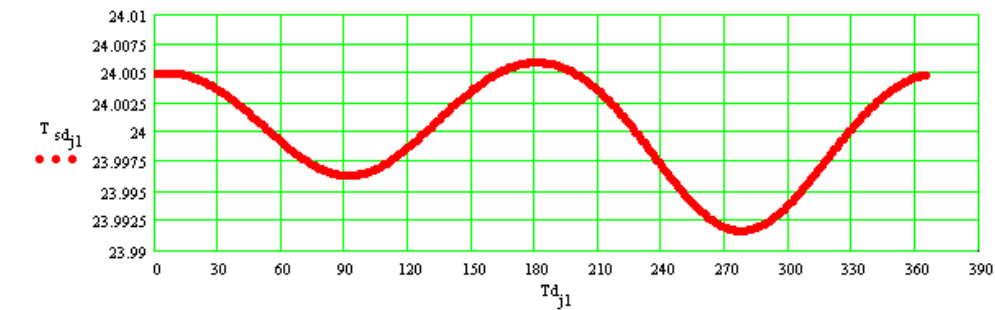
Length of the seasons

$$\begin{aligned}
& \Delta \text{Td}_{sp} := \text{Td}_{su} \quad \Delta \text{Td}_{su} := \text{Td}_{au} - \text{Td}_{su} \quad \Delta \text{Td}_{au} := \text{Td}_{wi} - \text{Td}_{au} \quad \Delta \text{Td}_{wi} := \text{Ptr} - \text{Td}_{wi} \\
& \Delta \text{Td}_{sp} = \begin{bmatrix} 92.77029599636545 \\ 94.22585401187585 \\ 88.48370457936125 \\ 91.19072475675256 \\ 92.80560303813662 \end{bmatrix} \quad \Delta \text{Td}_{su} = \begin{bmatrix} 93.6544061726819 \\ 91.80342627221781 \\ 92.79216999894422 \\ 88.69664322884242 \\ 93.02550058253725 \end{bmatrix} \quad \Delta \text{Td}_{au} = \begin{bmatrix} 89.83667966159885 \\ 88.45430214077356 \\ 94.18248316352796 \\ 91.39247887887686 \\ 89.81809441062197 \end{bmatrix} \\
& P_{i4,0} := i4 + 1 \quad P_{i4,1} := 0.1 \cdot \text{T2}_{i4} \quad P_{i4,2} := \text{Td}_{su_{i4}} \quad P_{i4,3} := \text{Td}_{au_{i4}} \quad P_{i4,4} := \text{Td}_{wi_{i4}} \\
& P_{i4,5} := \Delta \text{Td}_{sp_{i4}} \quad P_{i4,6} := \Delta \text{Td}_{su_{i4}} \quad P_{i4,7} := \Delta \text{Td}_{au_{i4}} \quad P_{i4,8} := \Delta \text{Td}_{wi_{i4}} \quad P_{i4,9} := \varepsilon_{i4} \quad \Delta \text{Td}_{wi} = \begin{bmatrix} 88.98081695935377 \\ 90.75861636513275 \\ 89.78384104816655 \\ 93.96235192552814 \\ 89.59300075870414 \end{bmatrix} \\
& \text{WwwwRITEPRN}(\text{"Seasons.pm"}) := P1
\end{aligned}$$

9. Length of apparent solar day (earthday) and the equation of time.

$$\begin{aligned}
& \alpha_{S0_{j1}} := \text{asin} \left[\frac{\cos(\varepsilon_{is}) \cdot \sin(\lambda_{is,j1})}{\sqrt{1 - (\sin(\varepsilon_{is}) \cdot \sin(\lambda_{is,j1}))^2}} \right] \quad \alpha_{S_{j1}} := \alpha_{S0_{j1}} \quad \alpha_{S_{j1}} := \text{if}(\lambda_{is,j1} > 0.5 \cdot \text{pi} - \alpha_{S0_{j1}}, \alpha_{S0_{j1}}) \\
& \alpha_{0_{j1}} := \text{if}(\lambda_{is,j1} > 1.5 \cdot \text{pi}, 2 \cdot \text{pi} + \alpha_{S0_{j1}}, \alpha_{S_{j1}}) \quad \Delta \alpha_{0_{j1}} := \alpha_{0_{j1}} - \alpha_{0_{j1-1}} \quad \Delta \alpha_m := \frac{\sum_{j1=1}^{J0} \Delta \alpha_{0_{j1}}}{J0} \\
& T_{sd_{j1}} := 12 \cdot \left(2 - \frac{\Delta \alpha_{0_{j1}} - \Delta \alpha_m}{\text{pi}} \right) \quad \Delta T_{sd_{j1}} := 60 \cdot (T_{sd_{j1}} - 24) \quad \Delta T_{sd_0} := \Delta T_{sd_{j0}} \quad \gamma_{0_0} := 0 \quad \gamma_{0_{j1}} := \gamma_{0_{j1-1}} + \Delta T_{sd_{j1-1}} \\
& \gamma_{0m} := \frac{\sum_{j1=1}^{J0} \gamma_{0_{j1}}}{J0} \quad \gamma_{j1} := \gamma_{0_{j1}} - \gamma_{0m} \quad m_{j0} := 24 \cdot j0 \quad m_{a_{j1-1}} := m_{j1-1} + \frac{\gamma_{j1}}{60} \quad \gamma_{0m} = 7.800931844698135
\end{aligned}$$

$mn\Delta T := \min(\Delta T_{sd})$ $Ind1_{j1} := \text{if}(\Delta T_{sd_{j1}} > mn\Delta T, 0, j1)$ $in1 := \max(Ind1)$ $in1 = 2.78 \cdot 10^2$ $mn\Delta T = -0.498094073903133$
 $mx\Delta T := \max(\Delta T_{sd})$ $Ind2_{j1} := \text{if}(\Delta T_{sd_{j1}} < mx\Delta T, 0, j1)$ $in2 := \max(Ind2)$ $in2 = 1.81 \cdot 10^2$ $mx\Delta T = 0.356863208870237$
 $mn\eta := \min(\eta)$ $Ind3_{j1} := \text{if}(\eta_{j1} > mn\eta, 0, j1)$ $in3 := \max(Ind3)$ $in3 = 3.29 \cdot 10^2$ $mn\eta = -14.24894101461718$
 $mx\eta := \max(\eta)$ $Ind4_{j1} := \text{if}(\eta_{j1} < mx\eta, 0, j1)$ $in4 := \max(Ind4)$ $in4 = 2.29 \cdot 10^2$ $mx\eta = 16.43486675132898$
 $P1_{i4,0} := 0.1 \cdot T2_{i4}$ $P1_{0,1} := 7.800931844698135$ $P1_{1,1} := 7.216925795238013$ $P1_{2,1} := -2.545816989581148$
 $P1_{3,1} := -4.696241148416599$ $P1_{4,1} := 6.450777444370113$ $P1_{0,2} := 16.43486675132898$ $P1_{1,2} := 12.10475850450183$
 $P1_{2,2} := 11.8226541833228$ $P1_{3,2} := 26.1632006562291$ $P1_{4,2} := 9.007463156468196$ $P1_{0,3} := -14.24894101461718$
 $P1_{1,3} := -18.07000232096482$ $P1_{2,3} := -14.735995795436$ $P1_{3,3} := -19.22857210626444$ $P1_{4,3} := -8.543187424642307$
 $P1_{0,4} := 1.720303526244837 \cdot 10^{-2}$ $P1_{1,4} := 1.720336417940061 \cdot 10^{-2}$ $P1_{2,4} := 1.720235956788101 \cdot 10^{-2}$ $P1_{3,4} := 1.720418344610848 \cdot 10^{-2}$
 $P1_{4,4} := 1.720250036785764 \cdot 10^{-2}$ $W_{wwwRITPRN}(\text{"TimeEq.prn"}) := P1$



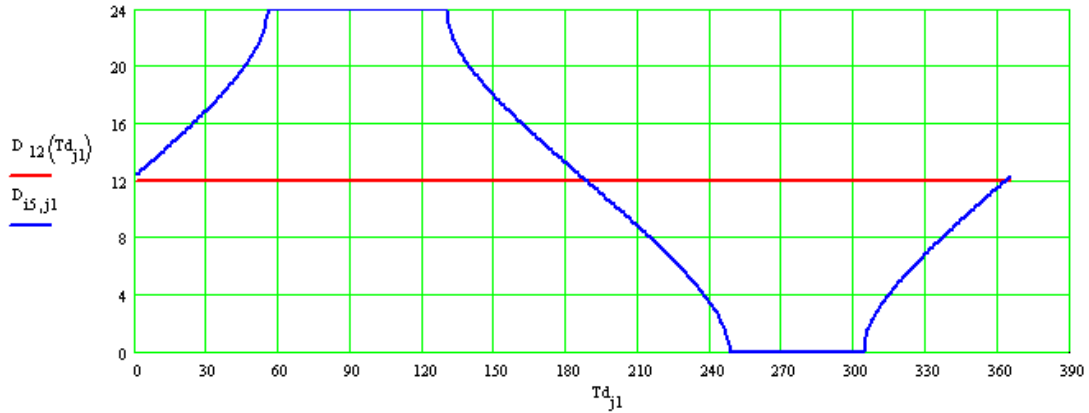
10. Sun day length during a year (diurnal hours).

Setting the number of the day j11 from the moment of equinox. $j11 := 81$ $i11 = 36$ $\phi_{\varepsilon_{111}} = 70.3622$

$$z_{0a_{i4,j1}} := \text{pi}05 + 10^{-3} \cdot \left(9.8902 + \frac{4.6599}{\rho_{i4,j1}} \right) \quad \text{Fn}0_{i4,j1} := \frac{\cos(z_{0a_{i4,j1}}) - \sin(\delta_{i4,j1}) \cdot \sin(\phi_{i11})}{\cos(\delta_{i4,j1}) \cdot \cos(\phi_{i11})}$$

$$\text{Fn}_{i4,j1} := \text{if}(-1 < \text{Fn}0_{i4,j1}, \text{Fn}0_{i4,j1}, -1) \quad \text{Fn}_{i4,j1} := \text{if}(1 > \text{Fn}_{i4,j1}, \text{Fn}_{i4,j1}, 1) \quad \omega_{0a_{i4,j1}} := \text{acos}(\text{Fn}_{i4,j1})$$

$$D_{i4,j1} := \frac{24}{\text{pi}} \cdot \omega_{0a_{i4,j1}} \quad D_{0_{i4,j1}} := \frac{24}{\text{pi}} \cdot \omega_{0_{i4,j1}} \quad D_{12}(T1) := 12$$



11. Polar day and polar night for Northern hemisphere

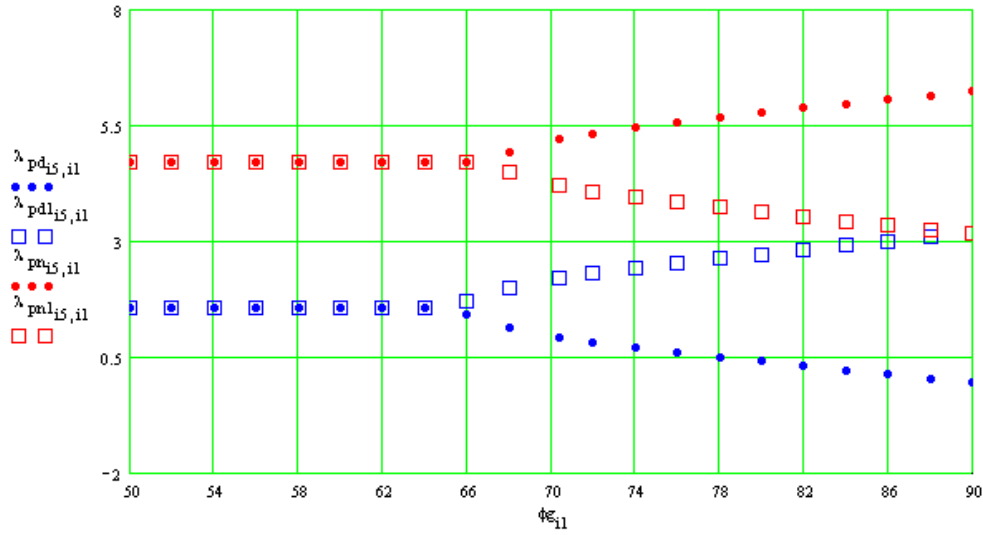
Longitude λ of the polar day and polar night beginning

$$z_{0a1} := \text{pi}05 + 10^{-3} (9.8902 + 4.6599) \quad \text{Fn}01_{i4,i1} := \frac{\sqrt{(\sin(\phi_{i1}) \cdot \cos(z_{0a1}))^2 + (\cos(\phi_{i1}))^2 - (\cos(z_{0a1}))^2) + \sin(\phi_{i1}) \cdot \cos(z_{0a1})}}{\sin(\varepsilon_{i4})}$$

$$\text{Fn}1_{i4,i1} := \text{if}(\text{Fn}01_{i4,i1} \leq 1, \text{Fn}01_{i4,i1}, 1) \quad \text{Fn}02_{i4,i1} := \frac{-\sqrt{(\sin(\phi_{i1}) \cdot \cos(z_{0a1}))^2 + (\cos(\phi_{i1}))^2 - (\cos(z_{0a1}))^2) + \sin(\phi_{i1}) \cdot \cos(z_{0a1})}}{\sin(\varepsilon_{i4})}$$

$$\text{Fn}2_{i4,i1} := \text{if}(\text{Fn}02_{i4,i1} \geq 1, \text{Fn}02_{i4,i1}, -1)$$

$$\lambda_{pd_{i4,i1}} := \text{asin}(\text{Fn}1_{i4,i1}) \quad \lambda_{pd1_{i4,i1}} := \text{pi} - \text{asin}(\text{Fn}1_{i4,i1}) \quad \lambda_{pn_{i4,i1}} := \text{p}2 + \text{asin}(\text{Fn}2_{i4,i1}) \quad \lambda_{pn1_{i4,i1}} := \text{pi} - \text{asin}(\text{Fn}2_{i4,i1})$$



Index of of the polar day beginning

Index of of the polar day ending

$$\text{Ind5}_{i1,j1} := \text{if} \left(\lambda_{pd_{15},i1} \leq \lambda_{15,j1}, 0, j1 \right)$$

$$\text{Ind6}_{i1,j1} := \text{if} \left(\lambda_{pd_{15},i1} \leq \lambda_{15,j1}, 0, j1 \right)$$

in5 := for i1 ∈ 0..If + 1

in6 := for i1 ∈ 0..If + 1

$$\begin{cases} \text{max} \leftarrow 0 \\ \text{for } j1 \in 1..J \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{in5}_{a_{i1}} \leftarrow \text{Ind5}_{i1,j1} \text{ if } \text{max} \leq \text{Ind5}_{i1,j1} \\ \text{max} \leftarrow \text{Ind5}_{i1,j1} \text{ if } \text{max} \leq \text{Ind5}_{i1,j1} \end{array} \right. \\ \text{in5}_a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{max} \leftarrow 0 \\ \text{for } j1 \in 1..J \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{in6}_{a_{i1}} \leftarrow \text{Ind6}_{i1,j1} \text{ if } \text{max} \leq \text{Ind6}_{i1,j1} \\ \text{max} \leftarrow \text{Ind6}_{i1,j1} \text{ if } \text{max} \leq \text{Ind6}_{i1,j1} \end{array} \right. \\ \text{in6}_a \end{cases}$$

$$\text{Td}_{d_{i1}} := \text{Td}_{m5_{i1}} + \frac{\left(\lambda_{pd_{15},i1} - \lambda_{15,m5_{i1}} \right) \cdot \left(\text{Td}_{m5_{i1}+1} - \text{Td}_{m5_{i1}} \right)}{\lambda_{15,m5_{i1}+1} - \lambda_{15,m5_{i1}}}$$

$$\text{Td}_{d_{i1}} := \text{Td}_{m6_{i1}} + \frac{\left(\lambda_{pdl_{15},i1} - \lambda_{15,m6_{i1}} \right) \cdot \left(\text{Td}_{m6_{i1}+1} - \text{Td}_{m6_{i1}} \right)}{\lambda_{15,m6_{i1}+1} - \lambda_{15,m6_{i1}}}$$

Index of of the polar night beginning

Index of of the polar night ending

$$\text{Ind7}_{i1,j1} := \text{if} \left(\lambda_{pn_{15},i1} \leq \lambda_{15,j1}, 0, j1 \right)$$

$$\text{Ind8}_{i1,j1} := \text{if} \left(\lambda_{pnl_{15},i1} \leq \lambda_{15,j1}, 0, j1 \right)$$

in7 := for i1 ∈ 0..If + 1

in8 := for i1 ∈ 0..If + 1

$$\begin{cases} \text{max} \leftarrow 0 \\ \text{for } j1 \in 1..J \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{in7}_{a_{i1}} \leftarrow \text{Ind7}_{i1,j1} \text{ if } \text{max} \leq \text{Ind7}_{i1,j1} \\ \text{max} \leftarrow \text{Ind7}_{i1,j1} \text{ if } \text{max} \leq \text{Ind7}_{i1,j1} \end{array} \right. \\ \text{in7}_a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{max} \leftarrow 0 \\ \text{for } j1 \in 1..J \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{in8}_{a_{i1}} \leftarrow \text{Ind8}_{i1,j1} \text{ if } \text{max} \leq \text{Ind8}_{i1,j1} \\ \text{max} \leftarrow \text{Ind8}_{i1,j1} \text{ if } \text{max} \leq \text{Ind8}_{i1,j1} \end{array} \right. \\ \text{in8}_a \end{cases}$$

$$\text{Td}_{n_{i1}} := \text{Td}_{m7_{i1}} + \frac{\left(\lambda_{pn_{15},i1} - \lambda_{15,m7_{i1}} \right) \cdot \left(\text{Td}_{m7_{i1}+1} - \text{Td}_{m7_{i1}} \right)}{\lambda_{15,m7_{i1}+1} - \lambda_{15,m7_{i1}}}$$

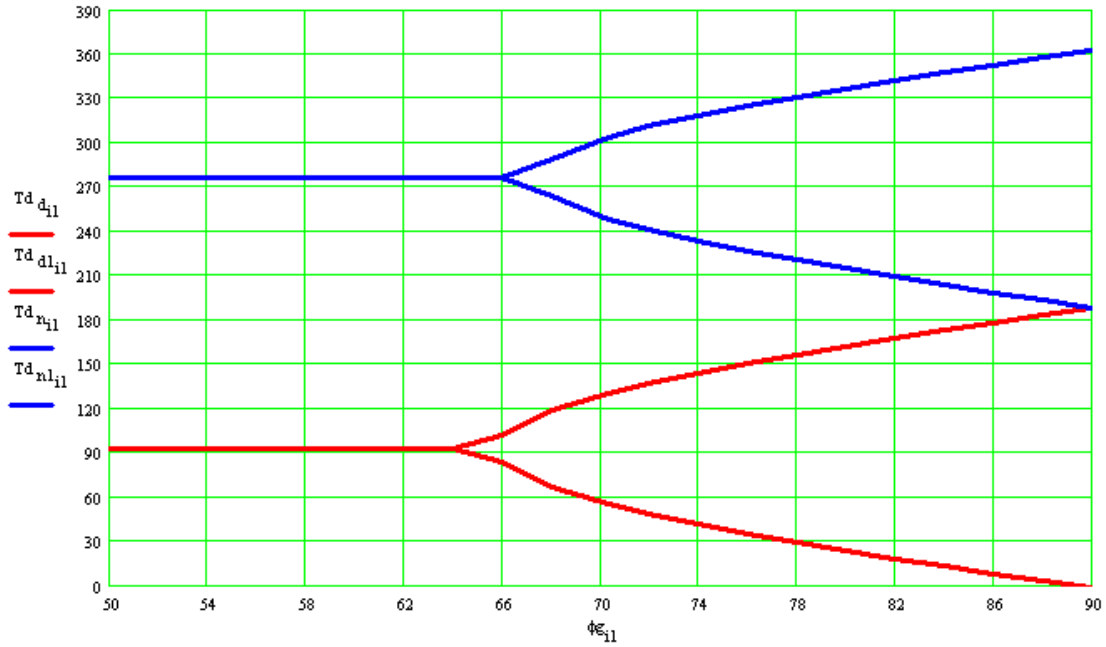
$$\text{Td}_{n_{i1}} := \text{Td}_{m8_{i1}} + \frac{\left(\lambda_{pnl_{15},i1} - \lambda_{15,m8_{i1}} \right) \cdot \left(\text{Td}_{m8_{i1}+1} - \text{Td}_{m8_{i1}} \right)}{\lambda_{15,m8_{i1}+1} - \lambda_{15,m8_{i1}}}$$

The duration of the polar days and nights.

$$\Delta Td_{d_{il}} := Td_{d_{il}} - Td_{d_{il}} \quad \Delta Td_{n_{il}} := Td_{n_{il}} - Td_{n_{il}} \quad i5 = 0 \quad T2_{i5} = 0$$

$$P3_{i1,0} := i1 \quad P3_{i1,1} := 0.1 \cdot T2_{i5} \quad P3_{i1,2} := \phi_{i1} \quad P3_{i1,3} := Td_{d_{il}} \quad P3_{i1,4} := \Delta Td_{d_{il}} \quad P3_{i1,5} := Td_{n_{il}} \quad P3_{i1,6} := \Delta Td_{n_{il}}$$

WwwwRITEPRN("Tempi54.prn") := P3



12. Extremal length of solar day at summer and winter solstices.

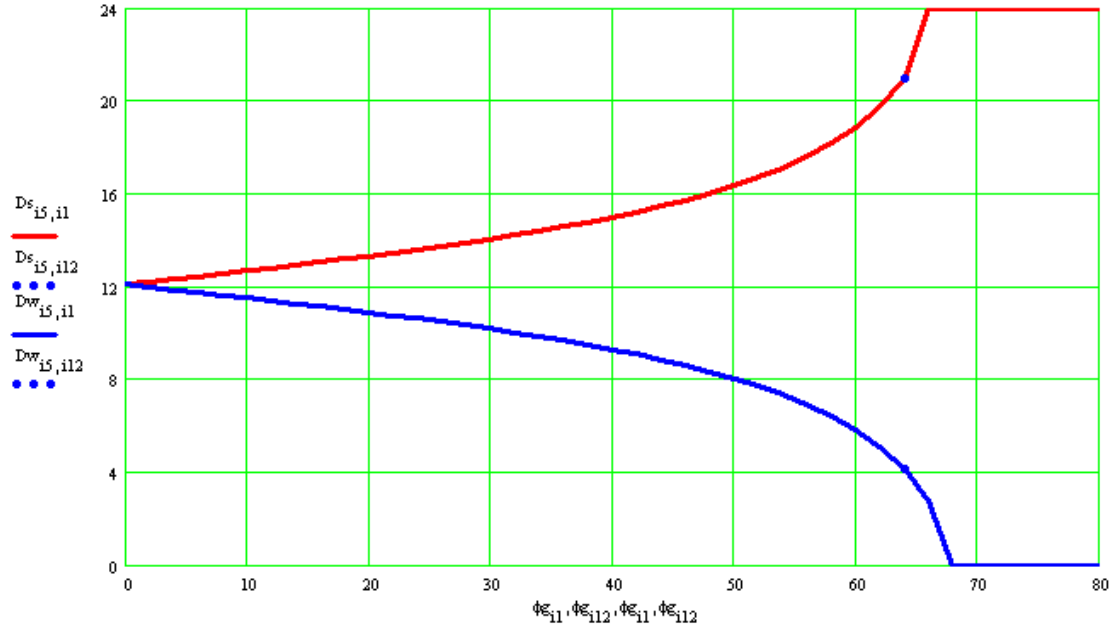
$$Fn0s_{i4,i1} := \left(\frac{\cos(z_{0a1}) - \sin(\varepsilon_{i4}) \cdot \sin(\phi_{i1})}{\cos(\varepsilon_{i4}) \cdot \cos(\phi_{i1})} \right) \quad Fns_{i4,i1} := \text{if}(-1 < Fn0s_{i4,i1}, Fn0s_{i4,i1}, -1) \quad Fns_{i4,i1} := \text{if}(1 > Fns_{i4,i1}, Fns_{i4,i1}, 1)$$

$$\omega0sa_{i4,i1} := \text{acos}(Fns_{i4,i1}) \quad Ds_{i4,i1} := \frac{24}{\pi} \cdot \omega0sa_{i4,i1}$$

$$Fn0w_{i4,i1} := \left(\frac{\cos(z_{0a1}) + \sin(\varepsilon_{i4}) \cdot \sin(\phi_{i1})}{\cos(\varepsilon_{i4}) \cdot \cos(\phi_{i1})} \right) \quad Fnw_{i4,i1} := \text{if}(-1 < Fn0w_{i4,i1}, Fn0w_{i4,i1}, -1) \quad Fnw_{i4,i1} := \text{if}(1 > Fnw_{i4,i1}, Fnw_{i4,i1}, 1)$$

$$\omega0wa_{i4,i1} := \text{acos}(Fnw_{i4,i1}) \quad Dw_{i4,i1} := \frac{24}{\pi} \cdot \omega0wa_{i4,i1}$$

$$P4_{i1,0} := 0.1 \cdot T2_{i5} \quad P4_{i1,2} := \phi_{i1} \quad P4_{i1,3} := Ds_{i5,i1} \quad P4_{i1,4} := Dw_{i5,i1} \quad \text{WwwwRITEPRN}("Tempi54.prn") := P4 \quad i12 := 33$$



13. Azimuths of the daily movement of the Sun for the i5 epoch and j11 day of the year.

$$\begin{aligned}
 K_h &:= 960 \quad k := 0..K_h \quad \Delta\omega_h := \frac{24}{K_h} \quad \omega_{h_k} := -12 + \Delta\omega_h \cdot k \quad \omega_{rd_k} := \frac{15}{rd} \cdot \omega_{h_k} \quad \omega_{h_{K_h}} = 12 \quad j11 = 81 \quad i11 = 36 \\
 \cos z_{i1,k} &:= \sin \delta_{i5,j11} \cdot \sin(\phi_{i1}) + \cos \delta_{i5,j11} \cdot \cos(\phi_{i1}) \cdot \cos(\omega_{rd_k}) \quad z_{i1,k} := \arccos(\cos z_{i1,k}) \quad z_{\xi_{i1,k}} := rd \cdot z_{i1,k} \quad \phi_{\xi_{i11}} = 70.3622 \\
 Fn03_{i1,k} &:= \arcsin\left(\sin(\omega_{rd_k}) \cdot \frac{\cos \delta_{i5,j11}}{\sin(z_{i1,k})}\right) \quad Fn03f_k := Fn03_{i11,k} \\
 mnFn03f &:= \min(Fn03f) \quad Ind9_k := \text{if}(Fn03f_k = mnFn03f, k, 0) \quad in9 := \max(Ind9) \quad in9 = 2.63 \cdot 10^2 \quad mnFn03f = -1.569597608684473 \\
 mxFn03f &:= \max(Fn03f) \quad Ind10_k := \text{if}(Fn03f_k = mxFn03f, k, 0) \quad in10 := \max(Ind10) \quad in10 = 6.97 \cdot 10^2 \quad mxFn03f = 1.56959760868438 \\
 Fn3_{i11,k} &:= \text{if}(in9 < k < in10, Fn03_{i11,k}, 0) \quad Fn3_{i11,k} := \text{if}(k \leq in9, -\pi - Fn03_{i11,k}, Fn3_{i11,k}) \quad \omega_{0h} := D_{i5,j11} \cdot 0.5 \quad \omega_{0h_-} := -\omega_{0h} \\
 Fn3_{i11,k} &:= \text{if}(k \geq in10, \pi - Fn03_{i11,k}, Fn3_{i11,k}) \quad A_{S_{i11,k}} := 180 + rd \cdot Fn3_{i11,k} \quad A_0(\omega_{0h}) := 0 \quad A_0(\omega_{0h_-}) := 0
 \end{aligned}$$

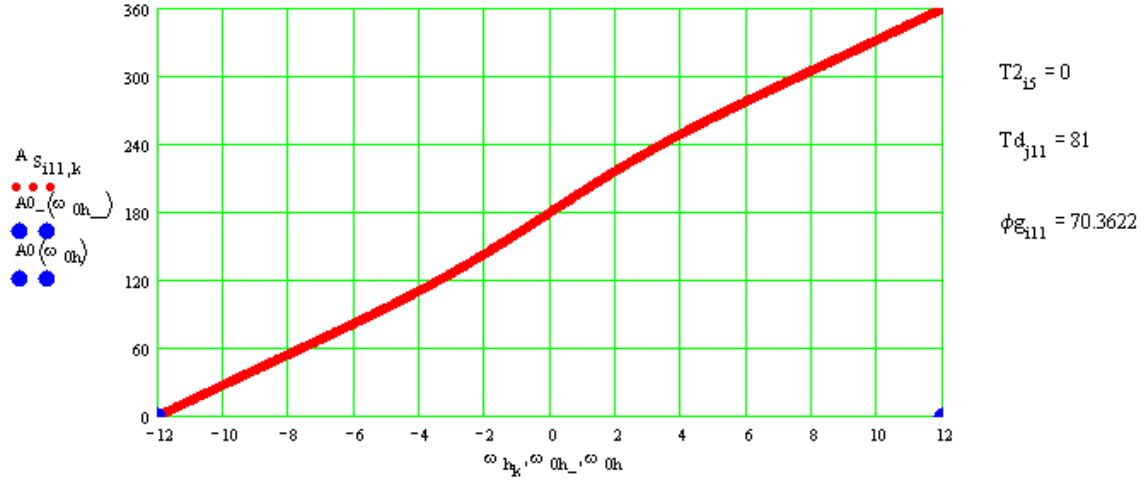
Note. The minimum and maximum values Fn03 may belong to the central area. In this case, there are bursts on azimuth AS for small Kh. In this case, it is need to change $in9 < \text{and} <= in9$ on $<in10$ and $> = in10$:

$$\begin{aligned}
 Fn3_{i11,k} &:= \text{if111}(in9 \leq k \leq in10, Fn03_{i11,k}, 0) \quad Fn3_{i11,k} := \text{if111}(k < in9, -\pi - Fn03_{i11,k}, Fn3_{i11,k}) \\
 Fn3_{i11,k} &:= \text{if111}(k > in10, \pi - Fn03_{i11,k}, Fn3_{i11,k})
 \end{aligned}$$

Daily azimuth of the Sun in the tropics (In the summer at noon it is equal zero).

$$\begin{aligned}
 z_{n\phi_{i1}} &:= \phi_{i1} - \delta_{i5,j11} \quad A_{Stz_{i11,k}} := 180 + rd \cdot Fn03_{i11,k} \quad A_{St_{z_{i11,k}}} := -rd \cdot Fn03_{i11,k} \\
 A_{St_{i11,k}} &:= \text{if}(z_{n\phi_{i1}} \leq 0, A_{St_{z_{i11,k}}}, A_{Stz_{i11,k}}) \quad A_{S_{i11,k}} := \text{if}(\phi_{i11} \leq \xi_{i5}, A_{St_{i11,k}}, A_{S_{i11,k}}) \\
 A_M &:= \text{if}(z_{n\phi_{i11}} \leq 0, 180, 360) \quad A_{M_-} := \text{if}(z_{n\phi_{i11}} \leq 0, -180, 0)
 \end{aligned}$$

Daily azimuth of the Sun's center for i11 number of latitude.



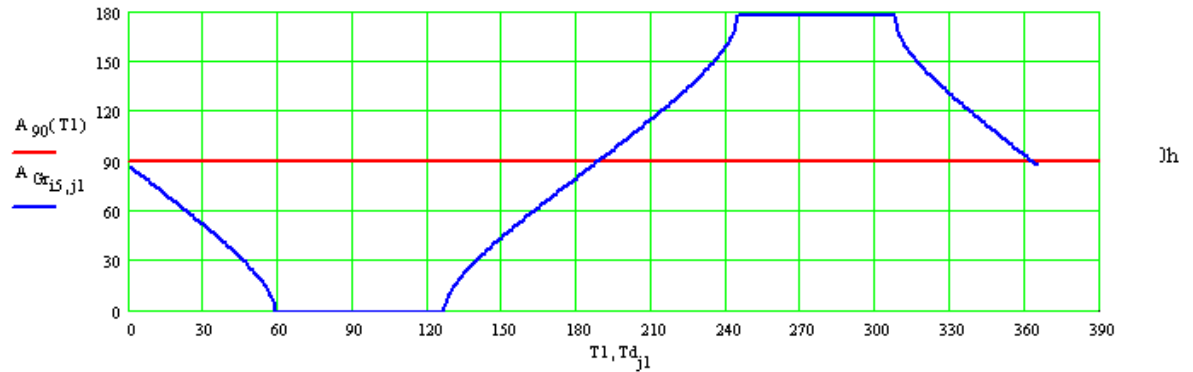
14. Azimuths of sunrises and sunsets

$$Fn04_{i4,j1} := \frac{\sin(\delta_{i4,j1})}{\cos(\phi_{i11})} \quad Fn4_{i4,j1} := \text{if}(-1 < Fn04_{i4,j1}, Fn04_{i4,j1}, -1) \quad Fn4_{i4,j1} := \text{if}(1 > Fn4_{i4,j1}, Fn4_{i4,j1}, 1)$$

$$A_{Gr_{i4,j1}} := \text{rd} \left[\text{pi}05 - \text{asin}(Fn4_{i4,j1}) - 10^{-3} \cdot \left(9.8902 + \frac{4.6599}{\rho_{i4,j1}} \right) \tan(\phi_{i11}) \right] \quad A_{90}(T1) := 90 \quad i5 = 0 \quad T2_{i5} = 0$$

$$A_{Gs_{i4,j1}} := \text{rd} \left[\text{pi}15 + \text{asin}(Fn4_{i4,j1}) + 10^{-3} \cdot \left(9.8902 + \frac{4.6599}{\rho_{i4,j1}} \right) \tan(\phi_{i11}) \right] \quad \max(A_{Gr}) = 1.776755453775201 \cdot 10^2$$

$$\phi_{E_{i11}} = 70.3622$$

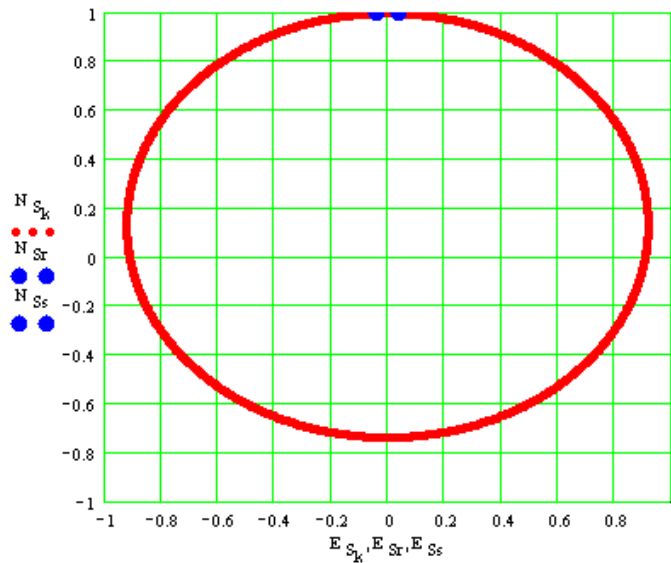


15. The projection of the daily of the Sun's path in the plane of the horizon

$$N_{S_k} := \sin(z_{i11,k}) \cdot \cos\left(\frac{A_{S_{i11,k}}}{rd}\right) \quad E_{S_k} := \sin(z_{i11,k}) \cdot \sin\left(\frac{A_{S_{i11,k}}}{rd}\right)$$

$$N_{S_r} := \sin\left[\text{pi}05 + 10^{-3} \cdot \left(9.8902 + \frac{4.6599}{\rho_{i5,j11}} \right)\right] \cdot \cos\left(\frac{A_{Gr_{i5,j11}}}{rd}\right) \quad E_{S_r} := \sin\left[\text{pi}05 + 10^{-3} \cdot \left(9.8902 + \frac{4.6599}{\rho_{i5,j11}} \right)\right] \cdot \sin\left(\frac{A_{Gr_{i5,j11}}}{rd}\right)$$

$$N_{Ss} := \sin \left[\text{pi}05 + 10^{-3} \cdot \left(9.8902 + \frac{4.6599}{\rho_{i5,j11}} \right) \right] \cdot \cos \left(\frac{A_{Grs_{i5,j11}}}{rd} \right) \quad E_{Ss} := \sin \left[\text{pi}05 + 10^{-3} \cdot \left(9.8902 + \frac{4.6599}{\rho_{i5,j11}} \right) \right] \cdot \sin \left(\frac{A_{Grs_{i5,j11}}}{rd} \right)$$



$$\phi_{g_{i11}} = 70.3622$$

$$Td_{j11} = 81$$

16. Extreme azimuths of sunrises and sunsets during the solstices.

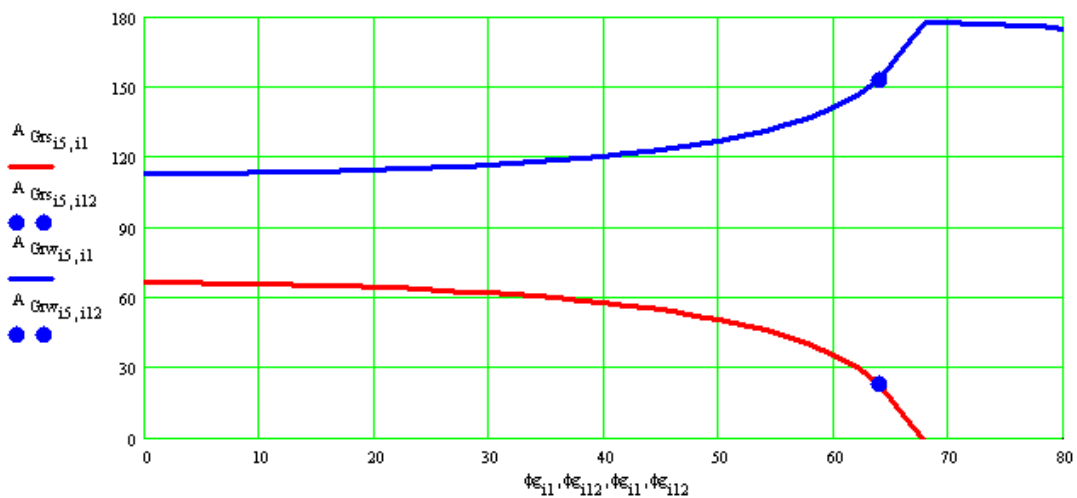
$$Fn05_{i4,i1} := \frac{\sin(\varepsilon_{i4})}{\cos(\phi_{i1})} \quad Fn5_{i4,i1} := \text{if}(-1 < Fn05_{i4,i1}, Fn05_{i4,i1}, -1) \quad Fn5_{i4,i1} := \text{if}(1 > Fn5_{i4,i1}, Fn5_{i4,i1}, 1)$$

$$A_{Grs_{i4,i1}} := rd \cdot \left[\text{pi}05 - \text{asin}(Fn5_{i4,i1}) - 10^{-3} \cdot \left(9.8902 + \frac{4.6599}{1} \right) \cdot \tan(\phi_{i1}) \right]$$

$$A_{Grw_{i4,i1}} := rd \cdot \left[\text{pi}05 + \text{asin}(Fn5_{i4,i1}) - 10^{-3} \cdot \left(9.8902 + \frac{4.6599}{1} \right) \cdot \tan(\phi_{i1}) \right]$$

$$P5_{i1,0} := 0.1 \cdot T2_{i5} \quad P5_{i1,2} := \phi_{g_{i1}} \quad P5_{i1,3} := A_{Grs_{i5,i1}} \quad P5_{i1,4} := A_{Grw_{i5,i1}} \quad \text{WwwwRITEPRN}("Tmi54.prn") := P5$$

$$T2_{i5} = 0 \quad i12 = 33 \quad \phi_{g_{i12}} = 64.000000000000004$$

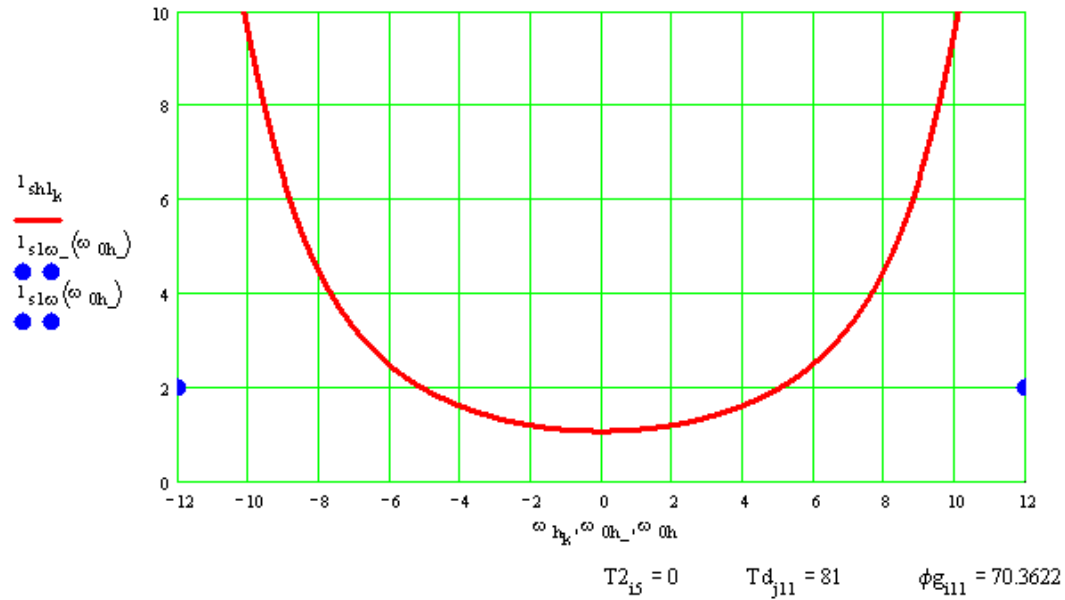


17. Gnomon's solar shadow

17.1. The length of the gnomon's solar shadow during the day for the $i5$ epoch, $j11$ day of the year and $i11$ latitude.

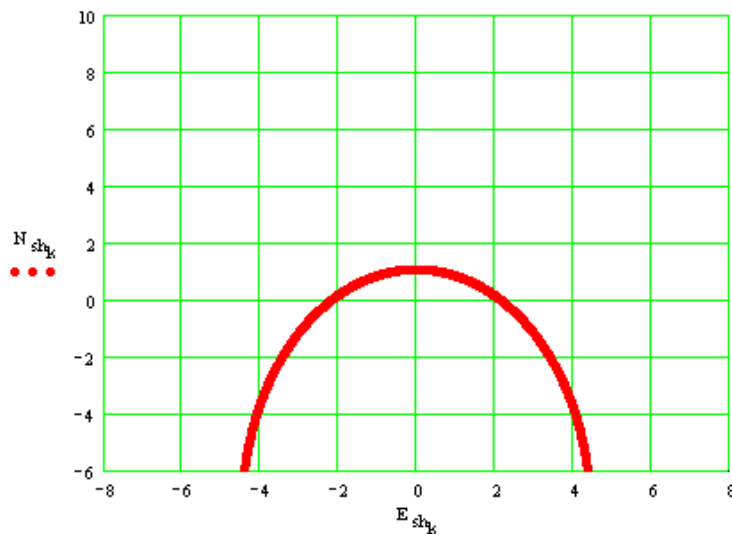
$$Fn0\delta_k := z_{i11,k} - \frac{4.6599 \cdot 10^{-3}}{\rho_{i5,j11}} \quad Fn\delta_k := \text{if}(-\pi 05 < Fn0\delta_k, Fn0\delta_k, -\pi 05) \quad Fn\delta_k := \text{if}(\pi 05 > Fn0\delta_k, Fn\delta_k, \pi 05)$$

$$1_{sh10}_k := \tan(Fn\delta_k) \quad 1_{sh1}_k := \text{if}(0 < 1_{sh10}_k, 1_{sh10}_k, 0) \quad 1_{s1\omega}(\omega_{0h}) := 2 \quad 1_{s1\omega}(\omega_{0h}) := 2$$



17.2. The daily path of the gnomon's shadow on the horizontal plane.

$$N_{sh_k} := -1_{sh1}_k \cdot \cos\left(\frac{A_{S_{i11,k}}}{rd}\right) \quad E_{sh_k} := -1_{sh1}_k \cdot \sin\left(\frac{A_{S_{i11,k}}}{rd}\right)$$



$$T2_{i5} = 0$$

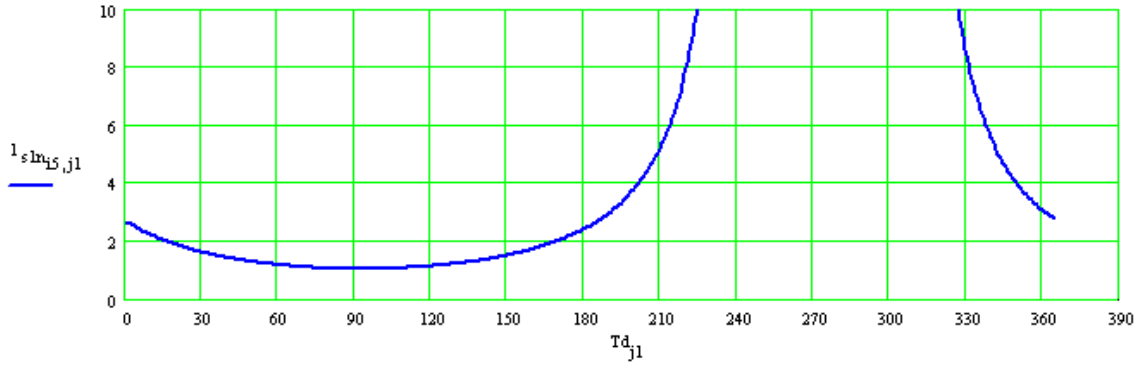
$$Td_{j11} = 81$$

$$\phi_{g_{i11}} = 70.3622$$

17.3. The length of the gnomon's solar shadow in midday.

$$z_{n_{i4,j1}} := \phi_{i11} - \delta_{i4,j1} \quad Fn07_{i4,j1} := z_{n_{i4,j1}} - \frac{4.6599 \cdot 10^{-3}}{\rho_{i4,j1}} \quad Fn7_{i4,j1} := \text{if}(-\pi05 < Fn07_{i4,j1}, Fn07_{i4,j1}, -\pi05)$$

$$Fn7_{i4,j1} := \text{if}(\pi05 > Fn07_{i4,j1}, Fn7_{i4,j1}, \pi05) \quad 1_{s1n0_{i4,j1}} := \tan(Fn7_{i4,j1}) \quad 1_{s1n_{i4,j1}} := \text{if}(0 < 1_{s1n0_{i4,j1}}, 1_{s1n0_{i4,j1}}, 0)$$



17.4. The extreme lengths of the midday gnomon's solar shadow in the solstices.

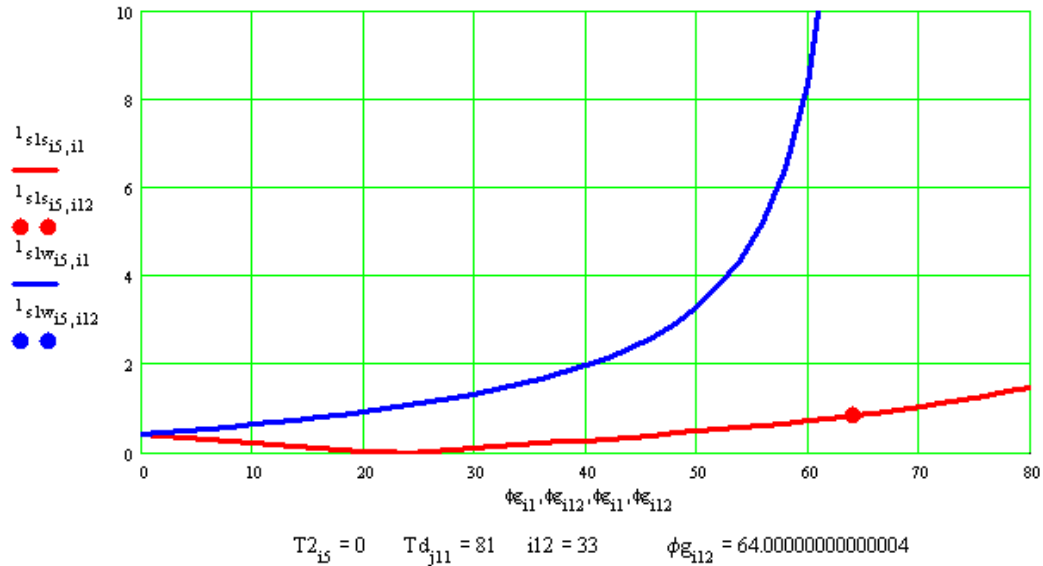
$$z_{ns_{i4,i1}} := \phi_{i11} - \varepsilon_{i4} \quad Fn08_{i4,i1} := \left| z_{ns_{i4,i1}} \right| - \frac{4.6599 \cdot 10^{-3}}{1} \quad Fn8_{i4,i1} := \text{if}(-\pi05 < Fn08_{i4,i1}, Fn08_{i4,i1}, -\pi05)$$

$$Fn8_{i4,i1} := \text{if}(\pi05 > Fn08_{i4,i1}, Fn8_{i4,i1}, \pi05) \quad 1_{s1s0_{i4,i1}} := \tan(Fn8_{i4,i1}) \quad 1_{s1s_{i4,i1}} := \text{if}(0 < 1_{s1s0_{i4,i1}}, 1_{s1s0_{i4,i1}}, 0)$$

$$z_{nw_{i4,i1}} := \phi_{i11} + \varepsilon_{i4} \quad Fn09_{i4,i1} := \left| z_{nw_{i4,i1}} \right| - \frac{4.6599 \cdot 10^{-3}}{1} \quad Fn9_{i4,i1} := \text{if}(-\pi05 < Fn09_{i4,i1}, Fn09_{i4,i1}, -\pi05)$$

$$Fn9_{i4,i1} := \text{if}(\pi05 > Fn09_{i4,i1}, Fn9_{i4,i1}, \pi05) \quad 1_{s1w0_{i4,i1}} := \tan(Fn9_{i4,i1}) \quad 1_{s1w_{i4,i1}} := \text{if}(0 < 1_{s1w0_{i4,i1}}, 1_{s1w0_{i4,i1}}, 0)$$

$$P6_{i1,0} := 0.1 \cdot T2_{i5} \quad P6_{i1,2} := \phi_{\varepsilon_{i1}} \quad P6_{i1,3} := 1_{s1s_{i5,i1}} \quad P6_{i1,4} := 1_{s1w_{i5,i1}} \quad WwwwRITEPRN("Ti54.pm") := P6$$



18. Using the results in the aerospace studies of relief.

The crater on the Yamal Peninsula 30 km south of Bovanenkovo (70.3622 degrees north latitude) is was found in the summer of 2014. On the date of 06.09.2013, which is remote to 81 days from the day of the vernal equinox March 21, the hillock was observed on the crater site. Azimuth of the hillock's shadow is 326.5 degrees.

$$\phi_{g_{hl}} := 70.3622 \quad Td_{hl} := 81 \quad A_{Shl} := 326.5 \quad I_{hl} := 20 \quad i := 0..I_{hl} \quad Td_{j11} = 81 \quad \phi_{g_{i11}} = 70.3622 \quad T2_{i5} = 0 \quad i11 = 36$$

The hour angle of the Sun's azimuth at the time of occurrence of the hillock's shadow.

$$Ind12_k := \text{if}(A_{S_{i11,k}} < A_{Shl}, k, 0) \quad in12 := \max(Ind12) \quad in12 = 8.62 \cdot 10^2 \quad A_{S_{i11,m12}} = 3.262979064470675 \cdot 10^2$$

$$\omega_{hS} := \omega_{h_{m12}} + \frac{(\omega_{h_{m12+1}} - \omega_{h_{m12}}) \cdot (A_{S_{i11,m12+1}} - A_{Shl})}{A_{S_{i11,m12+1}} - A_{S_{i11,m12}}} \quad A_{S1}(\omega_{hl}) := A_{Shl} \quad \omega_{hS} = 9.560166372856854$$

$$1_{sh1hl} := 1_{sh1_{m12}} + \frac{(1_{sh1_{m12+1}} - 1_{sh1_{m12}}) \cdot ((\omega_{h_{m12+1}} - \omega_{hS}))}{(\omega_{h_{m12+1}} - \omega_{h_{m12}})} \quad 1_{sh1f}(\omega_{hl}) := 1_{sh1hl} \quad 1_{sh1hl} = 8.040714519829733$$

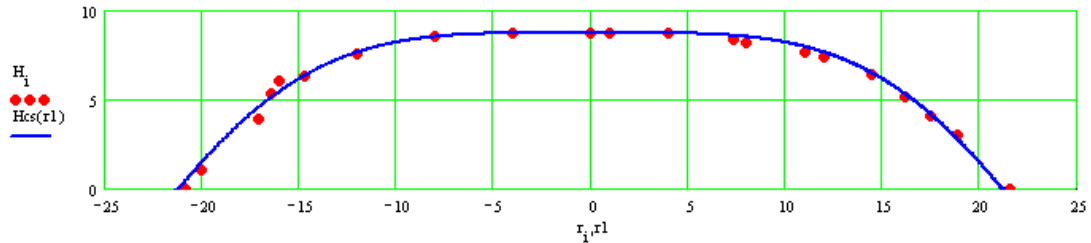
The observed radius of the hillock and length of its shadow

$$R2 := \text{READPRN}("HillSh.pm") \quad r_i := R2_{0,i} \quad 1_{Osh_i} := R2_{1,i}$$

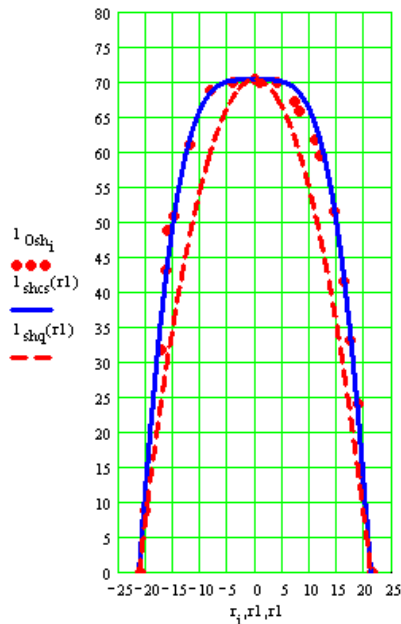
Profile of the hillock and its approximations.

$$H_i := \frac{1_{Osh_i}}{1_{sh1hl}} \quad R_h := 0.5 \cdot (-r_0 + r_{1hl}) \quad 1_{Oshmx} := \max(1_{Osh}) \quad 1_{shq}(r1) := 1_{Oshmx} \left[1 - \left(\frac{r1}{R_h} \right)^2 \right] \quad H_{mx} := \max(H)$$

$$Hcs(r1) := H_{mx} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{r1}{R_h} \right)^2 \right] \quad 1_{shcs}(r1) := 1_{Oshmx} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{r1}{R_h} \right)^2 \right] \quad R_h = 21.2 \quad H_{mx} = 8.755440803971084$$



$$1_{Oshmx} = 70.40000000000001 \quad T2_{i5} = 0$$



Печатается в соответствии с решением Ученого Совета Института криосферы Земли

Сибирского отделения Российской академии наук от 16 декабря 2015 г., протокол № 11.